



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



## Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

## Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

## Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.











**Zeitschrift**  
für  
**Mathematik und Physik**

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

**Dr. O. Schlömilch und Dr. M. Cantor.**

---

**38. Jahrgang.**

Mit in den Text gedruckten Figuren und sieben lithographirten Tafeln.

MANFORD LIBRARY



Leipzig,  
Verlag von B. G. Teubner.  
1893.

192949

YX.A.981.1 0907.MATC

# Inhalt.

## Arithmetik und Analysis.

	Seite
Ueber einige lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Von Dr. <b>Lohnstein</b> . . . . .	27
Mathematische Miscellen. Von <b>L. Schendel</b> . . . . .	84
Ueber einige Eigenschaften der Bessel'schen Function erster Art, insbesondere für ein grosses Argument. Von Dr. <b>H. Graf</b> . . . . .	115
Ueber einen Satz Euler's aus der partitio numerorum. Von Dr. <b>L. Goldschmidt</b>	121
Eine Erweiterung des Maximumbegriffs. Von Dr. <b>A. Voigt</b> . . . . .	315
Die Normalform des allgemeinen Wurzelausdrucks und ihre Eigenschaften. Von Dr. <b>Lipps</b> . . . . .	321
Ueber die partiellen Differentialgleichungen, denen die sym- metrischen Functionen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung genügen. Von Prof. <b>Netto</b> . . . . .	357
Ueber Kettenbrüche, die durch Ausziehen der Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl entstehen. Von Dr. <b>Willgrod</b> . . . . .	366

## Synthetische und analytische Geometrie.

Ueber besondere affine Räume. Von Dr. <b>Bütsberger</b> . . . . .	1
Untersuchungen über die auf die Krümmung von Curven und Flächen bezüglichen Eigenschaften der Berührungstrans- formationen. Von Prof. <b>Mehmke</b> . (Erste Mittheilung). . . . .	7
Ueber eine besondere, mit dem Kegelschnittbüschel in Verbind- ung stehende Curve. Von <b>B. Sporer</b> . . . . .	34
Ableitung einer neuen Formel für den Flächeninhalt der Zone eines Rotations- ellipsoids. Von Ober-Postassistent. <b>Roedel</b> . . . . .	56
Darstellung der Curven dritter Ordnung und Classe aus zwei Reciprocitäten. Von Dr. <b>Beyel</b> . . . . .	65
Das Verhältniss der Krümmungsradien im Berührungspunkte zweier Curven. Von Dr. <b>Wölffing</b> . . . . .	237
Eine einfache Berechnung des Siebzehneckes. Von Dr. <b>Bochow</b> . . . . .	250
Ueber eine Potenzbeziehung bei den Curven zweiter Ordnung. Von Dr. <b>Th.</b> <b>Meyer</b> . . . . .	253
Ueber die Stellen innigster Berührung einer ebenen Curve dritter Ordnung mit einer ebenen Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung. Von Dr. <b>Disteli</b> . . . . .	257
Einige Methoden der Bestimmung der Brennpunktscoordinaten und Achsengleichungen eines Kegelschnitts in trimetri- schen Coordinaten. Von Dr. <b>Stoll</b> . . . . .	282
Ueber die Construction von Vierecken aus den Radien der Berührungskreise eines Dreiecks. Von <b>O. Schlömilch</b> . . . . .	310

	Seite
Zur hyperboloidischen Lage von Tetraederpaaren. Von Dr. <b>Muth</b> . . . . .	314
Geometrische Lehrsätze. Von <b>B. Sporer</b> . . . . .	318
Ueber eine besondere cubische Raumcurve (die gleichwinklige cubische Hyperbel). Von Dr. <b>Krüger</b> . . . . .	344
Mechanische Vorrichtungen zum Zeichnen von Curven zweiter Ordnung. Von <b>W. Jürges</b> . . . . .	350
Ueber einen zerfallenden quadratischen Strahlencomplex. Von Dr. <b>Kilbinger</b>	376
Ersatz des Pascal'schen Satzes für den Fall imaginärer Punkte. Von Prof. <b>Thomae</b> . . . . .	381
Ein stereometrisches Analogon zum Pythagoreischen Satz. Von Dr. <b>Beau</b> .	383

### Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Ueber ein neues Ausgleichungsverfahren bei der Aufstellung von Sterbetafeln. Von <b>L. Anton</b> . . . . .	61
Ueber die Ermittlung der Sterblichkeit, Invalidität etc. bei Gesammtheiten mit ein- und austretenden Personen. Von <b>W. Küttner</b> . . . . .	148
Eine Anwendung der Theorie des Tauschwerthes auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Von Prof. <b>Helm</b> . . . . .	374

### Kinematik und Mechanik.

Ueber bedingt periodische Bewegungen eines materiellen Punktes auf Oberflächen zweiter Ordnung mit besonderer Berücksichtigung der Grenzfälle. Von Dr. <b>Pund</b> . . . . .	95
Schluss der Abhandlung . . . . .	165
Construction der Burmester'schen Punkte für ein ebenes Gelenkviereck. (Zweite Mittheilung.) Von Prof. <b>Müller</b> . . . . .	129
Die Brennpunktsmechanismen. Von Prof. <b>Burmester</b> . . . . .	193

### Physik.

Theorie und Versuche über hydraulischen Druck. Von Prof. <b>Kurz</b> . . . . .	48
Construction des Collineationscentrums eines dioptrischen Systems. Von Prof. <b>Matthiessen</b> . . . . .	190
Zur Theorie der Ausdehnung von Hohlkörpern. Von Prof. <b>Kurz</b> .	224
Die kleinste Ablenkung im Prisma Von Prof. <b>Kurz</b> . . . . .	319
Der Mittelpunkt des hydrostatischen Drucks in ebenen Figuren Von Prof. <b>Kurz</b> . . . . .	371



# I.

## Ueber besondere affine Räume.

Von

Dr. F. BÜTZBERGER

zu Langenthal (Schweiz).

# I.

Zwei beliebige Tetraeder  $ABCD$  und  $A'B'C'D'$ , deren Elemente einander gemäss der Bezeichnung zugeordnet sind, bestimmen eine Affinität, das ist eine Collineation, in welcher sich die unendlich ferne Ebene selbst entspricht. Drei Punkte  $XYZ$  dieser Ebene, sowie ein im Endlichen gelegener Punkt  $W$  entsprechen sich ebenfalls selbst. Der letztere ist das sogenannte Situations-Centrum und die sich selbst entsprechenden Geraden  $WX$ ,  $WY$ ,  $WZ$  nennen wir die Achsen der Affinität.

Wir betrachten nun den besonderen Fall, wo die drei Achsen paarweise rechtwinklig sind und wählen sie als Achsen eines Coordinatensystems. Sind  $xyz$  und  $x'y'z'$  die Coordinaten irgend zweier entsprechender Punkte  $P$  und  $P'$ , so können wir nach Euler setzen:

$$1) \quad x' = lx \quad y' = my \quad z' = nz.$$

Die sich selbst entsprechenden Richtungen  $XYZ$  bilden ein Tripel harmonischer Pole des imaginären Kugelkreises, der projicirt wird durch den Kegel:

$$2) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0.$$

Die Polaren der Strahlen  $WP$  und  $WP'$  in Bezug auf denselben sind:

$$3) \quad \begin{cases} x\xi + y\eta + z\zeta = 0 \\ lx\xi + my\eta + nz\zeta = 0. \end{cases}$$

Erklären wir die erstere Ebene als eine Ebene des gestrichenen Systems, so entspricht ihr im ungestrichenen Systeme die zweite Ebene, das heisst:

Sind  $R$  und  $R'$  zwei entsprechende Richtungen (unendlich ferne Punkte) der Affinität, so sind die zu  $R$  normale Stellung  $s'$  und die zu  $R'$  normale Stellung  $s$  zwei entsprechende unendlich ferne Gerade.

Wir fällen nun von den Ecken  $ABCD$  des ersten Tetraeders die Lothe  $abcd$  auf die zugehörigen Seitenebenen  $B'C'D'$ ,  $C'D'A'$ ,  $D'A'B'$ ,  $A'B'C'$

des zweiten. Ebenso ziehen wir durch die Ecken  $A'B'C'D'$  des letzteren die Lothe  $a'b'c'd'$  auf die zugehörigen Seitenebenen des ersten. Die Lothe  $aa'$ ,  $bb'$ ,  $cc'$  und  $dd'$  sind entsprechende Strahlen der Affinität.

Sind nun die Coordinaten der acht Punkte:

$$4) \quad \begin{cases} A: x, y, z & A': lx, my, nz \\ B: x', y', z' & B': lx', my', nz' \\ C: x'', y'', z'' & C': lx'', my'', nz'' \\ D: x''', y''', z''' & D': lx''', my''', nz''' \end{cases}$$

und sind  $\xi\eta\zeta$  laufende Coordinaten, so lautet die Gleichung der Ebene  $BCD$ :

$$5) \quad \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta & 1 \\ x' & y' & z' & 1 \\ x'' & y'' & z'' & 1 \\ x''' & y''' & z''' & 1 \end{vmatrix} = \alpha_x \cdot \xi + \alpha_y \cdot \eta + \alpha_z \cdot \zeta + \text{const} = 0.$$

Bezeichnen nämlich  $\alpha\beta\gamma\delta$  die doppelten Flächen der Dreiecke  $BCD$ ,  $CDA$ ,  $DAB$ ,  $ABC$ , so sind  $\alpha_x\alpha_y\alpha_z$  die doppelten Flächen der Projectionen des Dreiecks  $BCD$  auf die Coordinatenebenen. Die Grössen  $\alpha_x\beta_x\gamma_x\delta_x$  sind daher die Determinanten, welche stehen bleiben, wenn man in:

$$6) \quad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x' & y' & z' & 1 \\ x'' & y'' & z'' & 1 \\ x''' & y''' & z''' & 1 \end{vmatrix}$$

die erste Colonne und resp. die erste, zweite, dritte oder vierte Zeile streicht. Man hat demnach:

$$7) \quad \begin{cases} \alpha_x - \beta_x + \gamma_x - \delta_x = 0 \\ y \cdot \alpha_x - y' \cdot \beta_x + y'' \cdot \gamma_x - y''' \cdot \delta_x = 0 \\ z \cdot \alpha_x - z' \cdot \beta_x + z'' \cdot \gamma_x - z''' \cdot \delta_x = 0. \end{cases}$$

Diese Relationen gelten auch, wenn man darin die Buchstaben  $xyz$  cyklisch vertauscht. Die Gleichungen der Lothe  $a'b'c'd'$  lauten nun:

$$8) \quad \begin{cases} \frac{\xi - lx}{\alpha_x} = \frac{\eta - my}{\alpha_y} = \frac{\zeta - nz}{\alpha_z} \\ \frac{\xi - lx'}{\beta_x} = \frac{\eta - my'}{\beta_y} = \frac{\zeta - nz'}{\beta_z} \\ \frac{\xi - lx''}{\gamma_x} = \frac{\eta - my''}{\gamma_y} = \frac{\zeta - nz''}{\gamma_z} \\ \frac{\xi - lx'''}{\delta_x} = \frac{\eta - my'''}{\delta_y} = \frac{\zeta - nz'''}{\delta_z}. \end{cases}$$

Bezeichnen wir weiter die doppelten Inhalte der Seitenflächen des Tetraeders  $A'B'C'D'$  mit  $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$  und zeigen mit dem angehängten

Index  $xy$  oder  $z$  wieder die Projection auf die betreffende Coordinatenebene an, so ist:

$$9) \quad \alpha'_x = mn \cdot \alpha_x; \quad \alpha'_y = nl \cdot \alpha_y; \quad \alpha'_z = lm \cdot \alpha_z.$$

Die Gleichungen der Lothe  $abcd$  lauten:

$$10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\xi - x}{\alpha'_x} = \frac{\eta - y}{\alpha'_y} = \frac{\zeta - z}{\alpha'_z} \\ \frac{\xi - x'}{\beta'_x} = \frac{\eta - y'}{\beta'_y} = \frac{\zeta - z'}{\beta'_z} \\ \frac{\xi - x''}{\gamma'_x} = \frac{\eta - y''}{\gamma'_y} = \frac{\zeta - z''}{\gamma'_z} \\ \frac{\xi - x'''}{\delta'_x} = \frac{\eta - y'''}{\delta'_y} = \frac{\zeta - z'''}{\delta'_z} \end{array} \right.$$

Schreiben wir nun die Bedingungen auf, unter welchen die Gerade

$$11) \quad \frac{\xi - X}{\lambda} = \frac{\eta - Y}{\mu} = \frac{\zeta - Z}{\nu}$$

jedes der Lothe 6) schneidet:

$$12) \quad \left\{ \begin{array}{l} (X - lx) (\nu \alpha_y - \mu \alpha_z) + (Y - my) (\lambda \alpha_z - \nu \alpha_x) + (Z - nz) (\mu \alpha_x - \lambda \alpha_y) = 0 \\ (X - lx') (\nu \beta_y - \mu \beta_z) + (Y - my') (\lambda \beta_z - \nu \beta_x) + (Z - nz') (\mu \beta_x - \lambda \beta_y) = 0 \\ (X - lx'') (\nu \gamma_y - \mu \gamma_z) + (Y - my'') (\lambda \gamma_z - \nu \gamma_x) + (Z - nz'') (\mu \gamma_x - \lambda \gamma_y) = 0 \\ (X - lx''') (\nu \delta_y - \mu \delta_z) + (Y - my''') (\lambda \delta_z - \nu \delta_x) + (Z - nz''') (\mu \delta_x - \lambda \delta_y) = 0. \end{array} \right.$$

Multipliziert man die zweite und vierte Gleichung mit  $-1$  und addirt dann alle vier, so verschwindet die Summe links zufolge 7) identisch. Eine dieser vier Gleichungen ist also die Folge der drei anderen, oder, wenn die Gerade 11) drei der Lothe 8) schneidet, so trifft sie auch das vierte. Die vier Lothe 8) liegen daher auf einem Hyperboloid; die vier Lothe  $abcd$  liegen im entsprechenden Hyperboloid.

Wenn also die Achsen zweier affiner Räume paarweise rechtwinklig sind, so liegen je zwei entsprechende Tetraeder so, dass die Lothe von den Ecken des einen auf die zugehörigen Seitenebenen des anderen (von  $A$  auf  $B'C'D'$  etc.) in je einem Hyperboloid liegen. Die Lothe entsprechen sich paarweise in der Affinität.

Die Bedingung, dass die zwei ersten Lothe 8) oder  $a'$  und  $b'$  sich schneiden, lautet:

$$13) \quad l(x - x')(\alpha_y \beta_z - \alpha_z \beta_y) + m(y - y')(\alpha_z \beta_x - \alpha_x \beta_z) + n(z - z')(\alpha'_x \beta_y - \alpha_y \beta_x) = 0.$$

Die analoge Bedingung für die zwei ersten Lothe 10) oder  $a$  und  $b$  ist folgende:

$$14) \quad (x - x')(\alpha'_y \beta'_z - \alpha'_z \beta'_y) + (y - y')(\alpha'_z \beta'_x - \alpha'_x \beta'_z) + (z - z')(\alpha'_x \beta'_y - \alpha'_y \beta'_x) = 0.$$

Die Relationen 9) verwandeln aber diese Bedingung sofort in die vorhergehende. Schneiden sich daher zwei der Lothe  $a'b'c'd'$ , so schneiden sich auch die zwei entsprechenden Lothe der Gruppe  $abcd$ . Nun ist aber:

$$\alpha_y \beta_z - \alpha_z \beta_y = \begin{vmatrix} z' & x' & 1 \\ z'' & x'' & 1 \\ z''' & x''' & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x'' & y'' & 1 \\ x''' & y''' & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \\ x''' & y''' & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} z & x & 1 \\ z'' & x'' & 1 \\ z''' & x''' & 1 \end{vmatrix}.$$

$$15) \quad = (x'' - x''') \cdot \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x' & y' & z' \\ 1 & x'' & y'' & z'' \\ 1 & x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}.$$

Abgesehen von dieser Determinante, lässt sich demnach die Bedingung 13) schreiben:

$$16) \quad l(x - x')(x'' - x''') + m(y - y')(y'' - y''') + n(z - z')(z'' - z''') = 0.$$

Verschwindet die Determinante, so liegen sowohl die Punkte  $ABCD$ , als auch die Punkte  $A'B'C'D'$  in je einer Ebene, und die Lothe  $abcd$ , sowie die Lothe  $a'b'c'd'$  sind unter sich parallel. Ist die Bedingung 16) erfüllt, dann schneiden sich die Lothe  $a'b'$  in einem Punkte und die Lothe  $c'd'$  in einem anderen. Da aber jede Gerade, welche drei dieser Lothe trifft, auch das vierte begegnet, so ist die Verbindungslinie der Scheitel der Linienpaare  $a'b'$  und  $c'd'$  identisch mit der Schnittlinie ihrer Ebenen. Dasselbe gilt von den Lothen  $abcd$ .

Sind schliesslich folgende drei Bedingungen erfüllt:

$$17) \quad \begin{cases} l(x - x')(x'' - x''') + m(y - y')(y'' - y''') + n(z - z')(z'' - z''') = 0 \\ l(x - x'')(x''' - x') + m(y - y'')(y''' - y') + n(z - z'')(z''' - z') = 0 \\ l(x - x''')(x' - x'') + m(y - y''')(y' - y'') + n(z - z''')(z' - z'') = 0, \end{cases}$$

wovon übrigens die eine die Folge der zwei anderen ist, so gehen die Lothe  $a'b'c'd'$  durch einen Punkt und die Lothe  $abcd$  durch seinen entsprechenden.

## II.

Vorstehende Untersuchung wurde veranlasst durch die drei ersten Lehrsätze von Steiner in Crelle's Journal Bd. II, S. 287—292 (Gesammelte Werke Bd. I, S. 155—162). Diese drei Sätze, welche sehr interessante und wichtige Anwendungen gestatten, lassen sich verallgemeinern, wie ich in einer von der Hochschule Bern prämirten Preisarbeit gezeigt habe. Hier beschränke ich mich auf den dritten und gebe ihm folgende Fassung:

Haben irgend zwei (irreguläre) Tetraeder solche gegenseitige Lage, dass, wenn aus den Ecken des einen auf die *Seitenebenen* des anderen, in irgend einer Ordnung genommen, *Lothe gefällt werden*, diese vier Lothe auf einem Hyperboloid

liegen, so liegen alle Mal auch diejenigen vier Lothe auf einem Hyperboloid, welche man in entsprechender Ordnung aus den Ecken des zweiten Tetraeders auf die Seitenebenen des ersten fällt.

$ABCD$  und  $A'B'C'D'$  seien die Ecken der beiden Tetraeder. Wir setzen voraus, die Lothe  $abcd$  von den Ecken  $ABCD$  resp. auf die Ebenen  $B'C'D'$ ,  $C'D'A'$ ,  $D'A'B'$  und  $A'B'C'$  liegen auf einem Hyperboloid und beweisen, dass dann auch die Lothe  $a'b'c'd'$  von den Ecken  $A'B'C'D'$  resp. auf die Ebenen  $BCD$ ,  $CDA$ ,  $DAB$  und  $ABC$  in einem Hyperboloid liegen.

Zu dem Zwecke projeciren wir die Figur auf die Ebene  $A'B'C'$ . Die Projectionen der Lothe  $abc$  stehen senkrecht auf den Seiten des Dreiecks  $A'B'C'$ ; denn diese sind die Spuren von Ebenen, zu denen  $abc$  Lothe sind. Da aber die vier windschiefen Geraden  $abcd$  in einem Hyperboloid liegen und  $d$  senkrecht auf der Ebene  $A'B'C'$  steht, so steht noch eine zweite der anderen Schaar angehörende Erzeugende des Hyperboloids senkrecht zur Ebene  $A'B'C'$ ; diese schneidet die Lothe  $abc$ , weshalb ihre Projectionen auf  $A'B'C'$  durch einen Punkt gehen.

Nach dem ersten Lehrsatz der genannten Abhandlung gehen nun auch die Lothe  $abc$  von  $A'B'C'$  auf die Projectionen der zugehörigen Seiten des Dreiecks  $ABC$  durch einen Punkt. Dies sind zugleich die Lothe von  $A'B'C'$  auf die nach der Ebene  $A'B'C'$  orthogonal projecirenden Ebenen des Dreiecks  $ABC$ .

Nun projecire man die Figur auch auf die Ebene  $ABC$ . Die Lothe  $a'b'c'$  projeciren sich als Senkrechte zu den Seiten des Dreiecks  $ABC$ ; mit diesen Projectionen sind diejenigen der Lothe  $abc$  identisch. Da aber letztere durch einen Punkt gehen, so schneiden sich auch die Projectionen von  $a'b'c'$  auf die Ebene  $ABC$  in einem Punkte. Errichten wir in diesem Punkte das Loth zur Ebene  $ABC$ , so schneidet dasselbe die Geraden  $a'b'c'$  und ist zu  $d'$  parallel. Es giebt daher zu jeder Seitenebene des Tetraeders eine Normale, welche alle vier Lothe  $a'b'c'd'$  schneidet, weshalb diese in einem Hyperboloid liegen.

Die Stellungen der Seitenebenen der soeben betrachteten Tetraeder bestimmen in der unendlich fernen Ebene eine Collineation. Wir behaupten, dass die drei sich selbst entsprechenden Richtungen derselben paarweise rectangulär sind und also ein Tripel harmonischer Pole des imaginären Kugelkreises bilden. Dies schliesst drei Bedingungen für die gegenseitige Lage der acht Tetraeder-Ebenen ein.

Legen wir nun durch die Ecken  $ABCD$  eines Tetraeders vier Gerade  $abcd$ , welche in einem Hyperboloid liegen. Zwei davon, etwa  $a$ ,  $b$ , sind willkürlich. Durch  $C$  und  $D$  lege man ihre gemeinsamen Transversalen  $c'$  und  $d'$ . Die Geraden  $c$ ,  $d$  müssen nun mit  $a$ ,  $b$  Transversalen von  $c'$ ,  $d'$

sein und die vier Geraden  $abcd$  müssen  $c'$ ,  $d'$  nach demselben Doppelverhältniss schneiden, so dass:

$$(c'.abcd) = (d'.abcd) = (d'.badc).$$

Legt man also durch  $abc'd'$  das Büschel von Hyperboloiden, so bilden die Schnittpunkte  $c'd$  und  $cd'$  auf  $c'$  und  $d'$  zwei projectivische Reihen. Von den Richtungen der Geraden  $abcd$  sind also zwei willkürlich, die dritte liegt in einer vorgeschriebenen Stellung und bestimmt die vierte. Diese vier Richtungen haben demnach auch drei Bedingungen zu genügen; dass letztere mit den oben genannten identisch sind, erhellt aus folgender Betrachtung:

Man kann irgend einen Punkt des Raumes als Situations-Centrum und drei durch ihn gehende paarweise rectanguläre Gerade als Achsen der Affinität erklären; zudem sind die drei Proportionalitäts-Factoren  $lmn$  willkürlich. Weil nun der Raum  $\infty^3$  Punkte und der Kugelkreis  $\infty^3$  Tripel hat, so giebt es  $\infty^9$  Affinitäten. Ist  $ABCD$  irgend ein Tetraeder, so liegen stets die Lothe von seinen Ecken auf die zugehörigen Seitenebenen des entsprechenden Tetraeders in einem Hyperboloid.

Durch die Ecken  $ABCD$  kann man aber  $\infty^5$  Gruppen windschiefer Geraden  $abcd$  legen, die in einem Hyperboloid sich befinden. Zu jeder dieser Geraden können wir irgend eine senkrechte Ebene legen und diese vier Ebenen denen des Tetraeders  $ABCD$  zuordnen; letzteres ist auf  $\infty^4$  Arten möglich. Es giebt daher wieder  $\infty^9$  solcher Affinitäten; diese sind mit den vorigen identisch.

Liegen also zwei Tetraeder so, dass die Lothe aus den Ecken des einen auf die zugehörigen Ebenen des anderen in einem Hyperboloid liegen, so bestimmen sie eine Affinität, deren Achsen paarweise rectangulär sind; die Lothe entsprechen sich paarweise.

Langenthal, Juli 1892.



## II.

# Untersuchungen über die auf die Krümmung von Curven und Flächen bezüglichen Eigenschaften der Berührungstransformationen.

Von

R. MEHMKE

in Darmstadt.

---

### Erste Mittheilung.

#### Krümmungseigenschaften der Berührungstransformationen in der Ebene.

Es scheinen noch keine Untersuchungen darüber veröffentlicht worden zu sein, nach welchen Gesetzen die Krümmung von Curven und Flächen sich ändert, wenn diese Gebilde einer Berührungstransformation unterworfen werden. Der Verfasser hat im Frühjahr 1891 diese Frage in Angriff genommen und theilt nun die einfachsten seiner Ergebnisse, soweit sie die Berührungstransformationen in der Ebene betreffen, hier mit.\*

Der an die Spitze gestellte Satz liefert u. A. (siehe § 3) eine bemerkenswerthe absolute Invariante, welche die Form eines Doppelverhältnisses hat und aus Krümmungen bzw. Krümmungshalbmessern zusammengesetzt ist, ferner (in § 5) eine neue Methode zur Construction der Krümmungsmittelpunkte von Curven; in § 6 wird eine Anwendung davon auf die kinematische Geometrie veränderlicher Systeme gemacht. Besonderer Werth ist auf die geometrische Deutung der vorkommenden analytischen Ausdrücke, namentlich der in § 9 definirten „Determinante“ einer Berührungstransformation, gelegt.

Nennenswerthe Kenntnisse aus der Theorie der Berührungstransformationen sind zum Verständniss dieser Mittheilung nicht erforderlich. Es genügt, die ersten Seiten von Herrn Lie's „Theorie der Transformationsgruppen, zweiter Abschnitt, Leipzig 1890“ gelesen zu haben, oder zu wissen, dass bei einer Berührungstransformation Curvelemente transformirt

---

\* Inzwischen sind zwei kurze vorläufige Mittheilungen des Verfassers über das Verhalten der geodätischen Krümmung von Curven auf beliebigen Flächen sowie der Hauptkrümmungen von Flächen bei Berührungstransformationen erschienen, erstere in dieser Zeitschrift Bd. 37 1892 S. 189, letztere in der *Rivista di Matematica*, p. 159, 1892. (Anm. während des Druckes.)



$$da = d\sigma \cdot b$$

ist, unter  $d\sigma$  den Contingenzwinkel, unter  $b$  eine zur Curvennormale in  $x$  parallele Strecke von der Länge Eins verstanden. Wählt man die Richtung von  $b$  immer so, dass  $[ab] = +1$ , also  $b$  aus  $a$  durch Drehung um einen rechten Winkel in positivem Sinne erhalten wird, so fällt  $d\sigma$  und damit auch der Krümmungshalbmesser  $\rho = \frac{ds}{d\sigma}$  positiv oder negativ aus, je nachdem das Durchlaufen der betreffenden Curvenstelle im Sinne des Zunehmens von  $t$  eine Bewegung bedingt, welche mit einer positiven oder mit einer negativen Drehbewegung gleichartig ist.

Der Punkt  $x$  und die durch ihn gehende, zu  $a$  parallele Gerade bilden nach der Ausdrucksweise des Herrn Lie ein „Linienelement“ oder „Element“ der Ebene. Ich werde dasselbe der Kürze wegen das Element oder Linienelement  $(x, a)$  nennen. Die Richtung von  $a$  soll als die positive Richtung jenes Elementes, die Richtung von  $b$  als die positive Richtung der Normalen des Elementes bezeichnet werden.

Eine beliebige Berührungstransformation lässt sich durch zwei Gleichungen der Form

$$1) \quad \bar{x} = f(x, a),$$

$$2) \quad \bar{a} = \varphi(x, a)$$

darstellen, worin  $(\bar{x}, \bar{a})$  das vermöge der Transformation aus  $(x, a)$  hervorgehende Linienelement bezeichnet. Wir haben uns, wenn eine bestimmte Curve transformirt werden soll,  $x$  und  $a$  als bestimmte Functionen von  $t$  zu denken. Es folgt alsdann aus den vorhergehenden Gleichungen

$$d\bar{x} = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial a} da,$$

$$d\bar{a} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial a} da,$$

oder da

$$dx = ds \cdot a, \quad da = d\sigma \cdot b$$

und bei Benützung entsprechender Bezeichnungen für das transformirte System

$$d\bar{x} = d\bar{s} \cdot \bar{a}, \quad d\bar{a} = d\bar{\sigma} \cdot \bar{b}$$

ist,

$$3) \quad d\bar{s} \cdot \bar{a} = ds \cdot \frac{\partial f}{\partial x} a + d\sigma \cdot \frac{\partial f}{\partial a} b,$$

$$4) \quad d\bar{\sigma} \cdot \bar{b} = ds \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} a + d\sigma \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial a} b.$$

Die innere Multiplication der Gleichungen 2) und 3) ergibt wegen  $\bar{a}^2 = 1$ :

$$5) \quad d\bar{s} = ds \left[ \varphi \left| \frac{\partial f}{\partial x} a \right. \right] + d\sigma \left[ \varphi \left| \frac{\partial f}{\partial a} b \right. \right],$$

und ferner die äussere Multiplication der Gleichungen 2) und 4) wegen  $[\bar{a} \bar{b}] = 1$ :

$$6) \quad d\bar{\sigma} = ds \left[ \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} a \right] + d\sigma \left[ \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial a} b \right].$$

Man hat also

$$\frac{d\bar{s}}{d\bar{\sigma}} = \frac{ds \left[ \varphi \left| \frac{\partial f}{\partial x} a \right. \right] + d\sigma \left[ \varphi \left| \frac{\partial f}{\partial a} b \right. \right]}{ds \left[ \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} a \right] + d\sigma \left[ \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial a} b \right]},$$

oder da

$$7) \quad \bar{\varrho} = \frac{\varrho \left[ \varphi \left| \frac{\partial f}{\partial x} a \right. \right] + \left[ \varphi \left| \frac{\partial f}{\partial a} b \right. \right]}{\varrho \left[ \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} a \right] + \left[ \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial a} b \right]}.$$

Es erscheint mithin  $\bar{\varrho}$ , der zur Stelle  $\bar{x}$  gehörige Krümmungshalbmesser der transformirten Curve, als gebrochene lineare Function des entsprechenden Krümmungshalbmessers  $\varrho$  der ursprünglichen Curve. Liegen mehrere Curven mit einem gemeinsamen Elemente  $(x, a)$  vor, so ist für dieselben auch  $b$  gemeinsam und es erhalten daher die Coefficienten auf der rechten Seite der auf dieses Element bezogenen Gleichung 7) bei allen jenen Curven dieselben Werthe. Hieraus folgt aber der oben aufgestellte Satz.

Nicht ganz überflüssig mag die, vermöge des Vorhergehenden ohne Weiteres als richtig zu erkennende Bemerkung sein, dass irgend zwei sich berührende Curven, welche im Berührungspunkte dieselbe Krümmung haben, durch jede Berührungstransformation in zwei Curven der gleichen Beschaffenheit verwandelt werden.

## § 2. Einige besondere Fälle.

Eine besondere Betrachtung verdienen die Punkttransformationen und unter den „eigentlichen“ Berührungstransformationen im Sinne des Herrn Lie diejenigen, welche — wie die Transformation durch reciproke Polaren und die Fusspunkttransformation — alle Punkte in gerade Linien oder umgekehrt verwandeln, und ferner die zu den Punkttransformationen dualistischen Transformationen, welche gerade Linien stets wieder in gerade Linien überführen. Diesen drei Arten von Berührungstransformationen sollen später ausführliche Untersuchungen gewidmet werden; hier kommt es zunächst nur auf die Besonderheiten an, welche bei denselben die *projectiven Punktreihen*, von denen im Fundamentalsatze die Rede ist, zeigen.







$$\frac{\varrho_1 - \varrho_3}{\varrho_2 - \varrho_3} : \frac{\varrho_1 - \varrho_4}{\varrho_2 - \varrho_4}$$

seinen Werth nicht, wenn man auf jene Curven eine beliebige Berührungstransformation in ihrer Ebene anwendet.

Die in § 2 besprochenen besonderen Fälle geben Anlass zu folgenden Sätzen:

Bezeichnen  $k_1, k_2, k_3, k_4$  die Krümmungen von vier beliebigen, sich in einem Punkte berührenden ebenen Curven im Berührungspunkte, so bleibt der Werth des Verhältnisses

$$\frac{k_1 - k_2}{k_2 - k_3},$$

oder allgemeiner der Werth des Verhältnisses

$$\frac{k_1 - k_2}{k_3 - k_4}$$

von allen in ihrer Ebene ausgeführten Punkttransformationen, die man auf die gegebenen Curven anwenden mag, unberührt.

Ferner:

Sind  $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4$  die zum gemeinsamen Berührungspunkte gehörigen Krümmungshalbmesser von vier beliebigen, sich in einem Punkte berührenden ebenen Curven, so bleibt der Werth des Verhältnisses

$$\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_2 - \varrho_3},$$

oder allgemeiner der Werth des Verhältnisses

$$\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_3 - \varrho_4},$$

ungeändert, falls man jene Curven einer derartigen Berührungstransformation in ihrer Ebene unterwirft, welche alle geraden Linien wieder in gerade Linien überführt.

Für die linearen Transformationen endlich erhält man auf dieselbe Weise den längst bekannten Satz, dass, wenn auf zwei sich in einem Punkte berührende ebene Curven eine solche angewendet wird, das Verhältniss der zum Berührungspunkte gehörigen Krümmungen dieser Curven hierdurch keine Aenderung erleidet.\*

#### § 4. Curven einer Schaar mit gemeinsamem Element, deren Krümmung nicht geändert wird.

Eine weitere naheliegende Anwendung des Fundamentalsatzes besteht in der Bestimmung derjenigen Curven einer unendlichen Schaar mit einem gemeinsamen Elemente, deren Krümmung in diesem Elemente bei einer

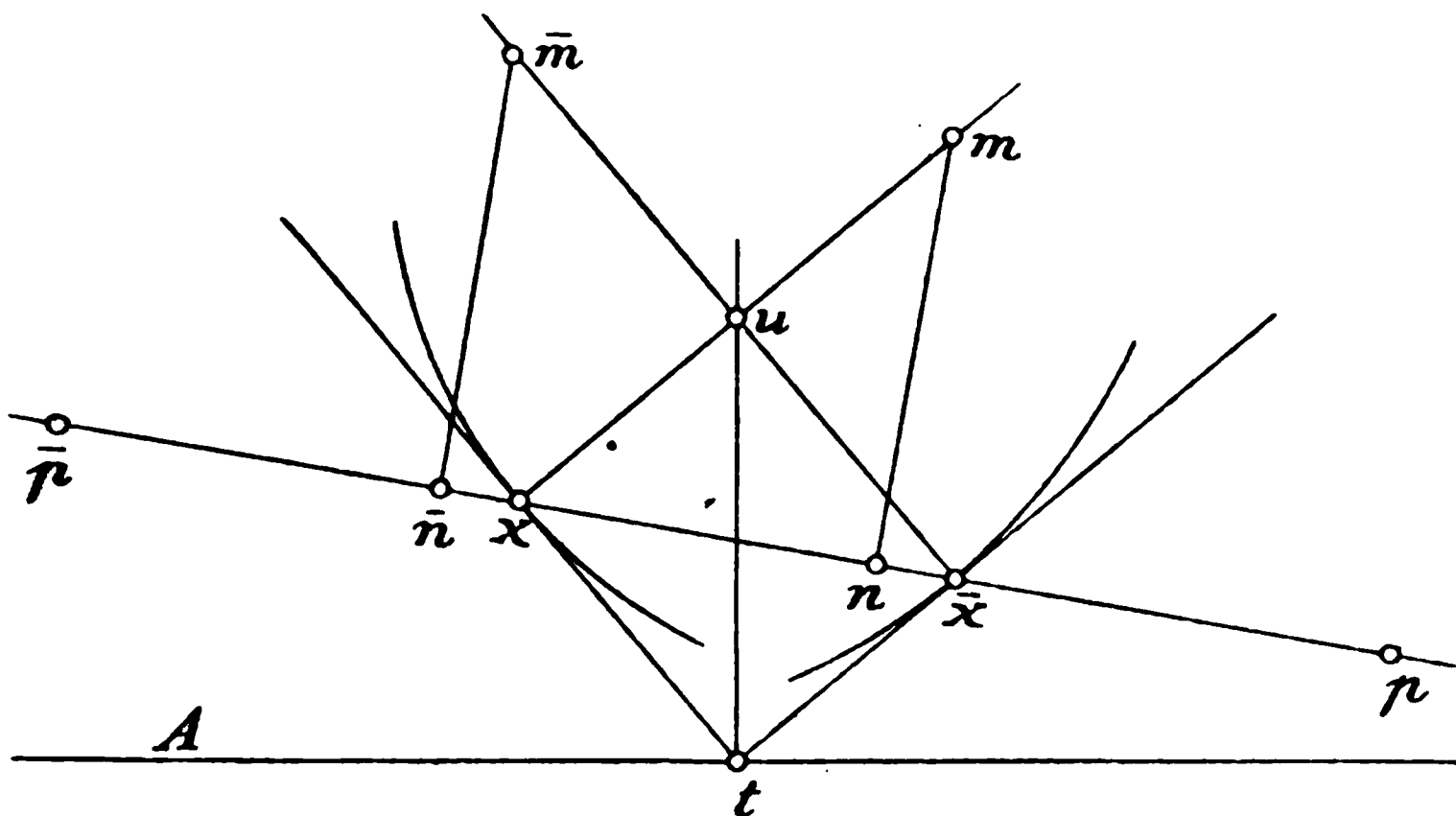
---

\* S. Stephen Smith, On the focal properties of homographic figures, *Proceedings of the London Mathem. Society*, Bd. 2, S. 196—248, 1866—1869; der betreffende Satz findet sich auf S. 212.



entsprechende Curventangenten  $xt$  und  $\bar{x}t$  (Fig. 1) unter rechtem Winkel auf einer festen Achse  $A$ . Dass man es mit einer Berührungstransformation zu thun hat, ist ohne Weiteres klar. Weil augenscheinlich alle geraden Linien in eben solche transformirt werden, so sind je zwei Reihen entsprechender Krümmungsmittelpunkte ähnlich (§ 2), weshalb die Kenntniss von zwei Paaren (im Endlichen gelegener) entsprechender Krümmungsmittelpunkte ausreicht. Nehmen wir zur Gewinnung solcher als Curven im ersten Systeme den Punkt  $x$  und diejenige Curve an, deren Transformirte der Punkt  $\bar{x}$  ist. Dreht  $xt$  sich um  $x$ , so umhüllt  $t\bar{x}$  die Parabel, deren

Fig. 1.



Brennpunkt  $x$  und deren Scheiteltangente  $A$  ist; umgekehrt verwandelt sich die Parabel mit dem Brennpunkte  $\bar{x}$  und der Scheiteltangente  $A$  durch die Transformation in den Punkt  $\bar{x}$ . Sehr leicht folgt hieraus mit Hilfe des Satzes, dass jede Parabelnormale mit dem zugehörigen Brennstrahl und der Achsenrichtung gleiche Winkel bildet, eine von den genannten Geometern bereits angegebene Beziehung: Das im Tangentenschnittpunkt  $t$  auf  $A$  errichtete Loth geht durch den Schnittpunkt  $u$  der entsprechenden Curvennormalen  $xu$  und  $\bar{x}u$ . Nun weiss man, dass bei der Parabel die Projection des Krümmungshalbmessers auf den zugehörigen Brennstrahl gleich dem Doppelten des letzteren ist. Weil die vorhin betrachteten beiden Parabeln den in Frage kommenden Brennstrahl  $x\bar{x}$  gemeinsam haben, so liegt es nahe, die in den Normalen  $xu$  und  $\bar{x}u$  befindlichen, aus entsprechenden Krümmungsmittelpunkten bestehenden ähnlichen Punktreihen auf  $x\bar{x}$  zu projectiren, wodurch man wieder zwei ähnliche Punktreihen erhält. Seien  $p$  und  $\bar{p}$  die Projectionen der zu  $x$  bzw.  $\bar{x}$  gehörigen Krümmungsmittelpunkte der in Rede stehenden Parabeln auf  $x\bar{x}$ , dann ist also

$$\bar{x}\bar{p} = 2\bar{x}x, \quad xp = 2x\bar{x},$$

folglich

$$x\bar{p} = p\bar{x} = \bar{x}x.$$



Nach dem Satze in § 1 bilden dann die zum Punkte  $x$  gehörigen Krümmungsmittelpunkte der gegebenen Systemcurven und die zum Punkte  $\bar{x}$  gehörigen Krümmungsmittelpunkte ihrer Hüllbahnen zwei projective Punktreihen.

Bei starren Systemen kommt dieser Satz auf Bekanntes hinaus.

### § 7. Geometrische Bedeutung der Coefficienten in der Gleichung

$$\bar{\varrho} = \frac{\varrho \alpha + \beta}{\varrho \gamma + \delta}.$$

In § 1 ist gezeigt worden, dass, wenn  $ds$  und  $d\sigma$  Bogenelement und Contingenzwinkel für irgend eine Stelle einer beliebigen Curve,  $d\bar{s}$  und  $d\bar{\sigma}$  dieselben Grössen für die entsprechende Stelle ihrer Transformirten bezeichnen, zwei Gleichungen der Form

$$5') \quad d\bar{s} = ds\alpha + d\sigma\beta$$

und

$$6') \quad d\bar{\sigma} = ds\gamma + d\sigma\delta$$

bestehen. Die Coefficienten  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  lassen sich in einfacher Weise geometrisch deuten. Zunächst ergibt sich durch Vergleichung mit 5) und 6):

$$8) \quad \alpha = \varphi \left| \frac{\partial f}{\partial x} a \right| = \bar{\alpha} \left| \frac{\partial f}{\partial x} a \right|, \quad \beta = \varphi \left| \frac{\partial f}{\partial a} b \right| = \bar{\alpha} \left| \frac{\partial f}{\partial a} b \right|$$

und

$$9) \quad \gamma = \left[ \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} a \right] = \bar{\gamma} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} a \right|, \quad \delta = \left[ \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial a} b \right] = \bar{\gamma} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial a} b \right|$$

ist. Gehen wir jetzt noch einmal auf die Streckengleichungen

$$3) \quad d\bar{s} \cdot \bar{\alpha} = ds \cdot \frac{\partial f}{\partial x} a + d\sigma \cdot \frac{\partial f}{\partial a} b,$$

$$4) \quad d\bar{\sigma} \cdot \bar{\gamma} = ds \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} a + d\sigma \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial a} b$$

zurück. Da eine Berührungstransformation vorliegt, so dürfen die Strecken  $\bar{\alpha}, \bar{\gamma}$  nur von der Lage des Elementes  $x, a$ , nicht aber vom Verhältnisse der Grössen  $ds$  und  $d\sigma$ , d. h. von der Krümmung der zu transformirenden Curve an der betreffenden Stelle abhängen. Dazu ist nothwendig und hinreichend, dass die Strecken

$$\frac{\partial f}{\partial x} a \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial a} b$$

parallel sind und ebenso auch die Strecken

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} a \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial a} b.$$

Die ersten beiden Strecken sind alsdann parallel zu  $\bar{\alpha}$ , die beiden letzten parallel zu  $\bar{\gamma}$ . Ausserdem haben die Strecken  $\bar{\alpha}$  und  $\bar{\gamma}$  die Länge Eins. Folglich ist beispielsweise das innere Product

$$\alpha = \bar{a} \left| \frac{\partial f}{\partial x} a \right|$$

gleich der Länge der Strecke  $\frac{\partial f}{\partial x} a$ , und zwar mit dem Vorzeichen plus oder minus, je nachdem die genannte Strecke dieselbe Richtung hat, wie  $\bar{a}$ , oder die umgekehrte, ebenso

$$\gamma = \bar{b} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} a \right|$$

gleich der mit richtigem Vorzeichen genommenen Länge von  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} a$  u. s. w.

Also:

Die Coefficienten  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  sind der Reihe nach gleich den mit bestimmten Vorzeichen versehenen Längen der Strecken

$$\frac{\partial f}{\partial x} a, \quad \frac{\partial f}{\partial a} b, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} a, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial a} b,$$

bei deren Messung als positive Richtungen diejenigen von  $\bar{a}$  und  $\bar{b}$  genommen werden müssen.

Hiervon wird in § 10 Gebrauch gemacht werden.

Was ist aber die eigentliche Bedeutung z. B. der Strecke  $\frac{\partial f}{\partial x} a$ ? Sie stellt die partielle Ableitung von  $\bar{x} = f(x, a)$  nach  $x$  in der Richtung  $a$  vor. Daraus folgt: Ertheilt man, ohne die Richtung von  $a$  zu ändern, dem Punkte  $x$  eine kleine Verschiebung von der Grösse  $ds$  in der Richtung von  $a$  und nennt man  $d\bar{s}_1$  die Grösse der hierdurch hervorgerufenen (zu  $\bar{a}$  parallelen) Verschiebung von  $\bar{x}$ , dann ist die Länge von  $\frac{\partial f}{\partial x} a$ , also  $\alpha$ , gleich

$$\lim \frac{d\bar{s}_1}{ds} \text{ für } ds = 0.$$

Ferner: Lässt man bei festem  $x$  die Strecke  $a$  sich um einen kleinen Winkel  $d\sigma$  drehen und bezeichnet man mit  $d\bar{s}_2$  die Grösse der zugehörigen (wieder zu  $\bar{a}$  parallelen) Verschiebung von  $\bar{x}$ , so ist die Länge von  $\frac{\partial f}{\partial a} b$ , also  $\beta$ , gleich

$$\lim \frac{d\bar{s}_2}{d\sigma} \text{ für } d\sigma = 0.$$

Eine ähnliche Bedeutung haben  $\gamma$  und  $\delta$ .

Eine vielleicht noch anschaulichere Erklärung der fraglichen Grössen wird durch die Benützung des Geschwindigkeitsbegriffes ermöglicht, nämlich:

Es ist  $\alpha$  bez.  $\gamma$  gleich der Grösse der Geschwindigkeit, mit welcher der Punkt des Linienelementes, das durch die *Berührungstransformation* aus einem gegebenen Linien-



elemente hervorgeht, sich in seiner Linie bewegt bzw. gleich der Winkelgeschwindigkeit, mit welcher die Linie des Elementes um den Punkt sich dreht, wenn bei fest bleibender Linie des gegebenen Elementes dessen Punkt mit der Geschwindigkeit Eins in seiner Linie verschoben wird. Dagegen ist  $\beta$  bzw.  $\delta$  gleich dem Werthe, den die genannte Geschwindigkeit bzw. Winkelgeschwindigkeit annimmt, wenn bei festbleibendem Punkte des gegebenen Linienelementes die Linie desselben um den Punkt sich mit der Winkelgeschwindigkeit Eins dreht.

Auf Grund vorstehender Ergebnisse können bei geometrisch definirten Berührungstransformationen die Werthe der Coefficienten  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  mitunter durch ganz elementare Betrachtungen gefunden werden.

### § 8. Beispiel: Fusspunkt-Transformation.

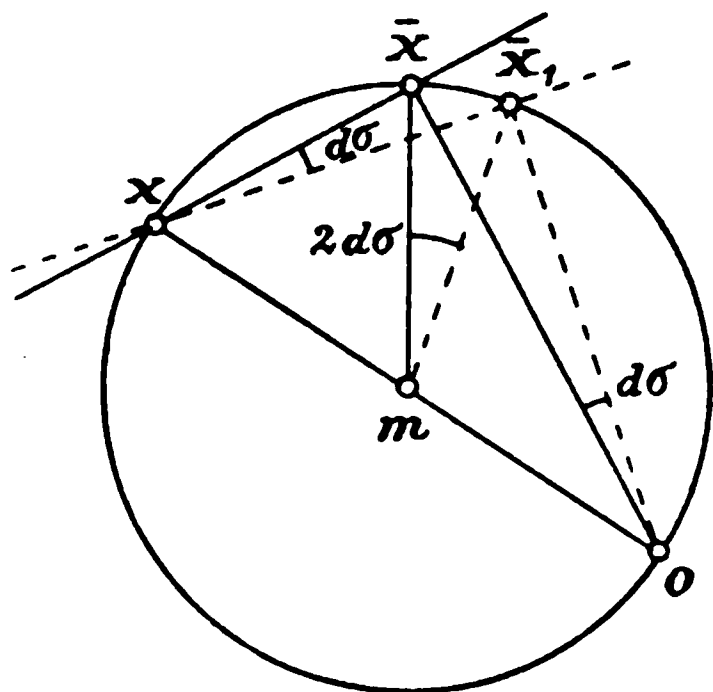
Bei dieser Transformation entspricht jeder Geraden der Fusspunkt des von einem festen Punkte  $o$  auf sie gefällten Lothes; eine beliebige Curve wird also in ihre Fusspunktcurve bezüglich des Punktes  $o$  übergeführt. Es entsteht die Aufgabe, den zu einer beliebigen Stelle gehörigen Krümmungshalbmesser  $\bar{\rho}$  der Fusspunktcurve durch den entsprechenden Krümmungshalbmesser  $\rho$  der gegebenen Curve auszudrücken. Wir wissen bereits, dass eine Beziehung der Form

$$\bar{\rho} = \frac{\rho \alpha + \beta}{\rho \gamma + \delta}$$

vorhanden sein muss und wollen jetzt nach der im letzten Paragraphen entwickelten Methode die Coefficienten in derselben bestimmen, indem wir uns auf die elementarsten Hilfsmittel beschränken.

Seien  $x$  und  $\bar{x}$  zwei entsprechende Punkte der beiden Curven. Wird  $x$  in der Tangente der gegebenen Curve verschoben, so ändert  $\bar{x}$  seine Lage nicht, folglich ist  $\alpha = 0$ . Dreht man die Tangente der gegebenen Curve um ihren Berührungspunkt  $x$ , etwa im Sinne der Uhrzeigerbewegung, um einen kleinen Winkel  $d\sigma$ , so bewegt sich  $\bar{x}$  bis zu einer Stelle  $\bar{x}_1$  (s. Fig. 2) auf dem Kreise, der  $ox$  zum Durchmesser hat. Folglich geht

Fig. 2.



die Normale der Fusspunktcurve durch den Mittelpunkt  $m$  dieses Kreises, wie bekannt. Die Winkel  $\bar{x}o\bar{x}_1$  und  $\bar{x}x\bar{x}_1$  sind einander gleich. Da ferner



jenes Element oder in demselben genannt werden. Wir wollen untersuchen, welche Folgen es hat, wenn die Determinante  $\Delta$  in einem gegebenen Linienelemente  $(x, a)$  verschwindet.

Von dem Falle, dass die Grössen  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  nicht alle endlich sind, soll hier abgesehen werden. So lange nur die Krümmungshalbmesser von Curven, die jenes Element enthalten, und zwar die zu eben diesem Elemente gehörigen, in Frage kommen, sind die Grössen  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  in der Gleichung

$$\bar{\varrho} = \frac{\varrho \alpha + \beta}{\varrho \gamma + \delta}$$

constant. Bildet man unter dieser Voraussetzung die Ableitung von  $\bar{\varrho}$  nach  $\varrho$ , so kommt

$$\frac{d\bar{\varrho}}{d\varrho} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\varrho\gamma + \delta)^2} = \frac{\Delta}{(\varrho\gamma + \delta)^2}.$$

Wenn daher  $\Delta$  verschwindet, ohne dass  $(\varrho\gamma + \delta)$  Null ist, so verschwindet auch  $d\bar{\varrho}/d\varrho$  und es wird folglich  $\bar{\varrho}$  constant. Verschwindet neben  $\Delta$  auch  $(\varrho\gamma + \delta)$ , nicht aber jede der Grössen  $\gamma$  und  $\delta$ , so wird offenbar  $(\varrho\alpha + \beta)$  ebenfalls Null, also erhält man für  $\bar{\varrho}$  den Ausdruck  $\frac{0}{0}$ , d. h.  $\bar{\varrho}$  hängt von  $\varrho$  nicht mehr ab und kann jeden beliebigen Werth annehmen. Sind  $\gamma$  und  $\delta$  beide Null, so erhält  $\bar{\varrho}$  immer denselben Werth, nämlich  $\infty$ , so lange nicht  $(\varrho\alpha + \beta)$  verschwindet; im letzteren Falle wird  $\bar{\varrho}$  unbestimmt. Wir haben somit gefunden:

Werden zwei Curven, die sich in einem Punkte berühren, ohne hier gleiche Krümmung zu haben, einer Berührungstransformation unterworfen, deren Determinante im gemeinsamen Elemente jener Curven verschwindet, so gehen dieselben vermöge der Transformation im Allgemeinen in zwei solche Curven über, die sich im gemeinsamen Punkte osculiren.

Umgekehrt kann man leicht zeigen, dass zwei sich lediglich berührende Curven blos dann in zwei sich osculirende übergeführt werden, wenn die Determinante der Berührungstransformation im Berührungselemente Null ist.

Ferner:

Die projective Beziehung, welche nach dem Satze in § 1 zwischen je zwei aus entsprechenden Krümmungsmittelpunkten gebildeten geraden Punktreihen besteht, artet aus, wenn die Determinante der Berührungstransformation für das gemeinsame Element der Schaar von Curven, zu welchen die erste Reihe von Krümmungsmittelpunkten gehört, verschwindet; und zwar in der Weise, dass, abgesehen von einem bestimmten Punkte der ersten Reihe, allen Punkten derselben ein und der nämliche Punkt der zweiten Reihe entspricht, während der zu-

geordnete Punkt des genannten Ausnahmepunktes der ersten Reihe innerhalb der zweiten Reihe unbestimmt bleibt.

Im Allgemeinen giebt es durch jeden Punkt und auf jeder Geraden Linienelemente, für welche die Determinante einer gegebenen Berührungstransformation verschwindet. Sie bilden nach der Ausdrucksweise von Clebsch eine Haupt-Coincidenz, oder nach derjenigen von Herrn Lie eine Elementen- $M_2$  (Elementen-Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen). Es lässt sich aus ihnen ein System von Integralcurven (resp. Elementen- $M_1$ ) zusammensetzen, die man etwa die Determinantencurven der Berührungstransformation nennen könnte.

### § 10. Verschiedene Ausdrücke für die Determinante einer Berührungstransformation. Geometrische Bedeutung derselben.

Die in § 7 angestellte Untersuchung ergab, dass die Strecken  $\frac{\partial f}{\partial x} a$  und  $\frac{\partial f}{\partial a} b$  zu  $\bar{a}$ , die Strecken  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} a$  und  $\frac{\partial \varphi}{\partial a} b$  zu  $\bar{b}$  parallel und die Längen jener Strecken, in der Richtung von  $\bar{a}$  resp.  $\bar{b}$  gemessen, beziehentlich gleich  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  sind. Somit hat man

$$10) \quad \frac{\partial f}{\partial x} a = \alpha \cdot \bar{a}, \quad \frac{\partial f}{\partial a} b = \beta \cdot \bar{a},$$

$$11) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} a = \gamma \cdot \bar{b}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial a} b = \delta \cdot \bar{b}.$$

Daraus folgt, weil  $[\bar{a}\bar{b}] = 1$ :

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial x} a \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial a} b \right] = \alpha \delta, \quad \left[ \frac{\partial f}{\partial a} b \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} a \right] = \beta \gamma.$$

Das giebt für die Determinante  $\Delta$  der Berührungstransformation im Elemente  $(x, a)$  den neuen Ausdruck

$$12) \quad \Delta = \left[ \frac{\partial f}{\partial x} a \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial a} b \right] - \left[ \frac{\partial f}{\partial a} b \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} a \right] = \left[ \frac{\partial f}{\partial x} a \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial a} b \right] + \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} a \cdot \frac{\partial f}{\partial a} b \right],$$

welcher eine einfache geometrische Deutung zulässt. Man trage von dem Punkte des transformirten Linienelementes  $(\bar{x}, \bar{a})$  in der positiven Richtung seiner Linie, d. h. also vom Punkte  $\bar{x}$  in der Richtung  $\bar{a}$ , eine Strecke von der Länge Eins ab und bezeichne den Endpunkt mit  $z$ . Dann ist

$$z = \bar{x} + \bar{a} = f(x, a) + \varphi(x, a).$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\partial z}{\partial x} a = \frac{\partial f}{\partial x} a + \frac{\partial \varphi}{\partial x} a; \quad \frac{\partial z}{\partial a} b = \frac{\partial f}{\partial a} b + \frac{\partial \varphi}{\partial a} b.$$

Man verbinde diese beiden Gleichungen durch äussere Multiplication.

Weil nach dem Früheren die Strecke  $\frac{\partial f}{\partial x} a$  parallel zur Strecke  $\frac{\partial f}{\partial a} b$  und ebenso  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} a$  parallel zu  $\frac{\partial \varphi}{\partial a} b$  ist, so wird

$$13) \quad \left[ \frac{\partial f}{\partial x} a \cdot \frac{\partial f}{\partial a} b \right] = 0,$$

$$14) \quad \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} a \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial a} b \right] = 0.$$

Daher ist

$$\left[ \frac{\partial s}{\partial x} a \cdot \frac{\partial s}{\partial a} b \right] = \left[ \frac{\partial f}{\partial x} a \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial a} b \right] + \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} a \cdot \frac{\partial f}{\partial a} b \right] = \Delta.$$

In Worten:

Lässt man zuerst den Punkt  $x$  des gegebenen Linien-elementes  $(x, a)$  mit der Geschwindigkeit Eins in der positiven Richtung der Linie des Elementes (d. h. in der Richtung  $a$ ) sich bewegen, dann umgekehrt die Linie des Elementes um den Punkt desselben in positivem Sinne mit der Winkelgeschwindigkeit Eins sich drehen, und bildet man aus den (nach Grösse und Richtung aufgefassten) Geschwindigkeiten, welche infolge dessen der oben definirte Punkt  $s$  im einen und im anderen Falle erhält, ein Parallelogramm, so ist der Inhalt desselben (nach Grösse und Vorzeichen) gleich der Determinante  $\Delta$  der gegebenen Berührungstransformation im Elemente  $(x, a)$ .

Ein einfaches Beispiel für die Anwendung des vorstehenden Satzes giebt die Berührungstransformation ab, welche jede Curve in eine Parallel-curve überführt und darin besteht, dass jedes Element  $(x, a)$  senkrecht zu seiner eigenen Richtung um einen constanten Betrag verschoben wird. Es leuchtet ein, dass, wenn in diesem Falle  $x$  mit der Geschwindigkeit Eins in der Richtung  $a$  sich bewegt, der Punkt  $s$  das Gleiche thut, und ferner, dass, wenn  $a$  mit der Winkelgeschwindigkeit Eins in positivem Sinne um  $x$  sich dreht, von  $\bar{a}$  die gleiche Bewegung um  $\bar{x}$  ausgeführt wird, also  $s$  die Geschwindigkeit Eins parallel zu  $\bar{b}$  (senkrecht zu  $\bar{a}$  oder  $a$ ) erhält. Jene beiden Geschwindigkeiten von  $s$  bilden somit ein Quadrat von der Seitenlänge Eins mit positivem Umlaufssinn, d. h. es wird  $\Delta = +1$ . Reelle Linienelemente mit verschwindender Determinante sind hier nicht vorhanden, also auch keine reellen Determinantencurven.

## § 11. Fortsetzung. Die Determinante einer Berührungstransformation als Geschwindigkeitsverhältniss.

Den Gleichungen 2) und 10) zufolge ist

$$\bar{a} = \varphi(x, a) = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} a.$$

Man leite diese Gleichung in der Richtung  $a$  partiell nach  $x$  ab, d. h. führe die Operation  $\frac{\partial}{\partial x} a$  auf dieselbe aus. Man erhält

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} a = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} a \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial x} a + \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} a^2.$$

Durch Ausführung der Operation  $\frac{\partial}{\partial a} b$  auf dieselbe Gleichung ergibt sich

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} b = \left( \frac{\partial \frac{1}{a}}{\partial a} b \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial x} a + \frac{1}{a} \cdot \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial a} a b + \frac{\partial f}{\partial x} b \right).$$

Setzt man für  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} a$  und  $\frac{\partial \varphi}{\partial a} b$  die gefundenen Werthe in Gleichung 12) ein, so kommt bei Berücksichtigung von Gleichung 13):

$$\Delta = \frac{1}{a} \cdot \left\{ \left[ \frac{\partial f}{\partial x} a \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial a} a b \right] + \left[ \frac{\partial f}{\partial x} a \cdot \frac{\partial f}{\partial x} b \right] \right\} + \frac{1}{a} \cdot \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} a^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial a} b \right].$$

Die partielle Ableitung der Gleichung 13) nach  $x$  in der Richtung  $a$  liefert jedoch

$$\left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} a^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial a} b \right] + \left[ \frac{\partial f}{\partial x} a \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial x} b a \right] = 0.$$

Daher wird

$$\Delta = \frac{1}{a} \cdot \left[ \frac{\partial f}{\partial x} a \cdot \frac{\partial f}{\partial x} b \right] = \left[ \frac{1}{a} \frac{\partial f}{\partial x} a \cdot \frac{\partial f}{\partial x} b \right]$$

oder

$$15) \quad \Delta = \left[ \varphi \cdot \frac{\partial f}{\partial x} b \right] = \left[ \bar{a} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} b \right].$$

Zu demselben Ergebnisse kann man auf ähnliche Weise gelangen, indem man von der Gleichung

$$\varphi(x, a) = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\partial f}{\partial a} b$$

ausgeht. Wenn daher auch  $a$  identisch verschwindet, so bleibt die Gleichung 15) doch bestehen.

Gleichung 15) ist einer einfachen Deutung fähig. Weil nämlich  $\bar{b} = |\bar{a}$  oder  $\bar{a} = -|\bar{b}$  ist, so kann man jene Gleichung schreiben

$$\Delta = \left[ -|\bar{b} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} b \right] = \left[ \frac{\partial f}{\partial x} b |\bar{b} \right].$$

Das heisst:

Ertheilt man bei unveränderter Richtung des gegebenen Linienelementes  $(x, a)$  seinem Punkte  $x$  die Geschwindigkeit Eins in der positiven Richtung der Normalen des Elementes, dann ist die Projection der Geschwindigkeit, mit welcher sich infolge dessen der Punkt  $\bar{x}$  des transformirten Elementes bewegt, auf die positive Richtung der Normalen des letzteren Elementes gleich der Determinante der gegebenen Berührungstransformation im Elemente  $(x, a)$ .

Nehmen wir als Beispiel die bereits in § 8 untersuchte Fusspunkttransformation. Es bezeichne wieder  $o$  den Lothpunkt,  $r$  resp.  $\bar{r}$  die Entfernung desselben von  $x$  resp.  $\bar{x}$ ,  $m$  die Mitte zwischen  $x$  und  $o$ . Seien ferner die einander gleichen Winkel  $m\bar{x}o$  und  $\bar{x}om$  durch  $\psi$  bezeichnet.

Wird das gegebene Linienelement normal zu seiner Richtung, also normal zu  $x\bar{x}$ , um irgend einen Betrag verschoben, so erleidet offenbar  $\bar{x}$  eine gleich grosse und gleich gerichtete Verschiebung, also hat die Strecke  $\frac{\partial f}{\partial x} b$  die Länge Eins und sie ist parallel mit  $\bar{x}o$ . Da nun die Normale des transformirten Elementes bekanntlich durch  $m$  geht, so hat man

$$\Delta = \cos \psi = \frac{\bar{r}}{r},$$

welches Ergebniss auch durch die Formel für  $\bar{\varrho}$  in § 8 geliefert wird. Abgesehen von den Elementen mit unendlich fernem Punkte ( $r = \infty$ ) verschwindet also die Determinante der Fusspunkt-Transformation für jedes Element, dessen Linie den Lothpunkt  $o$  enthält ( $\bar{r} = 0$ ), und die Determinantencurven bestehen daher in diesem Falle in der Gesamtheit der durch  $o$  gehenden geraden Linien.

## § 12. Erweiterung.

Der im letzten Paragraphen gefundene Satz lässt sich verallgemeinern. Das Element  $(x, a)$  werde einer beliebigen unendlich kleinen Lagenänderung unterworfen. Die Verschiebung, welche  $x$  hierbei erfährt, sei (nach Länge und Richtung) gleich  $dx$ ; die Verdrehung der Linie des Elementes betrage  $d\varepsilon$ . Man zerlege  $dx$  in zwei Componenten parallel den Strecken  $a$  und  $b$ . Sind  $d\lambda$  und  $d\mu$  die in der Richtung  $a$  resp.  $b$  gemessenen Längen jener Componenten, so hat man

$$dx = d\lambda \cdot a + d\mu \cdot b.$$

Ferner ist

$$da = d\varepsilon \cdot b.$$

Daher wird

$$\begin{aligned} d\bar{x} &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial a} da = \frac{\partial f}{\partial x} (d\lambda \cdot a + d\mu \cdot b) + \frac{\partial f}{\partial a} (d\varepsilon \cdot b) \\ &= d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial x} a + d\mu \cdot \frac{\partial f}{\partial x} b + d\varepsilon \cdot \frac{\partial f}{\partial a} b. \end{aligned}$$

Durch äussere Multiplication mit  $\bar{a}$  folgt hieraus, weil

$$\left[ \bar{a} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} a \right] = 0, \quad \left[ \bar{a} \cdot \frac{\partial f}{\partial a} b \right] = 0$$

und nach Gleichung 15)

$$\left[ \bar{a} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} b \right] = \Delta \text{ ist,}$$

$$[\bar{a} d\bar{x}] = d\mu \cdot \Delta.$$

Andererseits ist wegen  $[aa] = 0$ ,  $[ab] = 1$ :

$$[a dx] = d\mu,$$

also

$$16) \quad \Delta = \frac{[\bar{a} d\bar{x}]}{[a dx]},$$

oder auch

$$16a) \quad \Delta = \frac{[d\bar{x} | \bar{b}]}{[dx | b]}.$$

Dieses Ergebniss können wir ausdrücken wie folgt:

Unterwirft man das Linienelement  $(x, a)$  einer beliebigen unendlich kleinen Lagenänderung und bezeichnet man mit  $d\mu$  die Projection der Verschiebung, welche der Punkt  $x$  des Elementes hierbei erfährt, auf die Normale des Elementes; mit  $d\bar{\mu}$  die Projection der durch jene Lagenänderung hervorgerufenen Verschiebung des Punktes  $\bar{x}$  auf die Normale des transformirten Elementes  $(\bar{x}, \bar{a})$ , so ist die Determinante der gegebenen Berührungstransformation im Elemente  $(x, a)$  gleich  $\frac{d\bar{\mu}}{d\mu}$ .

Natürlich hätte man bei der Einkleidung der Formel 16a) in Worte auch den Geschwindigkeitsbegriff benützen können.

Anmerkung. Führt man rechtwinklige Cartesische Coordinaten ein und nennt man  $x_1, x_2$  die Coordinaten des Punktes  $x$ ,  $\Theta$  den Neigungswinkel des Linienelementes  $(x, a)$  gegen die erste Coordinatenachse, so verwandelt sich das äussere Streckenproduct  $[a dx]$  in den „Pfaff'schen Ausdruck“

$$\cos \Theta dx_2 - \sin \Theta dx_1,$$

welcher, von Herrn Lie in etwas anderer Form geschrieben, in dessen Entwicklungen eine wichtige Rolle spielt. Gleichung 16) zeigt, dass  $\Delta$ , die Determinante einer Berührungstransformation im Elemente  $(x, a)$ , gleich dem Factor ist, welcher aus dem Pfaff'schen Ausdruck  $[a dx]$  hervortritt, wenn man auf ihn jene Berührungstransformation anwendet. Es entspricht also  $\Delta$  der Grösse, die Herr Lie im zweiten Abschnitte seiner Theorie der Transformationsgruppen mit  $\varrho$  bezeichnet und von welcher er zeigt — was auch aus unseren Ergebnissen mit Leichtigkeit sich folgern lässt —, dass sie nicht identisch verschwinden kann, ohne im Uebrigen auf ihre geometrische Bedeutung einzugehen.

---



### III.

## Ueber einige lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Von

Dr. LOHNSTEIN

in Hamburg.

---

Hat die determinirende Fundamentalgleichung, welche zu einem in leicht verständlicher Bezeichnung „regulären“ singulären Punkt einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung gehört, eine Doppelwurzel  $r$ , so gehören zu dem singulären Punkte bekanntlich zwei Fundamentalintegrale

$$1) \quad y_1 = x^r \mathfrak{P}_1(x), \quad y_2 = y_1 \log x + x^r \mathfrak{P}_2(x).$$

Es ist ferner bekannt, dass man durch eine einfache Transformation die Gleichung immer so umformen kann, dass  $r=0$  ist (vergl. z. B. die Diss. von Herrn Heffter, Berl. 1886). Denken wir uns diese Transformation vorgenommen, so sind die beiden Integrale von der Form

$$2) \quad y_1 = \mathfrak{P}_1(x), \quad y_2 = y_1 \log x + \mathfrak{P}_2(x).$$

Es kommt nun darauf an, nachdem die Reihe  $\mathfrak{P}_1(x)$  gefunden ist, die Reihe  $\mathfrak{P}_2(x)$  möglichst einfach herzuleiten, und ich will im Folgenden zunächst an zwei einfachen bekannten Beispielen ein hierzu geeignetes Verfahren angeben.

Ich betrachte erstens die bekannte Gleichung

$$3) \quad y^{(2)} + \frac{2n}{x} y' - m^2 y = 0.$$

Ihr genügt in der Umgebung der Stelle  $x=0$  die Potenzreihe

$$4) \quad y_1 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m^{2k} x^{2k}}{2 \cdot 4 \dots 2k (2n+1) (2n+3) \dots (2n+2k-1)}.$$

Ihr zweites Integral hat bekanntlich die Form

$$5) \quad y_2 = x^{1-2n} \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m^{2k} x^{2k}}{2 \cdot 4 \dots 2k (3-2n) (5-2n) \dots (2k+1-2n)} \right).$$

Für  $n = \frac{1}{2}$  werden die beiden Ausdrücke identisch; es erhalten beide Wurzeln der zu  $x=0$  gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung den Werth Null und an die Stelle von  $y$ , tritt ein logarithmisches Supplementintegral. Um dieses zu finden, setzen wir in Gleichung 3), nachdem wir  $n = \frac{1}{2}$  gemacht haben,  $y = y_1 \log x + z$ , so genügt  $z$  der Differentialgleichung mit rechter Seite

$$6) \quad \frac{dz^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dz}{dx} - m^2 z = -\frac{2}{x} \left( \frac{dy_1}{dx} \right)_{n=\frac{1}{2}}.$$

Andererseits genügt für beliebige Werthe von  $n$  die Function  $u = \frac{\partial y_1}{\partial n}$  ebenfalls einer Differentialgleichung mit rechter Seite; nämlich

$$7) \quad \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial y_1}{\partial n} \right) + \frac{2n}{x} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial y_1}{\partial n} \right) - m^2 \left( \frac{\partial y_1}{\partial n} \right) = -\frac{2}{x} \left( \frac{dy_1}{dx} \right),$$

worin  $\frac{dy_1}{dx}$  die Ableitung der Reihe (4) bedeutet. Für  $n = \frac{1}{2}$  sei  $\left( \frac{\partial y_1}{\partial n} \right)_{n=\frac{1}{2}} = u_0$ ; so gilt für  $u_0$  die Differentialgleichung

$$8) \quad \frac{du_0}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{du_0}{dx} - m^2 u_0 = -\frac{2}{x} \left( \frac{dy_1}{dx} \right)_{n=\frac{1}{2}},$$

d. h. dieselbe wie 6). Daher ist

$$9) \quad z = \mathfrak{P}_2(x) = \left( \frac{\partial y_1}{\partial n} \right)_{n=\frac{1}{2}} + \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2,$$

worin  $y_1, y_2$  zwei linear unabhängige Particularintegrale der Gleichung  $y^{(2)} + \frac{1}{x} y' - m^2 y = 0$ , und  $\gamma_1, \gamma_2$  zu bestimmende Constanten bedeuten. Für  $y_1$  und  $y_2$  kann man die beiden zu  $x=0$  gehörigen Fundamentalintegrale nehmen. Ferner kann man immer annehmen, dass für  $x=0$   $z_2 = \mathfrak{P}_2(x)$  verschwindet. Daraus ergibt sich  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ , und somit

$$10) \quad z = \mathfrak{P}_2(x) = \left( \frac{\partial y_1}{\partial n} \right)_{n=\frac{1}{2}}.$$

Setzt man

$$11) \quad (2n+1)(2n+3)\dots(2n+2k-1) = \varphi_k(n),$$

so wird die Reihe 4)

$$y_1 = 1 + \sum \frac{m^{2k} x^{2k}}{2.4\dots 2k} \frac{1}{\varphi_k(n)},$$

daher

$$12) \quad \frac{\partial y_1}{\partial n} = - \sum \frac{m^{2k} x^{2k}}{2.4\dots 2k} \frac{\varphi_k'(n)}{\varphi_k(n)^2}.$$

Ferner ist  $\varphi_k\left(\frac{1}{2}\right) = 2.4\dots 2k$ , also

$$13) \quad \left( \frac{\partial y_1}{\partial n} \right)_{n=\frac{1}{2}} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m^{2k} x^{2k}}{(2.4\dots 2k)^2} \varphi_k'\left(\frac{1}{2}\right) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m^{2k} x^{2k}}{(2.4\dots 2k)^2} \frac{\varphi_k'\left(\frac{1}{2}\right)}{\varphi_k\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

Da nun

$$14) \quad \frac{\varphi_k'(n)}{\varphi_k(n)} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \cdots \frac{1}{2n+2k-1},$$

so wird

$$15) \quad z = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m^{2k} x^{2k}}{(2 \cdot 4 \dots 2k)^2} \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{k} \right),$$

und wir erhalten die beiden Integrale

$$16) \quad y_1 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m^{2k} x^{2k}}{(2 \cdot 4 \dots 2k)^2}, \quad y_2 = y_1 \log x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m^{2k} x^{2k}}{(2 \cdot 4 \dots 2k)^2} \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{k} \right).$$

In analoger Weise kann man die Differentialgleichung

$$17) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2x-1}{x(x-1)} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{4} \frac{1}{x(x-1)} y = 0$$

behandeln, welcher bekanntlich die Moduln des elliptischen Integrals erster Gattung Genüge leisten. Hier haben wir für den singulären Punkt  $x=0$  bekanntermaassen

$$18) \quad y_1 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1 \cdot 3 \dots 2k-1}{2 \cdot 4 \dots 2k} \right)^2 x^k,$$

und da die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung gleich sind,

$$19) \quad y_2 = y_1 \log x + \mathfrak{B}_2(x) = y_1 \log x + z,$$

wo  $z$  jetzt der Gleichung mit rechter Seite genügt,

$$20) \quad \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{2x-1}{x(x-1)} \frac{dz}{dx} + \frac{1}{4} \frac{1}{x(x-1)} z = -\frac{2}{x} y_1' - \frac{y_1}{x(x-1)}.$$

Die Gleichung 18) geht aus der folgenden allgemeineren

$$21) \quad \frac{dy^2}{dx^2} + \left( \frac{2r}{x} + \frac{1}{x-1} \right) \frac{dy}{dx} + \frac{r^2}{x(x-1)} y = 0$$

hervor, wenn  $r = \frac{1}{2}$  gesetzt wird. Letztere hat in der Umgebung der Stelle  $x=0$  ein Integral

$$22) \quad y_1(x, r) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(r+k-1)^2 (r+k-2)^2 \dots r^2}{k(k-1) \dots 1 \cdot (2r+k-1)(2r+k-2) \dots 2r} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k \psi_k(r)^2}{k! \varphi_k(r)}.$$

worin 23)

$$(r+k-1)(r+k-2) \dots r = \psi_k(r), \quad (2r+k-1)(2r+k-2) \dots 2r = \varphi_k(r)$$

ist.  $n = \frac{\partial y_1}{\partial r}$  genügt der Gleichung

$$24) \quad \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial y_1}{\partial r} \right) + \left( \frac{2r}{x} + \frac{1}{x-1} \right) \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial y_1}{\partial r} \right) + \frac{r^2}{x(x-1)} \frac{\partial y_1}{\partial r} = -\frac{2}{x} \frac{dy_1}{dx} - \frac{2r}{x(x-1)} y_1.$$

Für  $r = \frac{1}{2}$  wird, wenn  $u_0 = \left(\frac{\partial y_1}{\partial r}\right)_{r=\frac{1}{2}}$  gesetzt wird,

$$25) \quad \frac{du^2}{dx^2} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}\right) \frac{du}{dx} + \frac{1}{4x(x-1)} u = -\frac{2}{x} y_1' - \frac{y_1}{x(x-1)},$$

d. h. identisch mit 20). Daraus folgt, ebenso wie im ersten Beispiel, dass

$$\text{ist. Nun ist} \quad z = \mathfrak{P}_2(x) = \left(\frac{\partial y_1}{\partial r}\right)_{r=\frac{1}{2}}$$

$$26) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial y_1}{\partial r} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{2\psi_k(r)\psi_k'(r)\varphi_k'(r) - \varphi_k'(r)\psi_k(r)^2}{\varphi_k(r)^2} x^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \frac{\psi_k'(r)^2}{\varphi_k(r)} \left(2\frac{\psi_k'(r)}{\psi_k(r)} - \frac{\varphi_k'(r)}{\varphi_k(r)}\right) \\ \frac{\psi_k'(r)}{\psi_k(r)} &= \frac{1}{r+k-1} + \frac{1}{r+k-2} + \dots + \frac{1}{r} \\ \frac{\varphi_k'(r)}{\varphi_k(r)} &= 2\left(\frac{1}{2r+k-1} + \frac{1}{2r+k-2} + \dots + \frac{1}{2r}\right) \\ \frac{2\psi_k'(r)}{\psi_k(r)} - \frac{\varphi_k'(r)}{\varphi_k(r)} &= 2\left(\frac{1}{r+k-1} + \frac{1}{r+k-2} + \dots + \frac{1}{r} - \frac{1}{2r+k-1} - \frac{1}{2r+k-2} - \dots - \frac{1}{2r}\right), \\ &\quad \text{also für } r = \frac{1}{2}, \\ \frac{2\psi_k'(\frac{1}{2})}{\psi_k(\frac{1}{2})} - \frac{\varphi_k'(\frac{1}{2})}{\varphi_k(\frac{1}{2})} &= 4\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) \\ &= 4\left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(2k-1)2k}\right) \\ \frac{\psi_k(\frac{1}{2})^2}{\varphi_k(r)} &= \frac{1}{2^{2k}} \cdot \frac{[(2k-1)(2k-3)\dots 1]^2}{k!}, \end{aligned} \right.$$

also schliesslich

$$27) \quad \left(\frac{\partial y_1}{\partial r}\right)_{r=\frac{1}{2}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \dots 2k-1}{2 \cdot 4 \dots 2k}\right)^2 \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(2k-1)2k}\right) x^k,$$

somit

$$28) \quad \left\{ \begin{aligned} y_1 &= 1 + \sum \left(\frac{1 \cdot 3 \dots 2k-1}{2 \cdot 4 \dots 2k}\right)^2 x^k, \\ y_2 &= y_1 \log x + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \dots 2k-1}{2 \cdot 4 \dots 2k}\right)^2 \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(2k-1)2k}\right) x^k. \end{aligned} \right.$$

Wie nunmehr gezeigt werden soll, kann man die vorstehenden Resultate auf lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung überhaupt ausdehnen, deren Integrale sich überall regulär verhalten. Solche haben bekanntlich die Form:

$$1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{A(x)}{\psi(x)} \frac{dy}{dx} + \frac{B(x)}{\psi(x)^2} y = 0,$$

wenn  $\psi(x) = \prod_{i=1}^n (x - a_i)$ ;  $A(x)$ ,  $B(x)$  ganze Functionen beziehentlich des

Grades  $n - 1$  und  $2n - 2$  sind, wobei  $a_1, a_2 \dots a_n$  die singulären Punkte der Differentialgleichung bezeichnen. Ferner kann man, aus der vorstehenden Differentialgleichung immer solche zugehörige von der Form

$$2) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{A_1(x)}{\psi(x)} \frac{dy}{dx} + \frac{B_1(x)}{\psi(x)} y = 0$$

herleiten, worin  $A_1(x)$  wieder eine Function  $n - 1^{\text{ten}}$  Grades,  $B_1(x)$  eine solche  $n - 2^{\text{ten}}$  Grades bezeichnet. Diese Form der Gleichung hat bekanntermaassen die besondere Eigenschaft, dass für jeden der im Endlichen befindlichen singulären Punkte eine der Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung den Werth Null hat. Wir bringen nun die Gleichung auf die Form

$$3) \quad 0 = \frac{d^2 y}{dx^2} + \left( \frac{\gamma_1}{x - a_1} + \frac{\gamma_2}{x - a_2} + \dots + \frac{\gamma_n}{x - a_n} \right) \frac{dy}{dx} + \left( \frac{\delta_1}{x - a_1} + \frac{\delta_2}{x - a_2} + \dots + \frac{\delta_n}{x - a_n} \right) y.$$

Hierbei genügen die Grössen  $\delta_i$  der Bedingung  $\sum \delta_i = 0$ . Eine der singulären Stellen legen wir in den Nullpunkt und schreiben also die Gleichung in der Form

$$4) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \left( \frac{\gamma}{x} + \frac{\gamma_1}{x - a_1} + \dots + \frac{\gamma_{n-1}}{x - a_{n-1}} \right) \frac{dy}{dx} + \left( \frac{\delta}{x} + \frac{\delta_1}{x - a_1} + \dots + \frac{\delta_{n-1}}{x - a_{n-1}} \right) y = 0,$$

oder:

$$5) \quad 0 = \frac{d^2 y}{dx^2} + \left( \frac{\gamma}{x} + \frac{\gamma_1}{x - a_1} + \dots + \frac{\gamma_{n-1}}{x - a_{n-1}} \right) \frac{dy}{dx} + \left( \frac{\delta_1}{x(x - a_1)} + \frac{\delta_2}{x(x - a_2)} + \dots + \frac{\delta_{n-1}}{x(x - a_{n-1})} \right) y,$$

wobei wir  $\delta_i a_i$  durch  $\delta_i$  ersetzt haben. Es genügt nun, den singulären Punkt  $x = 0$  zu betrachten, da wir durch eine Transformation in jedem Falle den singulären Punkt, um den es sich gerade handelt, zum Nullpunkte machen können. Damit für  $x = 0$  beide Wurzeln der determinirenden Gleichung  $= 0$  sind, muss  $\gamma = 1$  sein. Die Gleichung ist alsdann

$$6) \quad 0 = y^{(2)} + \left( \frac{1}{x} + \frac{\gamma_1}{x - a_1} + \dots + \frac{\gamma_{n-1}}{x - a_{n-1}} \right) y' + \left( \frac{\delta_1}{x(x - a_1)} + \frac{\delta_2}{x(x - a_2)} + \dots + \frac{\delta_{n-1}}{x(x - a_{n-1})} \right) y.$$

Setzt man  $y = y_1 \log x + z$ , so hat man für  $z$  die Gleichung

$$7) \quad \begin{cases} z^{(2)} + \left( \frac{1}{x} + \frac{\gamma}{x - a_1} + \dots + \frac{\gamma_{n-1}}{x - a_{n-1}} \right) z' + \left( \frac{\delta_1}{x(x - a_1)} + \frac{\delta_2}{x(x - a_2)} + \dots + \frac{\delta_{n-1}}{x(x - a_{n-1})} \right) z \\ + \frac{2}{x} y_1' + \frac{y_1}{x} \left( \frac{\gamma_1}{x - a_1} + \frac{\gamma_2}{x - a_2} + \dots + \frac{\gamma_{n-1}}{x - a_{n-1}} \right) = 0. \end{cases}$$

Hierbei bedeutet  $y_1$  die Potenzreihe von  $x$ , welche der Differentialgleichung genügt. Es kommt nunmehr darauf an, eine neue, von einem

Parameter  $\lambda$  abhängige Differentialgleichung derart zu bilden, dass die Gleichung, welche dann für  $\frac{\partial y_1}{\partial \lambda}$  resultirt, für einen beliebig gewählten Werth von  $\lambda_1$ , am einfachsten  $\lambda = 0$ , mit 7) übereinstimmt. Dieser Bedingung genügt man durch die Gleichung

$$8) \quad \left\{ \begin{aligned} & y^{(2)} + \left( \frac{1+2\lambda}{x} + \frac{\gamma_1}{x-a_1} + \dots + \frac{\gamma_{n-1}}{x-a_{n-1}} \right) y' \\ & + \left( \frac{\lambda^2 + \lambda\gamma_1 + \delta_1}{x(x-a_1)} + \frac{\lambda^2 + \lambda\gamma_2 + \delta_2}{x(x-a_2)} + \dots + \frac{\lambda^2 + \lambda\gamma_{n-1} + \delta_{n-1}}{x(x-a_{n-1})} \right) y = 0. \end{aligned} \right.$$

In der That,  $u = \frac{\partial y_1}{\partial \lambda}$  genügt der Gleichung

$$9) \quad \left\{ \begin{aligned} & u^{(2)} + \left( \frac{1+2\lambda}{x} + \frac{\gamma_1}{x-a_1} + \dots + \frac{\gamma_{n-1}}{x-a_{n-1}} \right) u' \\ & + \left( \frac{\lambda^2 + \lambda\gamma_1 + \delta_1}{x(x-a_1)} + \frac{\lambda^2 + \lambda\gamma_2 + \delta_2}{x(x-a_2)} + \dots + \frac{\lambda^2 + \lambda\gamma_{n-1} + \delta_{n-1}}{x(x-a_n)} \right) u \\ & + \frac{2}{x} y_1' + \left( \frac{2\lambda + \gamma_1}{x(x-a_1)} + \frac{2\lambda + \gamma_2}{x(x-a_2)} + \dots + \frac{2\lambda + \gamma_{n-1}}{x(x-a_{n-1})} \right) y_1 = 0 \end{aligned} \right.$$

und man erkennt, dass für  $\lambda = 0$  9) mit 7) und 8) mit 6) identisch wird. Man kann also unmittelbar  $z = \left( \frac{\partial y_1}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=0}$  setzen, d. h. man erhält das zweite Integral  $y_2 = y_1 \log x + z$  durch einen höchst einfachen Differentiationsprozess aus dem ersten  $y_1$ . Wesentlich dabei ist allerdings die Normalform 5), auf welche die Gleichung gebracht werden muss und die sich als naturgemässe Verallgemeinerung der Normalform der Differentialgleichung der Gauss'schen Reihe — wenigstens für die vorliegende Frage — ergibt. Für  $n = \lambda$ ,  $a_1 = 1$ ,  $\alpha + \beta + 1 - \gamma = \gamma_1$ ,  $\alpha\beta = \delta_1$  wird nämlich 5)

$$10) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \left( \frac{\gamma}{x} + \frac{\alpha + \beta + 1 - \gamma}{x-1} \right) \frac{dy}{dx} + \frac{\alpha\beta}{x(x-1)} y = 0.$$

Für  $x = 0$  hat die determinirende Gleichung eine Doppelwurzel Null, von  $\gamma = 1$  dann wird die Gleichung

$$11) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \left( \frac{1}{x} + \frac{\alpha + \beta}{x-1} \right) \frac{dy}{dx} + \frac{\alpha\beta}{x(x-1)} y = 0.$$

Die zugehörige Gleichung mit dem Parameter  $\lambda$  ist also

$$12) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \left( \frac{1+2\lambda}{x} + \frac{\alpha + \beta}{x-1} \right) \frac{dy}{dx} + \frac{\lambda^2 + (\alpha + \beta)\lambda + \alpha\beta}{x(x-1)} y = 0$$

oder

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left( \frac{1+2\lambda}{x} + \frac{\alpha + \beta}{x-1} \right) \frac{dy}{dx} + \frac{(\alpha + \lambda)(\beta + \lambda)}{x(x-1)} y = 0.$$

Ist  $(\alpha, n) = \alpha(\alpha + 1) \dots (\alpha + n - 1)$ , so ist

$$y_1(x, \lambda) = 1 + \sum_1^{\infty} k \frac{(\alpha + \lambda, k)(\beta + \lambda, k)}{k!(1 + 2\lambda, k)} x^k,$$

also

$$= \left( \frac{\partial y_1}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=0} = \sum_1^{\infty} k \frac{(\alpha, k)(\beta, k)}{k! k!} \left[ \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+1} + \dots + \frac{1}{\alpha+k-1} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta+1} + \dots + \frac{1}{\beta+k-1} - 2 \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} \right) \right] x^k$$

In dem obigen Specialfalle  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\beta = \frac{1}{2}$ , ist  $r$  durch  $\frac{1}{2} + \lambda$  zu ersetzen, um die dortige Behandlung der allgemeinen conform zu machen.

In dem Coefficient von  $y$  in der Gleichung 8) ist übrigens das Glied  $\lambda^2$  nicht nothwendig; es ist nur darum hier angefügt, weil dann für den Specialfall der Gauss'schen Reihe  $\alpha, \beta$  einfach bei Anwendung der Methode in  $\alpha + \lambda, \beta + \lambda$  übergehen.

#### IV.

### Ueber eine besondere, mit dem Kegelschnittbüschel in Verbindung stehende Curve.

Von

BENEDICT SPORER.

---

Hierzu Tafel I Figur 1—5.

---

1. Durch irgend vier Punkte  $p$  ist ein Büschel von Kegelschnitten  $B(C^2)$  bestimmt, welche alle durch die vier Punkte  $p$  gehen, und zwar sind die Kegelschnitte  $C^2$  so beschaffen, dass durch jeden Punkt  $q$  der Ebene ein einziger Kegelschnitt  $C^2$  geht und jede Gerade  $G$  von zwei solchen Kegelschnitten berührt wird. Lassen wir den Punkt  $q$  sich auf der Geraden  $G$  bewegen und denken wir uns durch jeden dieser Punkte  $q$  auf  $G$  den dem Büschel angehörigen Kegelschnitt  $C^2$  gelegt, so werden alle möglichen Kegelschnitte des Büschels gebildet werden und zwar wird jeder dieser Kegelschnitte doppelt auftreten, entsprechend den zwei Schnittpunkten, welche er mit  $G$  gemein hat. Denken wir uns ferner an jeden dieser Kegelschnitte  $C^2$  in den zwei Punkten  $q$ , die er mit  $G$  gemein hat, die Tangenten  $T$  gezogen, so werden alle diese Tangenten eine bestimmte Curve umhüllen. Um deren Classe zu erhalten, können wir wie folgt verfahren: Durch jeden Punkt  $q$  der Geraden  $G$  geht nur ein einziger Kegelschnitt  $C^2$  und also auch nur eine einzige Tangente  $T$ , die von  $G$  verschieden ist. Unter den Kegelschnitten des Büschels sind aber zwei solche,  $C_0^2$ , welche  $G$  selbst zur Tangente haben und für jeden dieser Kegelschnitte fällt  $T$  mit  $G$  zusammen. Durch jeden Punkt  $q$  auf  $G$  gehen also drei Gerade  $T$ , von denen jedoch nur eine einzige nicht auf  $G$  zu liegen kommt, während mit den zwei anderen dies der Fall ist; oder:

Der Ort der Geraden  $T$  ist eine Curve der dritten Classe,  $T_3^3$ , welche  $G$  zur Doppeltangente hat.

Diese auch weiter unten immer wieder auftretende Curve wollen wir die „Grundcurve des Büschels  $B(C^2)$  und der Geraden  $G$ “ heissen. Da sie von der dritten Classe ist und eine Doppeltangente besitzt, ist sie vom vierten Grade, hat also mit  $G$ , ausser ihren Berührungspunkten, keinen weiteren Punkt gemein; zudem hat sie drei Rückkehrpunkte.





Anstatt dass wir von beliebigen Geraden  $aa_1$ ,  $bb_1$  und  $cc_1$  ausgehen, können wir weiter auch drei Geraden wählen, welche den zerfallenden Kegelschnitten des Büschels angehören. Die Berührungspunkte  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$  dieser Geraden theilen mit der Geraden  $G$  die auf ihnen liegenden Grundpunkte des Büschels harmonisch (als Doppelpunkte einer Involution).

4. Bevor wir in der Untersuchung der Grundcurve und ihrer Eigenschaften weiter gehen, wollen wir eine andere Frage erledigen. Auf jeder Tangente der Grundcurve liegen, wie wir sahen, zwei Punkte  $a$  und  $a_1$ . Alle Punkte  $a$  sind auf der Geraden  $G$  gelegen; die ihnen zugeordneten Punkte  $a_1$  werden dagegen auf irgend einer bestimmten Curve gelegen sein und es fragt sich nun: welche Curve ist dies und welche Eigenschaften besitzt sie in Bezug auf das Büschel und die dabei auftretenden Curven?

Es sei irgend eine zweite Gerade  $H$  gezogen und zu derselben die zu ihr und dem Büschel gehörige Grundcurve  $H_2^3$  bestimmt. Diese letztere hat mit der Grundcurve der Geraden  $G$ , also mit  $T_2^3$ , neun Tangenten gemein. Diese setzen sich zusammen aus

- $\alpha$ ) den sechs Seiten des Vierecks der Grundpunkte,
- $\beta$ ) einer gemeinsamen Tangente durch den Schnittpunkt von  $G$  und  $H$ , und aus
- $\gamma$ ) zwei weiteren Tangenten  $aa_1$  und  $bb_1$ , welche auf der Geraden  $H$  zwei solche Punkte bestimmen, die mit den Schnitten dieser Tangenten mit  $G$  conjugirte Punktepaare  $aa_1$ ,  $bb_1$  bilden. Auf jeder Geraden  $H$  liegen also zwei Punkte, die Punkten von  $G$  conjugirt sind; oder:

Der Ort der den Punkten  $a$  auf  $G$  zugeordneten Punkte  $a_1$  ist ein Kegelschnitt,  $G^2$ , den wir den, der Geraden  $G$  in Bezug auf das Büschel conjugirten Kegelschnitt heissen wollen.\*

5. Die weiteren Untersuchungen, die sich an die Grundcurve anschliessen, wollen wir auf den besondern Fall beschränken, wo die zur Grundcurve gehörige Gerade  $G$  die unendlich ferne Gerade,  $G_\infty$ , der Ebene ist. Die Eigenschaften der Grundcurve einer beliebigen Geraden ergeben sich dann durch Projection in einfacher Weise.

Die obigen Resultate gehen jetzt über in folgende Sätze:

Die Asymptoten aller Kegelschnitte eines Büschels umhüllen eine Curve dritter Classe,  $T_2^3$ , welche die unendlich ferne Gerade zur Doppeltangente hat, nämlich die Grundcurve des Büschels und der unendlich fernen Geraden. (563.)\*\*

\* Vergl. Schröter, Theorie der Kegelschnitte gest. auf proj. Eigenschaften, Seite 301, und Durège, Curven dritter Ordnung, Seite 122.

\*\* Die in Klammern beigefügten Zahlen verweisen auf Steiner's ges. Werke Bd. 2, und sind dort Seitenzahlen.

Und:

Der der unendlich fernen Geraden  $G_\infty$  conjugirte Kegelschnitt  $G^2$  geht durch die Halbirungspunkte der sechs Seiten des Vierecks der Grundpunkte des Büschels Kegelschnitte und ist somit der Ort der Mittelpunkte dieser Kegelschnitte, und allgemein ist der conjugirte Kegelschnitt irgend einer Geraden in Bezug auf ein Büschel von Kegelschnitten der Ort des Pols der Geraden in Bezug auf jeden einzelnen Kegelschnitt des Büschels.

Alle Kegelschnitte des Büschels bestimmen auf einer Geraden eine involutorische Punktreihe; ist die Gerade Asymptote eines einzelnen Kegelschnittes des Büschels, so ist einer der Doppelpunkte der Involution unendlich ferne gelegen und die Kegelschnitte bestimmen auf dieser Asymptote je zwei Punkte  $q$ , so dass die von ihnen begrenzte Strecke eine feste Mitte hat. Wir können daher die obige Curve auch als geometrischen Ort derjenigen Transversale zweier Kegelschnitte des Büschels ansehen, welche mit denselben zwei Sehnen gemein hat, welche dieselbe Mitte haben, oder:

Bestimmt eine Gerade  $S_2$  mit zwei Kegelschnitten solche Sehnen  $ab$  und  $cd$ , dass dieselben die gleiche Mitte  $P$  haben, so ist der Ort der Mitte  $P$  der, der unendlich fernen Geraden  $G_\infty$  zugeordnete Kegelschnitt  $G^2$  und der Ort der Sehne  $S_2$  ist die Grundcurve der Geraden  $G_\infty$  und des Büschels, das durch die beiden Kegelschnitte bestimmt ist. (549.)

Dieser letztere Satz gestattet auch eine einfache Construction des Berührungspunktes jeder Asymptote  $S_2$  mit ihrem Orte. Zunächst können wir jeden der beiden Kegelschnitte durch deren Asymptoten ersetzen, indem auch diese auf der Transversale Abschnitte bestimmen, welche dieselbe Mitte  $P$  haben, oder wir können an Stelle des Kegelschnittbüschels selbst ein anderes setzen, indem wir die Asymptotenpaare irgend zweier Kegelschnitte desselben als zerfallende Kegelschnitte eines neuen Büschels ansehen.

Dieses letztere Büschel hat dann dieselbe Grundcurve  $T_2^3$  und denselben conjugirten Kegelschnitt  $G^2$  in Bezug auf die Gerade  $G_\infty$ . Durch zwei Asymptotenpaare ist aber noch ein drittes solches Paar bestimmt, nämlich dasjenige, welches mit den ersten zwei Paaren ein vollständiges Viereck derart bildet, dass jedes Paar aus zwei Gegenseiten derselben besteht, oder aber das der dritte zerfallende Kegelschnitt des Büschels ist. Jeder Kegelschnitt des letzteren bestimmt weiter auf jeder Geraden, also auch auf jeder Asymptote  $A$  selbst eine Involution. Ebenso bilden alle Asymptotenpaare dieser Kegelschnitte auf einer beliebigen Asymptote  $A$  eine Involution, von welcher ein Doppelpunkt auf  $G_\infty$  gelegen ist, d. h. sie bestimmen auf der beliebig gewählten festen Asymptote  $A$  lauter Abschnitte mit derselben Mitte  $P$ . Dies thun namentlich auch die Asymp-

toten eines Kegelschnittes  $C^2$ , die aus  $A$  und der ihr zugehörigen Asymptote bestehen, d. h. wir können schliessen:

Der Berührungspunkt einer Asymptote mit ihrer Ortscurve  $T_2^3$  ist so gelegen, dass der conjugirte Punkt  $P$  gerade die Mitte zwischen ihm und dem anderen Schnitte der Geraden mit dem Kegelschnitte  $G^2$  ist.

Und allgemeiner:

Der Berührungspunkt der Tangente der Grundcurve  $T_2^3$  einer Geraden  $G$  und der zweite Schnitt derselben mit dem conjugirten Kegelschnitte  $G^2$  trennen die Punkte  $a$  und  $a_1$ , in denen die Tangente von einzelnen Kegelschnitten des Büschels berührt wird, harmonisch.

6. Die von uns gegebene Definition des conjugirten Kegelschnittes gestattet noch eine weitere Entstehungsart der Grundcurve; wir haben nämlich sofort:

Ziehen wir in jedem Punkte des Kegelschnittes  $G^2$  an den durch den Punkt gehenden Kegelschnitt  $C^2$  des Büschels eine Tangente, so ist der Ort dieser Tangente eben die obige Grundcurve  $T_2^3$ . (550.)

Die Grundcurve  $T_2^3$  hat mit dem Kegelschnitte  $G^2$  sechs Tangenten gemein; es giebt somit unter allen Kegelschnitten des Büschels auch allemal sechs solche, welche den Kegelschnitt  $G^2$  berühren (ausser den drei zerfallenden Kegelschnitten desselben).

Aus der oben angegebenen Construction des Berührungspunktes einer Tangente der  $T_2^3$  folgt aber, dass für diesen Fall die Curven  $T_2^3$  und  $G^2$  sich selbst berühren, oder mit anderen Worten, dass diese sechs Tangenten und also auch diese sechs Kegelschnitte zu je zwei vereinigt sind, oder:

Unter den Kegelschnitten des Büschels giebt es insbesondere auch drei solche, nicht zerfallende, welche die Curve  $G^2$  in  $x$ , resp.  $y$ ,  $z$  berühren; in denselben Punkten  $x$ ,  $y$ ,  $z$  wird die Curve  $G^2$  auch von der Grundcurve selbst berührt.

7. Um zu weiteren Eigenschaften zu gelangen, wollen wir die noch speciellere Annahme machen, das Büschel der Kegelschnitte sei aus lauter gleichseitigen Hyperbeln zusammengesetzt, oder die Grundpunkte haben die besondere Eigenschaft, dass jeder derselben Höhengschnitt des Dreiecks der übrigen ist. Alle Kegelschnitte  $C^2$  des Büschels  $B(C^2)$  sind dann nothwendig gleichseitige Hyperbeln. Ziehen wir nämlich durch einen Punkt parallele Geraden mit den Asymptoten der Kegelschnitte, so bilden diese Geradenpaare ein involutorisches Büschel, das mit der von den Curven  $C^2$  auf  $G_\infty$  bestimmten involutorischen Punktreihe perspectivisch ist. Da die drei zerfallenden Kegelschnitte aus zu einander senkrechten Geradenpaaren



Geschwindigkeit des anderen  $q$ ; die Gerade  $gq$  wird dann die obige Grundcurve umhüllen. (646.)

Und:

Wird von den über den Seiten des Dreiecks liegenden Bogen des Kreises  $G^2$ , von den Mitten der Seiten aus mittelst der Punkte  $x, y, z$  je ein Drittel abgeschnitten, so theilen diese die ganze Kreislinie in drei gleiche Theile, oder diese drei Punkte bilden ein gleichseitiges Dreieck. Die Grundcurve hat nun die besondere Eigenschaft, dass sie den Kreis  $G^2$  in diesen Punkten  $x, y, z$  berührt (643), indem für diese Punkte die Gerade  $gq$  zur Tangente des Kreises und zur Tangente der Grundcurve wird, und nach 6. die beiden Curven auf der Tangente denselben Berührungspunkt haben. (642.)

9. Es sind weiter nur Folgerungen aus oben bereits allgemeiner ausgesprochenen Sätzen, wenn wir sagen:

Die Geraden  $G$  sind paarweise senkrecht auf einander, und jedes solche Paar von Geraden  $G$  sind Asymptoten einer gleichseitigen Hyperbel, die durch die Ecken und den Höhenschnitt des Dreiecks  $p_1 p_2 p_3$  geht und der Ort des Scheitels dieser Geradenpaare ist der Feuerbach'sche Kreis des Dreiecks. Der Curve lassen sich ferner unendlich viele solche Dreiecke umschreiben, deren Seiten und Höhen alle die Grundcurve  $T_2^3$  berühren, jede zwei Paare senkrechter Geraden  $G$  bestimmen nämlich ein solches Dreieck, indem dadurch allemal ein drittes Paar Asymptoten bestimmt ist. Die Fusspunkte der Höhen aller dieser Dreiecke liegen auf einem Kreise. (642.)

Schneidet  $G$  den Kreis  $G^2$  ausser in  $q$  noch in  $g$ , so ist  $q$  auch die Mitte des Stücks der Asymptote zwischen  $g$  und ihrem Berührungspunkte  $m$  mit  $T_2^3$ . Bedenken wir, dass die in  $g$  errichtete Senkrechte auf  $gq$  die zu  $gq$  gehörige zweite Asymptote ist, also mit  $gq$  zusammen ein Paar  $G$  und  $G_1$  von Asymptoten bildet, und dass diese auf dem Kreise einen weiteren Punkt  $q_1$  bestimmt, sodass  $qq_1$  Durchmesser von  $G^2$  wird, so folgt für die Verbindungslinie der Berührungspunkte  $m$  und  $m_1$  eines Paares von Geraden  $G$  und  $G_1$  mit  $T_2^3$ :

Die Verbindungslinie der Berührungspunkte  $m$  und  $m_1$  eines Paares senkrechter Geraden  $G$  und  $G_1$  ist von constanter Länge, nämlich gleich dem doppelten Durchmesser des Kreises  $G^2$ . (642.)

Ausserdem haben wir gesehen, dass irgend zwei Paare von Asymptoten, also hier von senkrechter Geraden  $G$ , ein der Curve umschriebenes vollständiges Viereck bestimmen, indem jedes Paar zusammengehöriger Asymptoten ein Paar Gegenseiten ist. Lassen wir zwei Paare senkrechter Geraden  $G$  zusammenfallen, so folgt daraus:















f)  $D_1x_3$ ,  $D_2x_1$  und  $D_3x_2$  gehen durch die Punkte, in denen die Curve  $T_2^3$  von ihren Rückkehrtangenteu ausser in den Rückkehrpunkten selbst geschnitten wird.

g) Die Tangenteu in den Ecken des Dreiecks  $A_1A_2A_3$  an den Kegelschnitt  $K^2$  bilden ein Dreieck, dessen Ecken mit den Rückkehrpunkten und den Berührungspunkten der Doppeltangente der Curve  $T_2^3$  auf einem Kegelschnitte gelegen sind. Auf demselben Kegelschnitte liegen auch die Ecken der Dreiecke, deren Seiten den Kegelschnitt  $K^2$  in den Punkten  $B_1, B_2, B_3$  und in den Punkten  $D_1, D_2, D_3$  berühren.

Die Seiten des Dreiecks  $C_1C_2C_3$  schneiden weiter die Verlängerungen der Seiten des Dreiecks  $x_1x_2x_3$  in drei Punkten  $N_1, N_2, N_3$ , die auf der Doppeltangente der Curve  $T_2^3$  gelegen sind. Ueber diese Gerade und namentlich die obigen Punkte  $N$  lassen sich ebenso eine Reihe von Sätzen aufstellen. Ist ferner die Curve  $T_2^3$  so beschaffen, dass die Doppeltangente derselben mit der unendlich fernen Geraden zusammenfällt, so tritt noch eine Reihe von metrischen Beziehungen dazu, so ist z. B. für diesen Fall allemal

$$\Delta A_1 A_2 A_3 = \Delta B_1 B_2 B_3 = \frac{1}{4} \Delta x_1 x_2 x_3$$

u. s. w.

Zum Schlusse brauchen wir kaum zu erwähnen, dass aus den hier entwickelten Eigenschaften der behandelten Curve sich für eine Curve dritten Grades mit Doppelpunkt, resp. isolirtem Doppelpunkte, entsprechende Resultate ohne Weiteres ableiten lassen.

Stuttgart, im Mai 1892.

## Kleinere Mittheilungen.

---

### I. Theorie und Versuche über hydraulischen Druck.

§ 1. Lässt man Wasser aus einem offenen Gefässe durch ein genügend langes und enges Rohr ausströmen und sind an dem letzteren verticale (oben offene) Manometer-Röhren angebracht, so zeigen dieselben (unter günstigen Verhältnissen) einen vom Gefässe gegen die Ausflussöffnung hin abnehmenden Druck an, so zwar, dass die Oberflächen eine vom Gefäss weg abfallende Gerade bezeichnen.

Dieser Versuch kann, abgesehen von seiner Bedeutung für die Hydrostatik (beziehungsweise Hydraulik), auch typisch genannt werden für den Galvanismus. So hat ihn vorigen Jahres auch F. Braun in seinem hübschen „gemeinverständlichen Experimentalvortrage über elektrische Kraftübertragung und Drehstrom“ benutzt\*; und, um eine ältere Quelle anzuführen, F. Neumann sagte\*\*, dass die dabei zu Grunde liegende „Reibungskraft auch in anderen physikalischen Erscheinungen eine Rolle zu spielen scheint, wie z. B. bei der hydroelektrischen Zersetzung in der galvanischen Kette“. Es erinnert dieser Ausspruch wohl zurück an das Jahr 1827, in welchem Ohm's „galvanische Kette“ erschienen ist.

§ 2. Neumann hat in diesen Vorlesungen sowohl den alten Standpunkt vertreten von Daniell Bernoulli, dessen *Hydrodynamica* vom Jahre 1738 er im § 53 rühmend hervorhebt, als auch „die Bewegung der Flüssigkeiten in engen Röhren, die innere Reibung“ berücksichtigt (im § 58). Sein bedeutendster Schüler Kirchhoff entwickelt in der 26. seiner 30 Vorlesungen über „Mechanik“ dagegen nur vom letzteren Standpunkte aus, und zwar an die allgemeinen Gleichungen anknüpfend, den Werth

$$Q = \pi \cdot \frac{p_0 - p_l}{8 k l} \cdot R^4$$

für das in der Zeit 1 durch die seitliche Röhre  $\pi R^2 l$  ausfliessende Wasservolum, wobei  $p_0$  und  $p_l$  die an den beiden Manometern vom Anfange und

---

\* Tübingen, Laupp. (In dieser Zeitschrift schon Seite 186 erwähnt.)

\*\* *Einleitung in die theoretische Physik*, Vorlesungen von F. Neumann, herausgegeben von Pape. Leipzig, B. G. Teubner. 1883.

Ende der Länge  $l$  abgelesenen Druckgrössen (einschlüssig der Erdbeschleunigung) und  $k$  den Reibungscoefficienten des Wassers bedeutet.

Bezüglich der Dimensionen stellt also  $Q$  vor: Länge in der dritten Potenz durch Zeit in der ersten; die beiden  $p$  sind im Maasse = Gewicht-System die Maasse mal Beschleunigung ( $g$ ) durch Fläche, und so entfällt für  $k$  die Bedeutung im Gramm-Centimeter-Secunden-System

$$\frac{\text{Gramm}}{\text{Centimeter} \cdot \text{Secunde}}.$$

Es ist mir dabei folgende Umformung, im Sinne der im § 1 erwähnten Analogie, eingefallen:

$$Q = \frac{(p_0 - p_l) \pi R^2}{l : c \pi R^2},$$

indem ich  $kc\pi = 1$  einführte. Wie  $Q$  die „Stromstärke“ in beiderlei Vorgängen bedeutet, so ist der ganze Zähler des letzteren Bruches der absolute (nicht mehr auf die Fläche 1 bezogene) wirksame Druck (die motorische Kraft) und der Nenner ist der „Widerstand“,  $c$  die „Leitungsfähigkeit“.

Kirchhoff nennt in dem der obigen Gleichung unmittelbar folgenden Texte  $p_0$  den Druck in der Röhre bei ruhender Flüssigkeit. Dies würde nur gelten, wenn das Manometer an der besagten Anfangsstelle der Röhre wirklich die volle (hydrostatische) Höhe  $H$  auch während des Durchfließens durch die Röhre  $l$  einnähme. Also z. B., wenn die im Eingange des § 1 erwähnte Gerade in der Oberfläche des Gefäßes selbst endete (wie es auch die Figur von F. Braun andeutet) und das Gefäß selbst als das erste Manometer, am Anfange von  $l$ , betrachtet wird. Vergl. § 4 unten.

Ferner nennt Kirchhoff  $p_l$  den Druck der Atmosphäre. Dies gilt für die Ausflussöffnung der Röhre selbst, wo also das betreffende Manometer die Höhe Null zeigen müsste.

Ich werde überhaupt den Luftdruck, der oben in  $p_0$  und  $p_l$  eingerechnet ist, weiterhin nicht mehr einbeziehen, sondern mit  $p$  den betreffenden hydraulischen Flüssigkeitsdruck allein bezeichnen. Dann muss im Kirchhoff'schen Specialfall statt der Differenz  $p_0 - p_l$  kurzweg  $p$  stehen, und im allgemeinen Falle, dass man an irgend zwei um  $l$  von einander entfernten Stellen der Ausflussröhre die Manometer angebracht hat, die Druckdifferenz  $(p_1 - p_2)$  oder  $g(h_1 - h_2)D$ , wenn  $g$  die Erdbeschleunigung,  $h_1, h_2$  die abgelesenen Manometerstände und  $D$  die Maasse der Volum-Einheit bedeuten.

§ 3. Ich werde nun die Gleichung des § 2 ableiten; wenn diese Ableitung auch den elementaren Rahmen überschreitet, so will ich sie doch auf so kurzem Wege, nach dem Vorgange Neumann's, aber noch kürzer, gewinnen, dass man versucht sein könnte, die Ableitung elementar zu machen.

Man setzt bekanntlich die Reibung der Flüssigkeiten für die Flächeneinheit gleich

$$-k \frac{dv}{dy} \cdot 1^2 \frac{\text{Gramm. Centimeter}}{\text{Secunde}^2},$$

wo  $k$  der schon gebrauchte Coefficient,  $v$  Geschwindigkeit und  $y$  die Tiefe bedeutet, nach welcher die Flüssigkeits-Schichten unterschieden werden. Es gehen daraus für  $k$  die Dimensionen hervor wie im § 2.

Auf unser horizontales Ausflussrohr vom Radius  $R$  angewendet, sei  $r$  irgend ein kleinerer Radius. Ein dünner ( $dr$ ) und kurzer ( $dx$ ) Flüssigkeits-Hohlcyylinder reibt sich dann an seiner inneren Fläche mit rascher strömendem Fluidum, wird also beschleunigt durch die Kraft

$$-k \frac{dv}{dr} \cdot 2\pi r dx$$

( $\frac{dv}{dr}$  ist selbst negativ), die ich vorübergehend zur Abkürzung mit  $F$  bezeichne. An der äusseren Mantelfläche dagegen, wo langsamer strömendes Fluidum, wird er verzögert durch

$$F + \frac{dF}{dr} dr,$$

so dass die Verzögerungskraft  $\frac{dF}{dr}$  übrig bleibt.

Die beiden Stirnflächen ( $2\pi r dr$ ) des betrachteten Hohlcyinders erleiden: die dem Gefässe nähere den Druck  $p$ , die entferntere ( $p + \frac{dp}{dx} dx$ ), wo  $\frac{dp}{dx}$  auch negativ ist, für jede Flächeneinheit. Also ist der Ueberdruck auf den Hohlcyylinder

$$-\frac{dp}{dx} dx \cdot 2\pi r dr.$$

Im stationären Zustande, den wir allein betrachten, muss

$$-\frac{dp}{dx} dx \cdot 2\pi r dr = \frac{dF}{dr} dr = -k 2\pi dx \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dx} \right) \cdot dr$$

sein; man erhält also

$$\frac{dp}{dx} = \frac{k}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dx} \right).$$

Da die rechte Seite kein  $x$  enthält, so ergibt sich sogleich das Gesetz der geraden Linie vom Eingange des § 1. Nach  $x$  integrirt und für  $x=0$ , sowie für  $x=l$  die Werthe  $p_1$  und  $p_2$  vom Schlusse des § 2 eingeführt, wird

$$\frac{p_1 - p_2}{l} = -\frac{k}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dx} \right).$$

Die Differenzirung auf der rechten Seite auszuführen, wäre ein Umweg, der überdies noch die zunächst folgende Integration nach  $r$  schwieriger



erscheinen lassen könnte. Mit  $r dr$  multiplicirt und integrirt, wird nämlich sogleich

$$\frac{p_1 - p_2}{l} \cdot \frac{r^2}{2} = -kr \frac{dv}{dr} + A;$$

und mit  $\frac{dr}{r}$  multiplicirt und nochmals integrirt

$$\frac{p_1 - p_2}{l} \cdot \frac{r^2}{4} = -kv + A \log. nat. r + B.$$

Die Constante  $A$  muss Null sein, da sonst für  $r=0$  eine Unzulässigkeit entstände. Die Constante  $B$  ergibt sich bei Flüssigkeiten, welche die innere Röhrenwand benetzen, aus der Erwägung  $v=0$  für  $r=R$ , sodass

$$v = \frac{p_1 - p_2}{kl} \cdot \frac{R^2 - r^2}{4}$$

die innerhalb aller Röhrenquerschnitte gleiche, aber für jeden vom

$$\max v = \frac{p_1 - p_2}{kl} \cdot \frac{R^2}{4}$$

bis zu Null variirende Strömungsgeschwindigkeit vorstellt.

Führt man statt derselben die mittlere Geschwindigkeit *med*  $v$  ein, sodass in der Secunde das gleiche Ausflussquantum  $Q$  des § 2 resultirt, so erhält man aus

$$\text{med } v \cdot \pi R^2 = 2\pi \int_0^R v r dr = Q$$

die Gleichung des § 2 und

$$\text{med } v = \frac{1}{2} \max v,$$

also das beliebteste arithmetische Mittel. —

Für nicht benetzende Flüssigkeiten ist das kleinste  $v$ , ich will es *min*  $v$  schreiben, von Null verschieden und es bestimmt sich  $B$  aus der Gleichung (für  $r$  gesetzt  $R$ )

$$\frac{p_1 - p_2}{l} \cdot \frac{R^2}{4} = -k \cdot \text{min } v + B$$

und *min*  $v$  beschafft man sich aus der voranstehenden Gleichung, auch  $R$  statt  $r$  setzend und  $A=0$ , indem man statt der Reibung  $-k \frac{dv}{dr}$  setzt die

Gleitung  $\lambda \cdot \text{min } v$ , die man nämlich auch in einfachster Annahme dem Geschwindigkeits-Unterschiede *min*  $v$  minus Null (letztere bedeutet die Geschwindigkeit der Wand selbst) proportional setzt;  $\lambda$  ist der Gleitungscoefficient, der sich vom Reibungscoefficienten  $k$  in den Dimensionen durch den Exponenten 2 statt 1 für den Centimeter unterscheidet:

$$\frac{p_1 - p_2}{l} \cdot \frac{R^2}{2} = R\lambda \cdot \text{min } v.$$

Mit Hilfe dieser beiden Gleichungen wird allgemein

$$v' = \frac{p_1 - p_2}{kl} \cdot \frac{R^2 - r^2}{4} + \frac{p_1 - p_2}{\lambda l} \frac{R}{2},$$

wo das neue Glied die kleinste Geschwindigkeit vorstellt. Jede Geschwindigkeit  $v'$  ist um dasselbe grösser als bei der benetzenden Flüssigkeit, für welche  $\lambda$  unendlich gross anzunehmen ist. Aus besagtem Grunde braucht man, um für nicht benetzende Flüssigkeiten die Stromstärke  $Q'$  zu berechnen, nur noch  $\min v \cdot \pi R^2$  hinzuzufügen und erhält:

$$Q' = \pi \frac{p_1 - p_2}{8kl} \left( R^4 + \frac{4k}{\lambda} R^3 \right).$$

§ 4. Wenn keine Reibung wäre, oder man von dieser annäherungsweise absehen darf, so ist die Geschwindigkeit  $v$  in jedem Querschnitte constant; im horizontalen Ausflussrohre (wo der Querschnitt vertical) also überall.

Im Gefässe dagegen ist die Geschwindigkeit auch für jeden (horizontalen) Querschnitt constant, aber mit der Tiefe  $z$  unter der freien Oberfläche  $F_0$  des Gefässes nimmt das Quadrat der Geschwindigkeit gemäss dem Princip der lebendigen Kraft um  $2gz$  zu. Man hat also, wenn  $V_0$  für die Oberfläche  $F_0$  gilt,  $v$  und  $f$  für eine Tiefe  $z$ ,  $V$  und  $F$  für die Tiefe  $H$  der Ausflussöffnung:

$$F_0 \cdot V_0 = f \cdot v = F \cdot V \text{ und}$$

$$v^2 - V_0^2 = 2gz, \quad V^2 - V_0^2 = 2gH.$$

Wenn  $f^2$  klein gegen  $F_0^2$  und auch  $F^2$  klein gegen dasselbe, so fällt in den beiden letzten Gleichungen  $V_0^2$  fort gegen  $v^2$  und  $V^2$ .

Wenn aber bei  $f$  ein oben offenes Manometer-Rohr angebracht ist, welches die Druckhöhe  $z' < z$  anzeigt, so kommt

$$v^2 = 2g(z - z') = V^2 \cdot \left( \frac{F}{f} \right)^2 = 2gH \left( \frac{F}{f} \right)^2.$$

Die Gleichung

$$z' = z - \frac{v^2}{2g}$$

wird mehrfach mit dem Wortlaute reproducirt: Die hydraulische Höhe ist kleiner als die hydrostatische um die Geschwindigkeitshöhe ( $v^2 : 2g$ ). Neumann führt im § 53 die Versuche D. Bernoulli's an, wo  $H$  im Gefässe 115 Par. Linien hoch und unten ein nicht langes und sieben Linien weites Ausflussrohr wagerecht ausmündete;  $f$  und das Manometer hierbei waren am Anfange dieses Rohres (ganz nahe dem Gefässe). Dann ist

$$z' = H - H \left( \frac{F}{f} \right)^2,$$

welche Gleichung von Neumann im § 51 also unnöthiger Weise mittelst höheren Calculs entwickelt und im § 53 bis zu der äquivalenten Form

$$p - P = DgH \left[ 1 - \left( \frac{F}{f} \right)^2 \right] \text{ gebracht wird.}^*$$

\* wird also  $p - P$  durch  $z'$  gemessen und nur indirect durch  $(H - z')$ .



$$p_1 - p_2 = g \cdot 7 \cdot 1 = 7000 \frac{\text{Gramm}}{\text{Centim. Sec.}^2} \text{ und } l = 30, Q = \frac{500}{37} \frac{\text{Centimeter}^3}{\text{Sec.}},$$

$R = 0,2$  (Radius des Gummi-Pfropfens) ergab sich,

$$k = 0,0108 \text{ (0,0105 p. 568 l. c.)}.$$

Jenes Wasser hatte  $12^\circ$  bis  $15^\circ$ . Bei  $0^\circ$  hat  $k$  für Wasser nach Messungen Anderer als zweite Decimalstelle noch 1, aber an der dritten statt 0 schon eine bedeutende Ziffer.

Die erste (dem Gefässe nächste) Manometerröhre meines Apparates zeigte einen zu niedrigen Wasserstand, wie auch die zweite. Zwar befolgten die Wasserstände der zweiten und dritten Röhre eine abfallende Gerade, aber nicht nach dem vorhin erwähnten Verhältnisse

$$\frac{p_1 - p_2}{l} \text{ entsprechend } \frac{7}{30}, \text{ sondern nur}$$

$$\frac{0,4 \text{ oder } 0,5}{10},$$

was ja nur der fünfte Theil des Vorigen wäre.

Wenn von 7 noch ein Theil als Geschwindigkeitshöhe (s. § 4) abgeht (nach meiner rechnerischen Schätzung zwei Centimeter), so ist dafür  $R$  statt 0,2 nur auf 0,22 zu erhöhen. Es war auch das Rohr weiter als der Pfropfen und  $R^4$  ist wegen der vierten Potenz überhaupt der heikelste Punkt der Messung. Vergl. auch im § 4 den Schluss des vorletzten Absatzes.

§ 6. Meine neueren Versuche: Ich liess in Stützerbach eine Glasröhre von zehn Centimeter Weite mit drei Seitenröhren von je zehn Centimeter Abstand anfertigen. Sie fiel so aus, dass  $l = 11$  Centimeter vom Mittel des einen Manometerrohres zum folgenden beträgt. Die Mariotte'sche Flasche und der Gummipfropfen für das Ausflussrohr wurden beibehalten und das Manometer mittelst kurzen Gummischlauches mit ihr verbunden. Ich verzeichne nun folgende Versuche:

I. Ausfluss ohne Manometer, mittelst kurzen Schlauches von 0,75 Centimeter Weite.  $Q = 16$  Centimeter<sup>3</sup> in der Secunde;  $H = 7$ ; folglich  $v = \sqrt{2gH} = 120$ ; aus  $120\pi R^2 = 16$  wird  $R = 0,2$ ; vergl. § 5.

II. Das Glasrohr (Manometer) mittelst kurzen Schlauches angesetzt.  $Q = 12$ . Die drei Druckröhren zeigten

$$z'_1 = 1,5 \quad z'_2 = 1,5 \quad z'_3 = 1,25.$$

Dieser Versuch hat Aehnlichkeit mit demjenigen im § 5, ist aber hinsichtlich der ersten und zweiten Manometerröhre schon besser, insofern wenigstens kein Ansteigen von der ersten zur zweiten Manometerröhre eingetreten ist.

III. Mit einem kurzen Gummischlauche am Ausflussende ward  $Q = 13$  und

$$z'_1 = 0,8 \quad z'_2 = 0,5 \quad z'_3 = 0,2.$$

Jetzt ist die im Eingange des § 1 geforderte Gerade vollständig. Sie schneidet ungefähr in der Höhe 1,1, oder in der Tiefe 5,9 unter dem geltenden Wasserspiegel der Mariotte'schen Flasche diese selbst; also

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot 5,9} = 109$$

und mit

$$109 \cdot \pi R^2 = 13$$

kommt  $R$  nahe 0,2, sodass also für die Ausflussmenge nur der Querschnitt des Gummipfropfens, nicht der grössere des Schlauches und Glasrohres in Betracht kommt. Aber für die Formel des § 2 kommt  $R$  nahe 0,4 zur Geltung vom Gummischlauch, wie ich,  $k=0,01$  als bekannt vorausgesetzt, aus

$$13 = \frac{22}{7} \cdot \frac{0,3 \cdot 1000 \cdot 1}{8 \cdot 0,01 \cdot 11} \cdot x^4$$

für  $x$  berechnete.

IV. War 1 Meter Schlauch zwischen Flasche und Manometer, so stand letzteres mit seinen drei Röhren auf Null.  $Q=10,4$ , wenn der lange Schlauch gerade, und  $=9,8$ , wenn er kreisrund gelegt war.

V. War dagegen der 1 Meter lange Schlauch hinter dem Manometer angefügt, so ergab sich  $Q=10$ , wie auch das Mittel in IV., und die drei Manometer standen auf

$$z'_1 = 3,0 \quad z'_2 = 2,5 \quad z'_3 = 2,2;$$

es stimmt also die Differenz der beiden letzteren mit III.; abgesehen von der kleineren Ausflussmenge; dieserhalb ist  $R$  etwas kleiner als in III. anzunehmen. Es ist auch der Schlauch enger als das Manometerrohr. In IV. traf auf das Manometer sozusagen kein Widerstand mehr, in V. ein merkbarer.

VI. Wie III., aber am Ende des kurzen Ausfluss-Schlauches ward ein Quetschhahn angebracht, der durch einen Feilkloben mit Flügelschraube zuerst möglichst weit geöffnet gehalten wurde.  $Q=12,8$ , also wenig kleiner als in III. Aber das Manometer zeigte in allen drei Röhren denselben Stand, die (abfallen sollende) Gerade war merklich horizontal.

VII. Eine Umdrehung der Flügelschraube:  $Q=10,6$  und  $z'=1,5$  in den drei Manometerröhren.

VIII. Zwei Umdrehungen:  $Q=6,5$  und  $z'=4,9$ .

IX.  $2\frac{3}{4}$  Umdrehungen:  $Q=0,90$  und  $z'=7$ .

Letztere Angabe zeigt, wie auch das  $Q$ , dass das Fliessen nahe dem Aufhören war. Wirklich fand mit drei Umdrehungen nur mehr ein Abtropfen statt.

X. Ich habe drei solche Glas-Manometer anfertigen lassen, deren eines bisher nur benutzt wurde, und sie jetzt alle drei eingeschaltet; dazwischen noch je einen Schlauch von 1 Meter Länge. Die je drei Röhren eines Manometers zeigten da, wie nach den Versuchen VI. und IX. um so leichter

voraus zu sehen war, denselben Stand. Aber vom ersten zum zweiten und von da zum dritten Manometer war die abfallende Gerade um so deutlicher. Es betrug die Höhendifferenz 2,5 Centimeter, was mit III. und V. übereinstimmt, denn 0,3 dort zu 2,5 hier verhält sich nahe wie die Länge 11 zu 100 dort und hier.

§ 7. Nachtrag zu § 4. Wenn man daselbst  $V_0^2$  nicht weglässt, wie es geschah, um gleich auf Neumann's § 53 zu kommen, so wird

$$z' = z - \frac{v^2 - V_0^2}{2g},$$

d. h.: die hydraulische Druckhöhe ist kleiner als die hydrostatische um diejenige Höhe, welche dem Ueberschusse der Quadrate der Geschwindigkeiten an der fraglichen Stelle und an der freien Oberfläche entspricht.

Ritter setzt bei dieser Gelegenheit (Gleichung 1091 der fünften Auflage des Lehrbuches der technischen Mechanik vom Jahre 1884) den Fall  $z' < 10\frac{1}{2}$  Meter etc., d. h. er spricht da vom Luftdrucke und als ob  $z'$  niemals negativ werden könne. Nun ist aber in den §§ 2 bis 4 oben der Luftdruck schon ausgeschieden, sodass  $z'$  und  $z$  nur Druckkräfte tropfbarer Flüssigkeiten darstellen.

Weissbach's Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik (fünfte verbesserte und vervollständigte Auflage des ersten Bandes von Herrmann, 1874) schreibt im § 417 die hydraulische Druckhöhe mit  $p_1 : \gamma$  und die hydrostatische mit  $(h + p_0 : \gamma)$ . Da muss man also  $p_0$  als Gramm durch Centimeter<sup>2</sup> und  $\gamma$  als Gramm durch Centimeter<sup>3</sup> nehmen, welchem Missstande (Kraft und Masse durch dasselbe Gramm zu messen) Neumann in dem Ausdrucke vorbeugt, den ich gelegentlich meiner Anmerkung im § 4 oben angeführt habe. Ferner lag es nahe genug, auch  $(p_1 : \gamma)$  durch Länge *plus*  $p_0 : \gamma$  zu geben, sodass  $p_0 : \gamma$  wie oben hinausfällt.

Endlich wären noch die Fälle  $z' \leq 0$  zu erwähnen. Ersterer tritt an der Ausflussöffnung ein und kann gemäss der ersten Gleichung des § 4 auch intermediär zwischen der Oberfläche und Ausflussmündung stattfinden. Letzterer führt zum Aspirator und der Wasserluftpumpe.

Augsburg.

Dr. A. KURZ.

## II. Ableitung einer neuen Formel für den Flächeninhalt der Zone eines Rotationsellipsoids.

Zur Bestimmung des Flächeninhaltes einer zwischen den Breiten  $\varphi$  und  $\varphi_1$  liegenden Zone des Erdsphäroids benutzt man entweder einen viergliedrigen Ausdruck von endlicher Form, oder eine nach den Producten der Sinus und Cosinus der Vielfachen von  $\varphi$  und  $\varphi_1$  fortschreitende unendliche Reihe. Da die Berechnung nach der erstgedachten Formel in der Anwendung *unbequem ist*, so findet man in den Werken über Geodäsie in der Regel *keine schnell convergirende Reihe* abgeleitet und die Werthe der in der-

Ich werde im Folgenden einen Ausdruck entwickeln, in welcher die Coefficienten der Winkelfunctionen von endlicher Form und höchst einfachem Bildungsgesetz sind, wodurch ihre Berechnung wesentlich erleichtert wird.

$$1) \quad \left\{ \begin{aligned} dF &= 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\ &= \frac{2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dy}{\frac{dy}{dx}}. \end{aligned} \right.$$

erhält man

$$\frac{x}{y} = -(1 - \varepsilon^2) \frac{dy}{dx}, \quad \frac{x}{y} = \tan \varphi', \quad \frac{dy}{dx} = -\tan \varphi$$

$$y^2 = \frac{a^2 \cos \varphi^2}{1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2},$$

$$y dy = - \frac{a^2 (1 - \varepsilon^2) \cos \varphi \sin \varphi d\varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^2}.$$
$$1a) \quad dF = \frac{2\pi a^2 (1 - \varepsilon^2) \cos \varphi \, d\varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^2}.$$
$$n = \frac{a - b}{a + b}$$
$$1 - \varepsilon^2 = \left( \frac{1-n}{1+n} \right)^2, \quad \varepsilon^2 = \frac{4n}{(1+n)^2},$$

$$1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi = 1 - \frac{2n}{(1+n)^2} + \frac{2n}{(1+n)^2} \cos 2\varphi.$$

Wenn man den mit  $\cos 2\varphi$  identischen Werth  $\frac{1}{2}(e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi})$  einsetzt, worin  $e$  die Basis des natürlichen Logarithmensystems und  $i = \sqrt{-1}$  bedeuten, so ergibt sich

$$1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi = \frac{1 + n^2 + n(e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi})}{(1 + n)^2} \\ = \frac{1}{(1 + n)^2} (1 + ne^{2i\varphi})(1 + ne^{-2i\varphi}),$$

und die Gleichung 1a) nimmt die folgende Gestalt an:

$$2) \quad dF = 2a^2 \pi (1 - n^2)^2 \cos \varphi (1 + ne^{2i\varphi})^{-2} (1 + ne^{-2i\varphi})^{-2} d\varphi.$$

Verwandelt man die hierin enthaltenen Binome in die bekannten Potenzreihen und führt die Multiplication beider aus, so findet man nach Elimination der imaginären Formen für

$$\cos \varphi (1 + ne^{2i\varphi})^{-2} (1 + ne^{-2i\varphi})^{-2} = A \cos \varphi - 2B \cos \varphi \cos 2\varphi \\ + 2C \cos \varphi \cos 4\varphi - 2D \cos \varphi \cos 6\varphi + 2E \cos \varphi \cos 8\varphi - + \dots,$$

worin die Coefficienten  $A, B, C \dots$  die folgenden Werthe haben:

$$3) \quad \begin{cases} A = 1 + 2.2n^2 + 3.3n^4 + 4.4n^6 + 5.5n^8 + 6.6n^{10} + \dots \\ B = 2n + 2.3n^3 + 3.4n^5 + 4.5n^7 + 5.6n^9 + 6.7n^{11} + \dots \\ C = 3n^2 + 2.4n^4 + 3.5n^6 + 4.6n^8 + 5.7n^{10} + 6.8n^{12} + \dots \\ D = 4n^3 + 2.5n^5 + 3.6n^7 + 4.7n^9 + 5.8n^{11} + 6.9n^{13} + \dots \\ E = 5n^4 + 2.6n^6 + 3.7n^8 + 4.8n^{10} + 5.9n^{12} + 6.10n^{14} + \dots \\ \dots \end{cases}$$

Da allgemein  $2\cos \varphi \cos 2t\varphi = \cos (2t+1)\varphi + \cos (2t-1)\varphi$  ist, so kann man, mit Rücksicht auf das Vorstehende, das unbestimmte Integral der Gleichung 2) leicht in folgender Form darstellen:

$$F = 2\pi a^2 (1 - n^2)^2 \left[ A_1 \sin \varphi - \frac{1}{3} A_3 \sin 3\varphi + \frac{1}{5} A_5 \sin 5\varphi \right. \\ \left. - \frac{1}{7} A_7 \sin 7\varphi + \dots \frac{(-1)^{t-1}}{2t-1} A_{2t-1} \sin (2t-1)\varphi + \dots \right],$$

worin  $A_1 = A - B, \quad A_3 = B - C, \quad A_5 = C - D, \quad A_7 = D - E \dots$

Die Coefficienten der in 3) enthaltenen Potenzen von  $n$  lassen ein einfaches Bildungsgesetz erkennen, indem sie als Glieder einer arithmetischen Progression zweiter Ordnung erscheinen, durch welchen Umstand die Summirung der Reihen für  $A, B, C \dots$ , sowie für  $A_1, A_3, A_5$  leicht ausführbar ist. Vollzieht man gleich die Bildung der Summen für die letztgenannten Grössen, so ergibt sich für den allgemeinen Ausdruck derselben

$$A_{2t-1} = \frac{n^{t-1} [t - (t+1)n - n^2(t-2 - (t-1)n)]}{(1 - n^2)^3}.$$

Folge nach  $t=1, 2, 3, 4 \dots$  setzt und die so erhaltenen Werthe in Gleichung 4) substituirt, so



stellt  $F$  den Flächeninhalt der vom Aequator bis zur geographischen Breite  $\varphi$  reichenden Zone dar. Für die von der Breite  $\varphi_1$  bis  $\varphi$  sich erstreckende Zone findet man hieraus, wenn noch die Formel

$$\sin(2t-1)\varphi - \sin(2t-1)\varphi_1 = 2 \sin \frac{1}{2}(2t-1)(\varphi - \varphi_1) \cos \frac{1}{2}(2t-1)(\varphi + \varphi_1)$$

berücksichtigt wird,

$$5) \left\{ \begin{aligned} F &= \frac{4\pi a^2}{1-n^2} \left[ (1-n)^2 \sin \frac{1}{2}(\varphi - \varphi_1) \cos \frac{1}{2}(\varphi + \varphi_1) \right. \\ &\quad - \frac{n}{3} [2-3n+n^3] \sin \frac{3}{2}(\varphi - \varphi_1) \cos \frac{3}{2}(\varphi + \varphi_1) \\ &\quad + \frac{n^2}{5} [3-4n-n^2(1-2n)] \sin \frac{5}{2}(\varphi - \varphi_1) \cos \frac{5}{2}(\varphi + \varphi_1) \\ &\quad - \frac{n^3}{7} [4-5n-n^2(2-3n)] \sin \frac{7}{2}(\varphi - \varphi_1) \cos \frac{7}{2}(\varphi + \varphi_1) \\ &\quad + \frac{n^4}{9} [5-6n-n^2(3-4n)] \sin \frac{9}{2}(\varphi - \varphi_1) \cos \frac{9}{2}(\varphi + \varphi_1) \\ &\quad - + \dots \\ &\quad + \frac{(-n)^{t-1}}{2t-1} [t-(t+1)n - n^2(t-2-(t-1)n) \\ &\quad \left. \sin(2t-1) \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \cos(2t-1) \frac{\varphi + \varphi_1}{2} \right]. \end{aligned} \right.$$

Im Vergleich zu der bisher angewandten Reihenentwicklung zeigt die vorstehende eine bedeutende Vereinfachung der von  $n$  abhängigen Coefficienten. Wie leicht nachzuweisen, ist der von der Breite unabhängige Theil des ersten Gliedes auch gleich  $4\pi ab$ .

Nimmt man nach W. Bessel für die Erddimensionen die Werthe

$$a = 6377.397156 \text{ Kilometer,}$$

$$b = 6356.078963 \quad " \quad ,$$

$$n = 0.001674 \ 184767$$

an und setzt den Fehler in  $a$  und  $b$  einer halben Einheit der sechsten Decimalstelle gleich, welche Genauigkeit indess niemals in Wirklichkeit erreicht wird, so können alle höheren Potenzen von  $n$  als die dritte vernachlässigt werden, wodurch sich obiger Ausdruck zusammenzieht in

$$F = \frac{4\pi a^2}{1-n^2} \left[ (1-n)^2 \sin \frac{1}{2}(\varphi - \varphi_1) \cos \frac{1}{2}(\varphi + \varphi_1) \right. \\ - \frac{n}{3} (2-3n) \sin \frac{3}{2}(\varphi - \varphi_1) \cos \frac{3}{2}(\varphi + \varphi_1) \\ + \frac{n^2}{5} (3-4n) \sin \frac{5}{2}(\varphi - \varphi_1) \cos \frac{5}{2}(\varphi + \varphi_1) \\ \left. - \frac{4n^3}{7} \sin \frac{7}{2}(\varphi - \varphi_1) \cos \frac{7}{2}(\varphi + \varphi_1) \right].$$

Bekanntlich ist für bestimmte kartographische und katastrale Zwecke die Aufstellung von Tabellen erforderlich, welche für geringe Breitenintervalle die Flächeninhalte kleinerer Zonentheile (sphäroidischer Trapeze) enthalten. Zur Berechnung derselben ist die vorstehende Reihe ganz besonders geeignet, da man nur die ersten zwei oder drei Glieder derselben zu berücksichtigen braucht. Dagegen ist der Eingangs erwähnte und aus Gleichung 1a) folgende endliche Ausdruck, nämlich:

$$F = \pi a^2 (1 - \varepsilon^2) \left[ \frac{\sin \varphi}{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi} - \frac{\sin \varphi_1}{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi_1} + \frac{1}{2 \varepsilon M} \log \left( \frac{1 + \varepsilon \sin \varphi}{1 - \varepsilon \sin \varphi} \right) - \frac{1}{2 \varepsilon M} \log \left( \frac{1 + \varepsilon \sin \varphi_1}{1 - \varepsilon \sin \varphi_1} \right) \right],$$

weit weniger zur Berechnung geschickt, weil eine grössere Anzahl von Logarithmen und deren Numeri zu bestimmen ist. Da ferner im Nenner des vorstehenden Ausdrucks die kleine Grösse  $\varepsilon$  als Factor enthalten ist, so wird ein Fehler in dem Coefficienten von  $1:2 \varepsilon M$  stark vergrößert und dadurch die Genauigkeit des Rechnungsergebnisses sehr beeinträchtigt.

Für sehr kleine  $\varepsilon$  würde übrigens die Formel, wie man leicht erkennt, zur Berechnung unbrauchbar werden.

Mit den oben gegebenen Zahlenwerthen habe ich für den Flächeninhalt der Zone berechnet:

$$\begin{aligned} F = & 50938 \text{ } 0847^{qkm} \cdot 550 \sin \frac{1}{2} (\varphi - \varphi_1) \cos \frac{1}{2} (\varphi + \varphi_1) \\ & - 56 \text{ } 9007 \text{ } „ \cdot 660 \sin \frac{3}{2} (\varphi - \varphi_1) \cos \frac{3}{2} (\varphi + \varphi_1) \\ & + 857 \text{ } „ \cdot 601 \sin \frac{5}{2} (\varphi - \varphi_1) \cos \frac{5}{2} (\varphi + \varphi_1) \\ & - 1 \text{ } „ \cdot 367 \sin \frac{7}{2} (\varphi - \varphi_1) \cos \frac{7}{2} (\varphi + \varphi_1) \\ & + 0 \text{ } „ \cdot 002 \sin \frac{9}{2} (\varphi - \varphi_1) \cos \frac{9}{2} (\varphi + \varphi_1), \end{aligned}$$

wobei auch die vierten Potenzen von  $n$  berücksichtigt sind.

Diese Zahlen sind bis auf die letzte Stelle richtig und dürften den unter Zugrundelegung derselben Erddimensionen berechneten und anderweit angegebenen Werthen vorzuziehen sein, welche von den vorstehenden theilweise nicht unerheblich abweichen.

Chemnitz.

E. ROEDEL, Ober-Postassistent.



Sterbe- und Invaliditäts-Tafeln“ in Crelle's Journal Bd. 106, eine neue Gleichung angegeben, mit Hilfe deren es möglich ist, empirische Zahlenreihen darzustellen. Die Anwendung derselben auf die deutsche Sterbetafel, männliches Geschlecht, und auf die Tafel der Arbeitsfähigen, entnommen aus Spitzer's Anleitung zur Berechnung von Leibrenten und Anwartschaften etc., ergiebt innerhalb gewisser Altersintervalle gute und brauchbare Resultate. Daraus, dass auch diese Formel nur innerhalb einer Reihe von Altersjahren befriedigt und zur Ausgleichung einer ganzen Sterbetafel wiederholt angewendet werden muss, erkennt man wiederum, dass die Darstellung der ganzen Sterblichkeitscurve durch eine analytische Gleichung kaum von praktischem Werthe ist.

Im Folgenden soll ein Ausgleichungsverfahren angegeben werden, mit welchem man durch Rechnung successive die Punkte der ausgleichenden Curve aus der beobachteten Sterblichkeitslinie finden und dabei doch den Besonderheiten der vorliegenden Sterblichkeit überall Rechnung tragen kann. Man kann annehmen, dass die in ihrem ganzen Verlaufe transcendente Sterblichkeitscurve aus einzelnen Stücken zusammengesetzt ist, welche algebraischen Curven angehören, sodass für diese einzelnen Stücke die Curve durch eine Gleichung von der Form

$$y = a + b.x + c.x^2 + d.x^3 + \dots$$

darstellbar ist. Das Ausgleichungsverfahren beruht nun darin, dass man jeden Punkt der zu suchenden Curve so bestimmt, dass er der mittelste Punkt eines parabolischen Curvenstückes wird. Im Besonderen sei angenommen, dass der gedachte Punkt der mittelste von fünf aufeinander folgenden Punkten sei, welche das Stück einer Parabel bilden. Unter dieser Voraussetzung muss folgenden fünf Gleichungen Genüge geleistet werden:

$$1) \quad y_k = a + b.x_k + c.x_k^2; \quad k=1, 2, 3, 4, 5.$$

Die Bestimmung der Constanten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  führt mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate auf folgende drei, in Bezug auf die Constanten linearen Gleichungen, in denen der Umfang der durch das Zeichen  $\Sigma$  angedeuteten Summation aus den Gleichungen 1) leicht zu ersehen ist

$$2) \quad \begin{cases} \Sigma(y) = 5a + b.\Sigma(x) + c.\Sigma(x^2), \\ \Sigma(x.y) = a.\Sigma(x) + b.\Sigma(x^2) + c.\Sigma(x^3), \\ \Sigma(x^2.y) = a.\Sigma(x^2) + b.\Sigma(x^3) + c.\Sigma(x^4). \end{cases}$$

Dieselben ergeben

$$3) \quad a = \frac{Z_a}{N}, \quad b = \frac{Z_b}{N}, \quad c = \frac{Z_c}{N},$$

wobei man bezeichnet mit

$$Z_a = \begin{vmatrix} \Sigma(y), & \Sigma(x), & \Sigma(x^2) \\ \Sigma(x.y), & \Sigma(x^2), & \Sigma(x^3) \\ \Sigma(x^2.y), & \Sigma(x^3), & \Sigma(x^4) \end{vmatrix}; \quad Z_b = \begin{vmatrix} 5, & \Sigma(y), & \Sigma(x^2) \\ \Sigma(x), & \Sigma(x.y), & \Sigma(x^3) \\ \Sigma(x^2), & \Sigma(x^2.y), & \Sigma(x^4) \end{vmatrix};$$

$$Z_c = \begin{vmatrix} 5, & \Sigma(x), & \Sigma(y) \\ \Sigma(x), & \Sigma(x^2), & \Sigma(x.y) \\ \Sigma(x^2), & \Sigma(x^3), & \Sigma(x^2.y) \end{vmatrix}; \quad N = \begin{vmatrix} 5, & \Sigma(x), & \Sigma(x^2) \\ \Sigma(x), & \Sigma(x^2), & \Sigma(x^3) \\ \Sigma(x^2), & \Sigma(x^3), & \Sigma(x^4) \end{vmatrix}.$$

Diese Determinanten besitzen sehr einfache Werthe, wenn man bedenkt, dass die Grössen  $x$  in ihrer Aufeinanderfolge eine arithmetische Reihe erster Ordnung bilden. In der That ist

$$4) \quad x_1 = x_1, \quad x_2 = x_1 + 1, \quad x_3 = x_1 + 2, \quad x_4 = x_1 + 3, \quad x_5 = x_1 + 4.$$

Setzt man

$$5) \quad x_1 + 2 = x,$$

so ist  $x$  gerade dasjenige Alter, zu dem man eine solche Sterbens-Wahrscheinlichkeit  $y$  sucht, dass durch Einsetzen der Werthe  $a, b, c$  aus 3) die Parabel erfüllt wird

$$y = a + b.x + c.x^2.$$

Durch die Einführung 4) und 5) aber erhält die Nennerdeterminante  $N$  den constanten Werth 700, während die Zählerdeterminanten ergeben

$$\begin{aligned} \frac{1}{10} Z_a &= A. \Sigma(y) - B. \Sigma(x.y) + C. \Sigma(x^2.y), \\ -\frac{1}{10} Z_b &= B. \Sigma(y) - D. \Sigma(x.y) + E. \Sigma(x^2.y), \\ \frac{1}{10} Z_c &= C. \Sigma(y) - E. \Sigma(x.y) + 5. \Sigma(x^2.y), \end{aligned}$$

wobei gesetzt wird

$$\begin{aligned} A &= 5.(x^2 + 6)^2 - 73.(x^2 + 2), \\ B &= x.(10x^2 - 13), \\ C &= 5.(x^2 - 2), \\ D &= 20x^2 + 7, \\ E &= 10x. \end{aligned}$$

Jede Sterbens-Wahrscheinlichkeit  $y$  ergibt sich nunmehr für das Alter  $x$  aus der Gleichung

$$6) \quad \begin{cases} 70y = \{ A. \Sigma(y) - B. \Sigma(x.y) + C. \Sigma(x^2.y) \} - \\ \quad - x. \{ B. \Sigma(y) - D. \Sigma(x.y) + E. \Sigma(x^2.y) \} + \\ \quad + x^2. \{ C. \Sigma(y) - E. \Sigma(x.y) + 5. \Sigma(x^2.y) \}. \end{cases}$$

Damit ist unsere Aufgabe gelöst, und der erhaltene Punkt  $x, y$  liegt auf einem Parabelstücke, dessen Gleichung durch 6) dargestellt wird. Man kann daher diese Ausgleichungsweise als die parabolische Ausgleichungsmethode bezeichnen.

Das angegebene Verfahren wurde geprüft an denjenigen Sterbens-Wahrscheinlichkeiten, welche in der deutschen Sterbetafel, gegründet auf

die Sterblichkeit der Reichsbevölkerung in den zehn Jahren 1871/72 bis 1880/81, für das männliche Geschlecht enthalten sind (Monatshefte zur Statistik des Deutschen Reichs, Novemberheft 1887). Das Ergebniss dieser Ausgleichung ist auszugsweise in Spalte 4 der folgenden Tabelle wiedergegeben.

Alter.	Unausgegliche Sterbens-Wahrscheinlichkeiten.	Ausgeglichene Sterbens-Wahrscheinlichkeiten des Monatshefts.	Nach der parabolischen Methode ausgeglichene Sterbens-Wahrscheinlichkeiten.	Alter.	Unausgegliche Sterbens-Wahrscheinlichkeiten.	Ausgeglichene Sterbens-Wahrscheinlichkeiten des Monatshefts.	Nach der parabolischen Methode ausgeglichene Sterbens-Wahrscheinlichkeiten.
1	2	3	4	1	2	3	4
0	0.25273	0.25273	0.25273	48	0.01960	0.01941	0.01940
4	1705	1705	1694	52	2387	2374	2370
8	668	665	665	56	2979	2956	2938
12	375	368	371	60	3856	3820	3829
16	452	451	449	64	5155	5118	5159
20	750	750	749	68	6960	6942	6896
24	847	847	850	72	9464	9489	9408
28	894	885	887	76	13057	12965	13192
32	982	984	980	80	17585	17448	17500
36	1152	1148	1145	84	23178	22900	23027
40	1364	1363	1356	88	28661	28852	28462
44	1617	1605	1625				

Für die praktische Anwendung der Methode sind noch folgende Bemerkungen zu machen.

Wenn die unausgeglichene Zahlenreihe der Sterbens-Wahrscheinlichkeiten in ihrer Aufeinanderfolge grosse Unregelmässigkeiten zeigt, so thut man gut, vor Beginn der Ausgleichung eine Ordnung der Zahlenreihe derart einzuführen, dass man aus fünf aufeinanderfolgenden Werthen das arithmetische Mittel bildet und dieses an Stelle des mittelsten der genommenen Werthe einsetzt und erst auf die so geordnete Zahlenreihe das Ausgleichungsverfahren anwendet.

Da die Grössen  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  und  $E$  von  $x$  allein abhängen, so sind sie unabhängig von der jedesmaligen Beobachtung und können für jedes Alter  $x$  von vornherein berechnet werden. Ausserdem hat man sich nur eine Tabelle für die drei Summen  $\Sigma(y)$ ,  $\Sigma(x.y)$  und  $\Sigma(x^2.y)$  aufzustellen.

Dresden.

LUDWIG ANTON.

## V.

# Darstellung der Curven dritter Ordnung und Classe aus zwei Reciprocitäten.

Von

Dr. CHR. BEYEL

in Zürich.

---

### A. Allgemeine Sätze und Definitionen.

1. Wir gehen von einem Dreieck  $ABC(abc)$  und einem Punkte  $P$  seiner Ebene aus. Wir construiren durch  $P$  eine Gerade  $p$ , welche mit den Strahlen aus  $P$  nach  $ABC$  in vorgeschriebener Reihenfolge ein gegebenes Doppelverhältniss  $\Delta$  bildet. Es sei also  $(PA, PB, PC, p) = \Delta$ . Dann schneidet — wie wir anderen Ortes\* bewiesen haben — die Gerade  $p$  aus den Seiten  $abc$  des Dreiecks  $ABC$  drei Punkte  $P_a P_b P_c$ , für welche  $(P_a P_b P_c P) = \Delta$ . Somit wird durch  $ABC(abc)$  und  $\Delta$  jedem Punkte  $P$  der Ebene eine Gerade  $p$  durch  $P$  eindeutig zugeordnet und jeder Geraden  $p$  einer ihrer Punkte.

Wir bezeichnen diese specielle Reciprocität mit  $(A, B, C \Delta)$ .  $ABC$  seien die Grundpunkte,  $abc$  die Grundlinien der Reciprocität.

An dem citirten Orte zeigten wir ferner, dass in der definirten Reciprocität den Punkten einer Geraden  $g$  die Tangenten eines Kegelschnittes entsprechen. Derselbe hat  $abc$  zu Tangenten und wird von  $g$  in dem Punkte  $G$  berührt, welcher  $g$  entspricht. Den Strahlen eines Büschels mit dem Scheitel  $G$  correspondiren die Punkte eines Kegelschnittes durch  $ABCG$ , der in  $G$  von  $g$  berührt wird. Daraus folgt, dass der Schnittpunkt  $S$  von zwei Geraden  $p, q$ , welche  $P, Q$ , entsprechen, mit diesen Punkten und  $ABC$  auf einem Kegelschnitt liegen muss. Die Tangente  $s$ , welche in  $S$  diesen Kegelschnitt berührt, entspricht dem Punkte  $S$ . Der Verbindungslinie  $v$  der Punkte  $PQ$  entspricht der Berührungspunkt  $V$  von  $v$  mit dem Kegelschnitt, welcher  $abcpqv$  zu Tangenten hat. Mit Hilfe von diesen Sätzen können wir mit dem Lineal in der definirten Reciprocität zusammengehörige Elemente construiren.

---

\* Ueber eine ebene Reciprocität und ihre Anwendung auf die Curventheorie. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, Bd. XXXI, S. 147.

2. Wir wenden uns zu dem Kegelschnittnetz, welches  $ABC$  zu Grundpunkten hat.  $P$  sei ein Punkt seiner Ebene. Dann geht durch  $P$  ein bestimmter Kegelschnitt  $P^2$  des Netzes von der Art, dass die Strahlen von irgend einem Punkte des Kegelschnittes nach  $ABCP$  in vorgeschriebener Reihenfolge ein gegebenes Doppelverhältniss  $\Delta$  bilden.  $P^2$  wird in  $P$  von derjenigen Geraden  $p$  berührt, welche dem Punkte  $P$  in der Reciprocität  $(ABC\Delta)$  entspricht.

Den Kegelschnitten des Netzes durch  $ABC$  stehen diejenigen der Schaarschaar gegenüber, welche  $abc$  zu Tangenten haben. Unter diesen Kegelschnitten giebt es je einen, welcher eine beliebige Gerade  $p$  berührt und dessen Tangenten aus  $abcp$  vier Punkte von vorgeschriebenem Doppelverhältniss  $\Delta$  schneiden. Dieser Kegelschnitt berührt  $p$  in dem Punkte  $P$ , welcher  $p$  in der Reciprocität  $(ABC\Delta)$  entspricht.

Nach dem Gesagten können wir durch  $ABC(abc)$  und  $\Delta$  jedem Punkte  $P$  der Ebene einen Kegelschnitt  $P^2$  zuordnen, welcher durch  $P$  geht und jeder Geraden  $p$  einen Kegelschnitt  $P_2$ , der  $p$  berührt.

Wir bezeichnen diese specielle quadratische Transformation mit  $(ABC\Delta)^2$ .

Zeichnen wir in dieser Transformation zu zwei Punkten  $PQ$  die entsprechenden Kegelschnitte  $P^2Q^2$ , so müssen diese ausser  $ABC$  noch einen Punkt  $V$  gemeinsam haben, der auf der Verbindungslinie  $v$  von  $P$  und  $Q$  liegt; denn nur in diesem Falle können die Strahlen aus  $V$  nach  $ABC$  mit dem Strahle nach  $P$  dasselbe Doppelverhältniss  $\Delta$  bilden, wie mit dem Strahle nach  $Q$ . Wenn aber  $v$  mit diesen Strahlen das Doppelverhältniss  $\Delta$  bildet, so ist  $V$  der entsprechende Punkt zu  $v$  in der Reciprocität  $(ABC\Delta)$ . Er ist also von der Lage der Punkte  $P, Q$  auf  $v$  unabhängig. Daraus schliessen wir, dass alle Kegelschnitte, welche in  $(ABC\Delta)^2$  den Punkten einer Geraden  $v$  entsprechen, ein Büschel bilden.  $ABCV$  sind seine Grundpunkte.

Die duale Ueberlegung führt zu dem Schlusse, dass den Geraden eines Büschels in der Transformation  $(ABC\Delta)^2$  die Kegelschnitte einer Schaar zugeordnet sind. Sie hat  $abc$  zu gemeinsamen Tangenten und ferner die Gerade  $g$ , welche dem Scheitel  $G$  des Büschels in der Reciprocität  $(ABC\Delta)$  entspricht.

Sei  $P^2$  ein beliebiger Kegelschnitt des Netzes mit den Grundpunkten  $ABC$ , so entspricht er in  $(ABC\Delta)^2$  einem seiner Punkte  $P$ . Wir finden denselben, indem wir aus irgend einem Punkte  $T$  von  $P^2$  nach  $ABC$  Strahlen ziehen und einen Strahl  $t$  nach der Bedingung  $(TA, TB, TC, t) = \Delta$  construiren. Er schneidet  $P^2$  ein zweites Mal in  $P$ . Nun ist nach Construction  $t$  die entsprechende Linie zu  $T$  in der Reciprocität  $(ABC\Delta)$ . Folglich müssen alle Geraden, welche den Punkten von  $P^2$  in dieser Reciprocität zugeordnet sind, durch den Punkt  $P$  gehen, dem  $P^2$  in  $(ABC\Delta)^2$  entspricht.









und  $C_3$  nennen. Dann ergibt sich aus 1. für den Zusammenhang von Punkttripel und Linientripel:

Die Tripelseiten, welche zu den Ecken eines Punkttripels gehören, schneiden sich in einem Punkte. Die Tripelecken, welche zu den Seiten eines Linientripels gehören, liegen in einer Geraden. Daraus folgt für die Curven  $C^3$  und  $C_3$ : Von den Tangenten der Curve dritter Classe, welche durch die Ecken eines Punkttripels der Curve dritter Ordnung gehen, schneiden sich drei in einem Punkte. Also umhüllen die anderen sechs einen Kegelschnitt. Ferner: Die Tangenten der Curve  $C_3$ , welche einem Linientripel angehören, schneiden die Curve dritter Ordnung in drei Punkten einer Geraden. Also liegen die sechs anderen Schnittpunkte auf einem Kegelschnitt.

b) Linealconstructionen von Punkten und Tangenten.

4. Wir heben ausgezeichnete Elemente von  $C^3$  und  $C_3$  hervor.

Einer Seite — etwa  $a$  — des Dreiecks  $ABC$  entspricht in der Reciprocität  $(ABC\Delta)$  jeder Punkt von  $a$  (A.3). Zeichnen wir zu dieser Seite den entsprechenden Punkt in  $(A_1B_1C_1\Delta_1)$ , so muss er der Linie  $a$  in beiden Reciprocitäten correspondiren. Also liegt er auf  $C^3$ . Indem wir diesen Schluss für alle Grundlinien der Reciprocitäten ziehen, folgt: Construiren wir zu einer Seite des Grundpunktdreiecks der einen Reciprocität den entsprechenden Punkt in der anderen, so liegt er auf  $C^3$ .

Diese Construction führt zu sechs Punkten der  $C^3$ . Wir wollen dieselben je nach ihrer Lage auf  $abc$ ,  $a_1b_1c_1$  mit  $A^*B^*C^*$  und  $A_1^*B_1^*C_1^*$  bezeichnen und die Sternpunkte der Reciprocitäten nennen. Zu jedem Grundpunkte gehört also ein ihm gleichnamiger Sternpunkt.

Wir können die Sternpunkte auf eine zweite Weise ableiten.

Dem Punkte  $A$  entsprechen in der Transformation  $(ABC\Delta)^2$  die Geraden  $AB$ ,  $AC$  (A.3). Zeichnen wir den Kegelschnitt, welcher dem Punkte  $A$  in  $(A_1B_1C_1\Delta_1)^2$  correspondirt, so muss er  $AB$  und  $AC$  in drei Punkten von  $C^3$  schneiden. Der eine ist  $A$ . Die zwei anderen sind die Sternpunkte  $B^*$  und  $C^*$ . Daraus folgt allgemein: Die Grundpunkte der Transformationen liegen auf  $C^3$ . Construiren wir zu einem Grundpunkte der einen Transformation den entsprechenden Kegelschnitt in der anderen, so liegen auf ihm die zwei Sternpunkte der ersten Transformation, welche nicht zu dem erwähnten Grundpunkte gleichnamig sind. Sie bilden mit diesem Grundpunkte ein zu ihm conjugirtes Punktetripel.

Die duale Ueberlegung zeigt, dass die Grundlinien und die sechs Linien  $a^*b^*c^*$ ,  $a_1^*b_1^*c_1^*$  (Sternlinien), welche den resp. Grundpunkten einer Reciprocität in der anderen entsprechen, Tangenten von  $C_3$  sind.







Legen wir durch die Grundpunkte der einen Reciprocität und einen Sternpunkt der anderen, sowie durch einen beliebigen Punkt  $G$  von  $C^3$  einen Kegelschnitt, so trifft er die Gerade, welche  $G$  mit dem zum Sternpunkte gleichnamigen Grundpunkte verbindet, in einem sechsten Punkte von  $C^3$ .

Wir construiren  $G_a$  nach dem Pascal'schen Satze. Zu diesem Zwecke schneiden wir die Gerade  $GA^*$  mit  $a_1$  und  $r_a$  mit  $b_1$ . Die Verbindungslinie beider Punkte trifft  $A_1A^*$  in einem Punkte, den wir aus  $B_1$  auf  $r_a$  projeciren. Die Projection ist  $G_a$ .

Aus dieser Construction leiten wir folgende allgemeine Regel ab:

Wir ziehen durch  $G$  nach einem Sternpunkte die Gerade  $r^*$  und nach dem gleichnamigen Grundpunkte die Gerade  $r$ . Wir schneiden  $r^*$  mit einer und  $r$  mit einer zweiten Grundlinie der Reciprocität, zu welcher der Sternpunkt nicht gehört. Wir verbinden diese Schnittpunkte und projeciren auf diese Gerade den Sternpunkt aus demjenigen Grundpunkte, welcher der zuerst erwähnten Grundlinie gegenüber liegt. Die Projection verbinden wir mit dem Grundpunkte, welcher der zweiten Grundlinie gegenüber liegt. Dann schneidet die Verbindungslinie aus  $r$  einen Punkt von  $C^3$ .

Diese Linealconstruction giebt uns die zwei Dreiecke von Punkten der  $C^3$ , welche mit  $G$  als Centrum zu den Grundpunktdreiecken perspectivisch sind. Zu jedem dieser Punkte können wir mit dem Lineal neue perspectivische Dreiecke und somit beliebig viele Punkte der  $C^3$  construiren. Der duale Gedankengang zeigt uns die Linienconstruction von beliebig viel Tangenten der  $C_3$ .

9. Wir wollen nun sämtliche Punktetripel der Curve  $C^3$  zeichnen, welche den beliebigen Punkt  $G$  von  $C^3$  zu einer Ecke haben. Diese Tripel sind zu den Punkten  $X$  der Geraden  $g$  conjugirt (1).

Sei  $K^2$  ein Kegelschnitt, welcher durch  $ABCG$  und einen beliebigen Punkt  $X$  von  $g$  geht, und  $K_1^2$  der Kegelschnitt durch  $A_1B_1C_1G$  und  $X$ , so schneiden sich beide Kegelschnitte in zwei weiteren Punkten  $H, F$  von  $C^3$ . Weil diese Punkte und  $A_1B_1C_1G$  einem Kegelschnitte angehören, so müssen die Linien  $GA_1$ ,  $B_1C_1$  und die (stets reelle) Linie  $HF$  aus  $C^3$  drei weitere Punkte schneiden, die in einer Geraden liegen. Zwei dieser Punkte sind  $G_a$  und  $A_1^*$ . Also geht  $HF$  durch den dritten Punkt  $G^{**}$ , in welchem die Linie  $G_aA_1^*$  die Curve  $C^3$  noch trifft. Lassen wir jetzt  $X$  die Linie  $g$  durchlaufen, so gehört zu jeder Lage von  $X$  eine andere Linie  $HF$ . Für alle diese Linien  $HF$  gilt der oben gezogene Schluss, das heisst:

In allen Punktetripeln, die eine Ecke  $G$  gemeinsam haben, gehen die Seiten, welche dieser Ecke gegenüber liegen, durch einen Punkt  $G^{**}$  von  $C^3$ .













Wir schliessen daraus allgemein: Verbinden wir einen Sternpunkt mit dem gleichnamigen doppelten Sternpunkte, so schneidet diese Gerade aus  $C^3$  einen dritten Punkt  $S_1$ , der auf der Tangente des zu den Sternpunkten gleichnamigen Grundpunktes liegt. Zugleich befindet sich  $S_1$  auf einem Kegelschnitt, welcher durch diesen Grundpunkt, den Sternpunkt und die Grundpunkte der anderen Reciprocität geht.

### c) Constructionen aus Kegelschnittbüscheln und Kegelschnittschaaren.

Im Gegensatze zu den Linealconstructionen, welche uns stets nur ein Element der Curven  $C^3$  und  $C_3$  geben, behandeln wir jetzt solche Constructionen, bei denen die Elemente paarweise gefunden werden. Wir erhalten für diese Constructionen die bequemste Form, indem wir die Curven aus Kegelschnittbüscheln oder Schaaren hervorbringen. Wir leiten daher einige solche Erzeugungen ab, welche durch die Reciprocitäten  $(ABC\Delta)$  und  $(A_1B_1C_1\Delta_1)$  vermittelt werden.

Wir beginnen damit die Punktetripel der  $C^3$  den Punkten einer beliebigen Geraden  $g$  zuzuordnen. Wir zeichnen also die Kegelschnitte, welche den Punkten  $X$  von  $g$  in  $(ABC\Delta)^2$  und  $(A_1B_1C_1\Delta_1)^2$  entsprechen. Diese Kegelschnitte bilden zwei Büschel. Ihre resp. Grundpunkte sind  $ABC$ ,  $A_1B_1C_1$  und die Punkte  $G, G_1$ , welche der Geraden  $g$  in den Reciprocitäten  $(ABC\Delta)$  und  $(A_1B_1C_1\Delta_1)$  correspondiren. Durch jeden Punkt  $X$  geht ein Kegelschnitt des einen und ein Kegelschnitt des anderen Büschels. Beide Kegelschnitte haben ausser  $X$  drei gemeinsame Punkte. Sie liegen auf  $C^3$ . Ihre Verbindungslinien mit  $X$  sind Tangenten von  $C_3$ . Wir schliessen daher:

Construiren wir in zwei Kegelschnittbüscheln durch jeden Punkt  $X$  einer Geraden  $g$ , welche einen Grundpunkt  $G$  des einen Büschels mit einem Grundpunkte  $G_1$  des anderen verbindet, die zwei Kegelschnitte, so liegen ihre drei weiteren gemeinsamen Punkte auf einer  $C^3$ . Die Verbindungslinien dieser Punkte mit  $X$  berühren eine  $C_3$ . Die Grundpunkte, welche nicht in  $g$  liegen, gehören  $C^3$  an und bilden zwei Dreiecke, deren Seiten  $C_3$  berühren.

In dualer Weise können wir  $C^3$  und  $C_3$  erzeugen. Wir gehen von zwei Kegelschnittschaaren aus. Wir bringen diese mit einem Strahlenbüschel in Verbindung, dessen Scheitel  $T$  im Schnittpunkte einer Grundtangente  $t$  der einen Schaar mit einer Grundtangente  $t_1$  der anderen Schaar liegt. Durch jeden Strahl  $x$  des Büschels wird ein Kegelschnitt der einen und ein Kegelschnitt der anderen Schaar bestimmt. Beide Kegelschnitte haben ausser  $x$  noch drei weitere Tangenten. Sie umhüllen eine  $C_3$  und schneiden  $x$  in drei Punkten einer Curve dritter Ordnung. Die



werden können, treffen  $p$  in zwei Punkten der  $C^3$ . Dreht sich jetzt  $p$  um  $A$ , so werden die zu  $p$  gehörenden Punkte  $E$  stets nach der Relation  $(p, AB, AC, AE) = \Delta$  gefunden (A.3). Sie bilden folglich eine Reihe, welche zu dem Strahlenbüschel um  $A$  projectivisch ist.  $AB, AC$  sind die Strahlen des Büschels, welche ihre entsprechenden Punkte enthalten. Die Kegelschnitte, welche den Geraden  $p$  in  $(A_1 B_1 C_1 \Delta_1)^2$  entsprechen, bilden eine Schaar. Ihre Grundtangente sind  $a_1 b_1 c_1$  und die Linie  $a^*$ , welche dem Punkte  $A$  in der Reciprocität  $(A_1 B_1 C_1 \Delta_1)$  entspricht. Zu jeder Geraden  $p$  gehört ein Kegelschnitt der Schaar.  $C^3$  und  $C_3$  können daher in folgender Weise hervorgebracht werden:

Wir gehen von einer Kegelschnittschaar, einer Punkte-reihe und einem Strahlenbüschel aus, dessen Scheitel auf einer Grundtangente der Schaar liegt. Wir ordnen die Punkte der Reihe den Strahlen des Büschels projectivisch zu. Jeder Strahl  $x$  des Büschels berührt einen Kegelschnitt der Schaar. An ihn gehen durch den Punkt  $X$  der Reihe, welcher  $x$  entspricht, zwei Tangenten. Sie treffen  $x$  in zwei Punkten einer Curve  $C^3$  und sind Tangenten einer Curve dritter Classe.

Der duale Gedankengang führt ebenfalls zu einer Projectivität zwischen den Strahlen durch  $A$  und den Punkten auf  $a$  (A.4) und zu einem Kegelschnittbüschel, welches  $A_1 B_1 C_1 A^*$  zu Grundpunkten hat. Durch jeden Punkt  $X$  von  $a$  geht ein Kegelschnitt des Büschels, der von dem entsprechenden Strahle  $x$  in zwei Punkten einer  $C^3$  geschnitten wird. Verallgemeinern wir diese Darstellung, so erhalten wir  $C^3$  nach einem Gesetze, welches mit dem am Ende von 16 hervorgehobenen identisch ist. Wir sind also zu diesem Gesetze gelangt, indem wir einmal von einem Punktepaar  $G G^{**}$ , einer Geraden  $g$  und einer Projectivität um  $G^{**}$  ausgingen. Im zweiten Falle knüpften wir an die Projectivität um  $A$ , an  $a$  und  $A^*$  an. Wir sehen also, dass wir  $G G^{**} g$  durch  $A^* A a$  ersetzen können und schliessen daraus:

Um an Stelle eines Grundpunktdreiecks der  $C^3$  ein neues zu erhalten, gehen wir von einem beliebigen Punkte  $G$  von  $C^3$  aus, suchen die zugehörige Tangente  $g$  von  $C_3$  und den conjugirten Punkt  $G^{**}$ . Dann zeichnen wir die Projectivität, welche durch  $C^3$  um  $G^{**}$  und auf  $g$  bestimmt wird. Wir construiren in derselben die Strahlen, welche in ihren entsprechenden Punkte liegen. Diese Punkte und  $G^{**}$  können als Grundpunkte einer neuen Reciprocität betrachtet werden. Ihr Doppelverhältniss  $\Delta g$  ist gleich demjenigen, welches ein Strahlenpaar des Büschels um  $G^{**}$  mit den Strahlen bildet, die in ihren entsprechenden Punkten liegen.



Damit sind wir zu einer neuen Reihe von Fragen gelangt. Während wir nämlich bis jetzt von zwei bestimmten Reciprocitäten ausgingen und mit ihrer Hilfe die Curven  $C^3$  und  $C_3$  construirten, können wir nun eine gegebene Curve  $C^3$  oder  $C_3$  betrachten und untersuchen, wie sich diese durch Paare von Reciprocitäten darstellen lässt. Diese Untersuchungen werden uns zu besonderen Reciprocitäten führen, welche den Singularitäten der Curven  $C^3$  und  $C_3$  entsprechen und zu einer Construction aus neun beliebigen Elementen etc. Die Beantwortung dieser Fragen behalten wir uns für eine spätere Abhandlung vor.

# VI.

## Mathematische Miscellen.

Von

LEOPOLD SCHENDEL

in Berlin.

Fortsetzung.

### III. Das alternirende Exponentialdifferenzenproduct.

Bestimmt man die Elemente eines aus  $n$  Horizontal- und  $\nu$  Vertikalreihen bestehenden Gebildes von der Form

$$\binom{s_{\nu,\nu} + n - 1}{\nu - 1} x_{\nu}^{n-\nu} \dots \binom{s_{\nu,1} + n - 1}{0} x_{\nu}^{n-1}$$

$$\vdots \quad \ddots \quad \vdots$$

$$\binom{s_{\nu,\nu} + 0}{\nu - 1} x_{\nu}^{1-\nu} \dots \binom{s_{\nu,1} + 0}{0} x_{\nu}^0$$

oder von der Form

$$\binom{s_{\nu} + n - 1}{\nu - 1} x_{\nu}^{n-\nu} \dots \binom{s_{\nu} + n + \nu - 2}{\nu - 1} x_{\nu}^{n-1}$$

$$\vdots \quad \ddots \quad \vdots$$

$$\binom{s_{\nu} + 0}{\nu - 1} x_{\nu}^{1-\nu} \dots \binom{s_{\nu} + \nu - 1}{\nu - 1} x_{\nu}^0$$

in beliebiger Wahl unter der Voraussetzung

$$\nu_1 + \dots + \nu_{\mu} = n$$

für  $\nu = \nu_1, \dots, \nu_{\mu}$  und stellt die diesen Werthen entsprechenden Gebilde zu einer Determinante zusammen, so stellt sich in ihr, unabhängig von den mit  $s$  bezeichneten Grössen, das Differenzenproduct

$$(x_{\nu_1} - x_{\nu_2})^{\nu_1 \nu_2} (x_{\nu_1} - x_{\nu_3})^{\nu_1 \nu_3} \dots (x_{\nu_1} - x_{\nu_{\mu}})^{\nu_1 \nu_{\mu}}$$

$$(x_{\nu_2} - x_{\nu_3})^{\nu_2 \nu_3} \dots (x_{\nu_2} - x_{\nu_{\mu}})^{\nu_2 \nu_{\mu}}$$

$$\ddots \quad \vdots$$

$$(x_{\nu_{\mu-1}} - x_{\nu_{\mu}})^{\nu_{\mu-1} \nu_{\mu}}$$

dar, welches in dem Falle, wenn die in den Exponenten auftretenden  $\nu_1, \dots, \nu_{\mu}$  der Eins gleich sind, in das alternirende Differenzen-

product der Grössen  $x_{\nu_1}, \dots, x_{\nu_\mu}$  übergeht und daher als das alternirende Differenzenproduct der Grössen  $x_{\nu_1}, \dots, x_{\nu_\mu}$  mit den Exponenten  $\nu_1, \dots, \nu_\mu$  bezeichnet werden kann.

Im Falle  $\mu = 1$  hat die Determinante die Form

$$\begin{vmatrix} \binom{s_n + n - 1}{n - 1} x_{\nu}^0 & \dots & \binom{s_1 + n - 1}{0} x_{\nu}^{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{s_n + 0}{n - 1} x_{\nu}^{1-n} & \dots & \binom{s_1 + 0}{0} x_{\nu}^0 \end{vmatrix}$$

oder

$$\begin{vmatrix} \binom{s + n - 1}{n - 1} x_{\nu}^0 & \dots & \binom{s + 2n - 2}{n - 1} x_{\nu}^{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{s + 0}{n - 1} x_{\nu}^{1-n} & \dots & \binom{s + n - 1}{n - 1} x_{\nu}^0 \end{vmatrix}$$

und den Werth 1.

Bezeichnet man durch  $f(x)$  eine ganze Function  $n$ ten Grades mit dem höchsten Coefficienten 1, durch  $x_{\nu_1}, \dots, x_{\nu_\mu}$  die von einander verschiedenen Wurzeln der Gleichung  $f(x) = 0$  und durch  $\nu_1, \dots, \nu_\mu$  die Grade der Vielfachheit dieser Wurzeln, so tritt, wie wir im zweiten Artikel\* angegeben haben, die Determinante mit verschwindenden Grössen  $s$  bei der Zerlegung einer gebrochenen Function, deren Nenner die Function  $f(x)$  ist, in Partialbrüche und zwar bei der independenten Bestimmung der Partialzähler vermittelt der Wurzeln der Gleichung  $f(x) = 0$  auf und stellt das alternirende Differenzenproduct der Wurzeln  $x_{\nu_1}, \dots, x_{\nu_\mu}$  mit den Exponenten  $\nu_1, \dots, \nu_\mu$  dar. Die daselbst im Beispiel mit dem Werthe 72 aufgeführte Determinante ist das alternirende Differenzenproduct der Wurzeln 1, 2, -1 mit den Exponenten 3, 2, 1

$$(1 - 2)^{3 \cdot 2} (1 + 1)^{3 \cdot 1} (2 + 1)^{2 \cdot 1}$$

und also in der That gleich 1.8.9 oder 72.

Die ganze Function  $f(x)$  ist als von der Form

$$f(x) = (x - x_{\nu_1})^{\nu_1} \dots (x - x_{\nu_\mu})^{\nu_\mu}$$

durch den Quotienten zweier Determinanten darstellbar, von denen die eine das alternirende Differenzenproduct der Grössen  $x, x_{\nu_1}, \dots, x_{\nu_\mu}$  mit den

\* Band XXXVI S. 304. Ersetze auf S. 308 das gegebene durch das folgende Schema:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 10 & -9 & \dots & 5 & 2 & -3 & 0 & 21 & 73 & 3 & 10 & 72 & -72 \\ 5 & 15 & & 0 & & & & 7 & -70 & & & -1. \\ & 8 & & 9 & & & & & 1, & & & & \\ & & & 2, & & & & & & & & & \end{array}$$

Exponenten  $1, \nu_1, \dots, \nu_\mu$  und die andere das alternirende Differenzenproduct der Grössen  $x_{\nu_1}, \dots, x_{\nu_\mu}$  mit den Exponenten  $\nu_1, \dots, \nu_\mu$  darstellt.

Im Falle  $\mu = 1$  hat der Divisor den Werth 1 und der Dividendus die Form

$$\begin{vmatrix} x^n & \binom{s_n + n}{n-1} x_{\nu}^1 & \dots & \binom{s_1 + n}{0} x_{\nu}^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^0 & \binom{s_n + 0}{n-1} x_{\nu}^{1-n} & \dots & \binom{s_1 + 0}{0} x_{\nu}^0 \end{vmatrix}$$

oder die Form

$$\begin{vmatrix} x^n & \binom{s + n}{n-1} x_{\nu}^1 & \dots & \binom{s + 2n - 1}{n-1} x_{\nu}^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^0 & \binom{s + 0}{n-1} x_{\nu}^{1-n} & \dots & \binom{s + n - 1}{n-1} x_{\nu}^0 \end{vmatrix},$$

und es gelten daher die Gleichungen

$$(x - x_{\nu})^n = \begin{vmatrix} x^n x_{\nu}^0 & \binom{s_n + n}{n-1} & \dots & \binom{s_1 + n}{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^0 x_{\nu}^n & \binom{s_n + 0}{n-1} & \dots & \binom{s_1 + 0}{0} \end{vmatrix}$$

und

$$(x - x_{\nu})^n = \begin{vmatrix} x^n x_{\nu}^0 & \binom{s + n}{n-1} & \dots & \binom{s + 2n - 1}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^0 x_{\nu}^n & \binom{s + 0}{n-1} & \dots & \binom{s + n - 1}{n-1} \end{vmatrix}.$$

Entfernt man demnach in den rechtsseitigen Determinanten die erste Vertikalreihe und der Reihe nach je eine Horizontalreihe, so stellen sie den Binomialcoefficienten  $\binom{n}{\kappa}$  für die Werthe  $\kappa = 0, \dots, n$  dar.

Im Anschluss hieran sei bemerkt, dass die Determinanten

$$\begin{vmatrix} \binom{s + r + n - 1}{r + n - 1} & \dots & \binom{s + r + n - 1}{r + 0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{s + r + 0}{r + n - 1} & \dots & \binom{s + r + 0}{r + 0} \end{vmatrix}$$

und

$$\begin{vmatrix} \binom{s+r+n-1}{r+n-1} & \cdots & \binom{s+r+2n-2}{r+n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{s+r+0}{r+n-1} & \cdots & \binom{s+r+n-1}{r+n-1} \end{vmatrix}$$

gleiches und unter der Voraussetzung positiver ganzer Zahlen in Bezug auf die in ihnen vertretenen Grössen  $n, r, s$  symmetrische Grössen sind, deren Werth sich aus der ersteren dadurch ergibt, dass man in ihr das Product der Elemente der letzten Vertikalreihe durch das Product derselben Elemente mit verschwindendem  $s$  oder das Product der Elemente der ersten Horizontalreihe durch das Product derselben Elemente mit verschwindendem  $s$  und um  $s$  vergrössertem  $r$  dividirt. Im Falle  $r=1$  ist die erste Determinante dem ersten und im Falle  $s=1$  dem letzten Elemente ihrer ersten Horizontalreihe gleich.

#### IV. Zur Resultantenbildung.

Zur Darstellung der Resultante der Functionen

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 x^0$$

und

$$\varphi(x) = \alpha_m x^m + \cdots + \alpha_0 x^0$$

eignet sich nach Cayley die Function

$$\frac{f(x)\varphi(y) - f(y)\varphi(x)}{x - y},$$

die unter der Voraussetzung  $n \geq m$  eine symmetrische ganze Function der Grössen  $x$  und  $y$  vom Grade  $n-1$  ist.

Um sie als solche darzustellen, hat man unter der Voraussetzung der Bezeichnungen

$$\begin{vmatrix} a_\nu & a_{\nu_1} \\ \alpha_\nu & \alpha_{\nu_1} \end{vmatrix} = |\nu, \nu_1|$$

und

$$(\kappa, \kappa_1) = |\kappa + 1, \kappa_1| + |\kappa + 2, \kappa_1 - 1| + \cdots$$

aus den Coefficienten der gegebenen Functionen

$$\begin{array}{ccccccc} a_n & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_m & \cdots & \cdots & \alpha_0 \end{array}$$

von links nach rechts fortschreitend die Determinanten

$$\begin{array}{ccccccc} |n, n-1| & |n, n-2| & \cdots & |n, 1| & & |n, 0| \\ & |n-1, n-2| & \cdots & |n-1, 1| & & |n-1, 0| \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & & |2, 1| & & |2, 0| \\ & & & & & |1, 0| \end{array}$$

und aus ihnen durch Addition in der zur Diagonale senkrechten Richtung oder kurz durch schräge Addition die Grössen

$$\begin{array}{cccc}
 (n-1, n-1) & (n-1, n-2) & \dots & (n-1, 1) & (n-1, 0) \\
 & (n-2, n-2) & \dots & (n-2, 1) & (n-2, 0) \\
 & & \ddots & & \vdots \\
 & & & (1, 1) & (1, 0) \\
 & & & & (0, 0)
 \end{array}$$

zu bilden und hierin die Horizontalreihen so zu vervollständigen, dass die in der Diagonale sich kreuzenden Horizontal- und Vertikalreihen der Reihe nach dieselben Grössen enthalten. Multiplicirt man alsdann in dem dadurch entstehenden  $n$  stufigen Gebilde

$$\begin{array}{cccc}
 (n-1, n-1) & (n-1, n-2) & \dots & (n-1, 1) & (n-1, 0) \\
 (n-1, n-2) & (n-2, n-2) & \dots & (n-2, 1) & (n-2, 0) \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 (n-1, 1) & (n-2, 1) & \dots & (1, 1) & (1, 0) \\
 (n-1, 0) & (n-2, 0) & \dots & (1, 0) & (0, 0)
 \end{array}$$

der Reihe nach die Horizontalreihen mit  $x^{n-1}, \dots, x^0$  und die Vertikalreihen mit  $y^{n-1}, \dots, y^0$ , so stellt die Summe der in dieser Weise erzeugten Grössen die Cayley'sche Function dar und die in dem Gebilde verzeichneten Grössen sind die Coefficienten dieser Function.

Die Resultante der gegebenen Functionen ist nun darstellbar für

$$w = 0, \dots, m$$

durch eine  $(n + m - w)$  stufige Determinante, die in den ersten  $m - w$  Horizontalreihen die Coefficienten der Function  $f(x)$

$$a_n, \dots, a_0$$

mit

$$0, m - w - 1; \dots; m - w - 1, 0$$

und in den letzten  $n - w$  Horizontalreihen die Coefficienten der Function  $\varphi(x)$

$$\alpha_m, \dots, \alpha_0$$

mit

$$0, n - w - 1; \dots; n - w - 1, 0$$

vorangehenden und bezw. folgenden Nullen enthält und in den mittleren  $w$  Horizontalreihen mit  $m - w$  Nullen beginnend sich weiter der Reihe nach mit den, von unten gerechnet, ersten  $w$  Horizontalreihen des Coefficientengebildes der zu den Functionen gehörigen Cayley'schen Function deckt, und ferner für

$$w = m, \dots, n$$

durch eine mit dem Divisor  $a_n^{w-m}$  verbundene  $n$  stufige Determinante, die in den ersten  $w$  Horizontalreihen der Reihe nach mit den, von unten ge-

rechnet, ersten  $w$  Horizontalreihen des Coefficientengebildes der Cayley'schen Function übereinstimmt und in den letzten  $n - w$  Horizontalreihen die Coefficienten der Function  $\varphi(x)$

$$\alpha_m, \dots, \alpha_0$$

mit

$$w - m, n - w - 1; \dots; n - m - 1, 0$$

vorangehenden und bezw. folgenden Nullen enthält; ausserdem stellt dem Falle  $w = n$  entsprechend das Coefficientengebilde der Cayley'schen Function, durch zwei vertikale Striche in eine Determinante, die Determinante der Cayley'schen Function, umgewandelt, in der Verbindung mit dem Divisor  $(-1)^{\binom{n}{2}} a_n^{n-m}$  die Resultante dar.

Hiernach hat die Resultante der Functionen

$$f(x) = 2x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 19x^2 - 16x + 4$$

und

$$\varphi(x) = 3x^2 + 4x + 1$$

nach dem Schema

2	-5	-4	19	-16	4
0	0	0	3	4	1
<hr/>					
	0	0	6	8	2
		0	-15	-20	-5
			-12	-16	-4
				124	7
					-32
<hr/>					
	0	0	6	8	2
		6	-7	-18	-5
			-30	-21	-4
				120	7
					-32

die den Werthen  $w = 0, \dots, 5$  entsprechenden Formen

2	-5	-4	19	-16	4	0	2	-5	-4	19	-16	4
0	2	-5	-4	19	-16	4	0	2	-5	-4	7	-32
3	4	1	0	0	0	0	3	4	1	0	0	0
0	3	4	1	0	0	0	0	3	4	1	0	0
0	0	3	4	1	0	0	0	0	3	4	1	0
0	0	0	3	4	1	0	0	0	0	3	4	1
0	0	0	0	3	4	1						
<hr/>												
2	-5	-4	7	-32			2	-5	-4	7	-32	
8	-18	-21	120	7			8	-18	-21	120	7	
3	4	1	0	0			6	-7	-30	-21	-4	
0	3	4	1	0			0	3	4	1	0	
0	0	3	4	1			0	0	3	4	1	2

$$\left| \begin{array}{cccccc} 2 & -5 & -4 & 7 & -32 \\ 8 & -18 & -21 & 120 & 7 \\ 6 & -7 & -30 & -21 & -4 \\ 0 & 6 & -7 & -18 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{array} \right| : 4, \quad \left| \begin{array}{cccccc} 2 & -5 & -4 & 7 & -32 \\ 8 & -18 & -21 & 120 & 7 \\ 6 & -7 & -30 & -21 & -4 \\ 0 & 6 & -7 & -18 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 2 \end{array} \right| : 8$$

und überdies die Form

$$\left| \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 6 & 8 & 2 \\ 0 & 6 & -7 & -18 & -5 \\ 6 & -7 & -30 & -21 & -4 \\ 8 & -18 & -21 & 120 & 7 \\ 2 & -5 & -4 & 7 & -32 \end{array} \right| : + 8,$$

zu deren Herstellung mittelst schräger Addition das Schema

$$\begin{array}{cccccc} 2 & -5 & -4 & 19 & -16 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ \hline & 0 & 0 & 6 & 8 & 2 \\ & & 0 & -15 & -20 & -5 \\ & & & -12 & -16 & -4 \\ & & & & 124 & 7 \\ & & & & & -32 \end{array}$$

genügt.

Ersetzt man in der Cayley'schen Function die Potenzen  $x^r$  und  $y^r$  für  $r = 0, \dots, n-1$  durch die beliebigen Grössen  $x_r$  und  $y_r$ , so geht sie in eine bilineare Form  $n$ ter Ordnung der Grössen  $x_0, \dots, x_{n-1}$  und  $y_0, \dots, y_{n-1}$  und im Falle  $y_r = x_r$  in eine quadratische Form  $n$ ter Ordnung der Grössen  $x_0, \dots, x_{n-1}$  über, und ihre Determinante ist die Determinante dieser bilinearen und bezw. quadratischen Form.

### V. Zur Theorie der Sturm'schen Functionen.

Unter der Voraussetzung

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_0 x^0$$

und  $a_n = 1$  ist die Resultante der Functionen

$$f(y), \quad f'(y)(x - y),$$

wenn  $x_1, \dots, x_n$  die Wurzeln der Gleichung  $f(x) = 0$  sind, in der Form

$$f'(x_1) \dots f'(x_n) \cdot f(x)$$

darstellbar und somit in der Verbindung mit dem Factor  $(-1)^{\binom{n}{2}}$  gleich der Function  $f(x)$ , multiplicirt mit dem Producte der quadriten Wurzel-differenzen der Gleichung  $f(x) = 0$ .

In der Verbindung mit dem Factor  $(-1)^{\binom{n}{2}}$  stellt sie sich aber durch die Determinante der Cayley'schen Function



$$\frac{f(y)f'(z)(x-z) - f(z)f'(y)(x-y)}{y-z}$$

oder der ihr entsprechenden Hermite'schen quadratischen Form  $n$ ter Ordnung, also beispielsweise für

$$f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$$

nach dem Schema

1	- 1	- 3	5	- 2	
0	4	- 3	- 6	5	$x$
4	- 3	- 6	5	0	
1	- 1	- 3	5	- 2	
<hr/>					
	$4x - 1$	$- 3x - 6$	$- 6x + 15$	$5x - 8$	
		$15x + 3$	$- 14x - 10$	$3x + 6$	
			$33x - 15$	$- 21x + 12$	
				$13x - 10$	

mittelst schräger Addition in der Form

$4x - 1$	$- 3x - 6$	$- 6x + 15$	$5x - 8$
$- 3x - 6$	$9x + 18$	$- 9x - 18$	$3x + 6$
$- 6x + 15$	$- 9x - 18$	$36x - 9$	$- 21x + 12$
$5x - 8$	$3x + 6$	$- 21x + 12$	$13x - 10$

dar.

Folglich ist diese Determinante gleich der in das Product der quadrirten Wurzeldifferenzen der Gleichung  $f(x) = 0$  multiplicirten Function  $f(x)$ .

Wir bezeichnen sie als eine ganze Function  $n$ ten Grades von  $x$  durch  $S_n(x)$  und ferner durch  $S_r(x)$  als eine ganze Function  $r$ ten Grades von  $x$  die Determinante, die aus ihr durch Entfernung der  $n - r$  letzten Horizontal- und Vertikalreihen entsteht. Bemerken wir noch, dass sie für den Fall  $r = 0$  durch die Entfernung aller Horizontal- und Vertikalreihen in den Coefficienten 1, den man ihr beifügen kann, übergeht, so gehen also die Functionen

$$S_r(x), r = 0, \dots, n,$$

die in dem angeführten Beispiele sich in der Form

$$1, 4x - 1, 27(x^2 + x - 2), 0, 0$$

darstellen, der Reihe nach aus der Determinante dadurch hervor, dass man in ihr nach einander die  $n, \dots, 0$  letzten Horizontal- und Vertikalreihen entfernt, und dasselbe gilt, wenn wir in der Function  $S_r(x)$  den höchsten Coefficienten durch  $s_r$  bezeichnen, von den Grössen

$$s_r, r = 0, \dots, n$$

bezüglich der Determinante, welche die Grösse  $s_n$  oder das Product der quadrirten Wurzeldifferenzen der Gleichung  $f(x) = 0$  darstellt.

Die Functionen

$$S_r(x), r = 0, \dots, n$$

sowohl, als auch die Grössen

$$s_r, r = 0, \dots, n$$

bilden Sturm'sche Reihen.

Während die ersteren, welche in der Verbindung mit constanten Factoren für den Kettenbruch, der sich aus der mit den ganzen Resten entgegengesetzten Zeichens fortgesetzten Division der Functionen  $f(x)$  und  $f'(x)$  für die gebrochene Function  $f(x) : f'(x)$  ergibt, die Zähler der Näherungswerthe darstellen, für einen gegebenen reellen Werth von  $x$  durch die Anzahl der Zeichenwechsel in ihrer Zeichenreihe für die Gleichung  $f(x) = 0$  die Anzahl der von einander verschiedenen Paare complexer Wurzeln, vermehrt um die Anzahl der von einander verschiedenen reellen Wurzeln, die grösser als jener Werth sind, bestimmen, ergibt sich aus der Anzahl der Zeichenwechsel in der Zeichenreihe der letzteren die Anzahl der von einander verschiedenen Paare complexer Wurzeln selbst, und die Differenz der Zeichenwechsel in diesen Zeichenreihen giebt die Anzahl der von einander verschiedenen reellen Wurzeln, die grösser als der gegebene Werth sind, an.

Verschwinden die Grössen  $s_r, r = 0, \dots, n$  für einen jeden den Werth  $\mu$  überragenden Werth des Index  $r$ , nicht aber für den Index  $r = \mu$ , so verschwinden auch die Functionen  $S_r(x), r = 0, \dots, n$  identisch für einen jeden den Werth  $\mu$  überragenden Werth des Index  $r$ , nicht aber für den Index  $r = \mu$ . Die Gleichung  $f(x) = 0$  hat alsdann  $\mu$  von einander verschiedene Wurzeln vielfachen Grades, und es ist die Gleichung  $\mu$ ten Grades  $S_\mu(x) = 0$  die Gleichung, welche die  $\mu$  von einander verschiedenen Wurzeln der Gleichung  $f(x) = 0$  zu Wurzeln hat, und ihr höchster Coefficient  $s_\mu$  stellt für die Gleichung  $f(x) = 0$ , sofern nur die von einander verschiedenen Wurzeln in Betracht gezogen werden, das in das Product ihrer Vielfachheitsgrade multiplicirte Product der quadrirten Wurzeldifferenzen dar. Je nachdem er positiv oder negativ ist, befindet sich unter diesen Wurzeln eine gerade oder ungerade Anzahl von Paaren complexer Wurzeln.

Da die durch  $S_n(x)$  bezeichnete Determinante der Cayley'schen Function

$$\frac{f(y)f'(z)(x-z) - f(z)f'(y)(x-y)}{y-z}$$

einerseits die Resultante der Functionen

$$f(y), f'(y)(x-y)$$

in der Verbindung mit dem Factor  $(-1)^{\binom{n}{2}}$  und andererseits die in das Product der quadrirten Wurzeldifferenzen der Gleichung  $f(x) = 0$  multi-

plicirte Function  $f(x)$  darstellt, so ist übrigens offenbar das Product der quadrirten Wurzeldifferenzen der Gleichung  $f(x) = 0$  sowohl in der Verbindung mit dem Factor  $(-1)^{\binom{n}{2}}$  die Resultante der Functionen

$$f(y), \quad f'(y),$$

als auch in der Verbindung mit dem Factor  $(-1)^{\binom{n}{2}} a_0$  die Resultante der Functionen

$$f'(y)y, \quad f(y).$$

Um darnach beispielsweise das durch die Grösse

$$(-1)^{\binom{n}{2}} (n+1)^{n-1}$$

gegebene Product der quadrirten Wurzeldifferenzen für die Function

$$x^n + \dots + x^0$$

darzustellen, hat man das Schema

$n$	$n-1$	$n-2$	$\dots$	$1$	$0$
$1$	$1$	$1$	$\dots$	$1$	$1$
	$1$	$2$	$\dots$	$n-1$	$n$
		$1$	$\dots$	$n-2$	$n-1$
			$\dots$		$\cdot$
			$\cdot$		$\cdot$
			$1$		$2$
					$1$

oder ein Schema zu bilden, in dem die ersten zwei Zeilen

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{array}$$

sind und die folgenden aus den entsprechenden Zeilen des vorigen Schemas dadurch hervorgehen, dass man sämtliche Grössen in der ersten Zeile von  $n+1$  und in den folgenden Zeilen von  $0$  subtrahirt.

Die vermittelt schräger Addition aus dem Schema

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ & 1 & \dots & n-2 & n-1 \\ & & \dots & & \cdot \\ & & & & \cdot \\ & & & 1 & 2 \\ & & & & 1 \end{array}$$

hervorgehende algebraisch-symmetrische Determinante, die sich aus den Grössen  $1, \dots, n$  in der Weise zusammensetzt, dass die von links und bzw. unten in der zweiten Diagonalreihe sich treffenden Horizontal- und Vertikalreihen bis zum Treffpunkte der Reihe nach thunlichst ihre  $1, \dots, n$ fachen Werthe als Elemente enthalten, und die nur in der Form eine Aenderung erleidet, wenn die sämtlichen Elemente rechts von der

zweiten Diagonalreihe mit dem Minuszeichen versehen und die übrigen Elemente von  $n + 1$  subtrahirt werden, hat daher den Werth

$$(-1)^{\binom{n}{2}}(n+1)^{n-1}$$

und stellt das Product der quadrirten Wurzeldifferenzen der Gleichung

$$x^n + \dots + x^0 = 0$$

dar. So ist in dem Falle  $n = 4$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -4 & -2 \\ 1 & -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = +5^3$$

das Product der quadrirten Wurzeldifferenzen der Gleichung  $x^4 + \dots + x^0 = 0$ .

Berlin, 11. December 1891.

## VII.

# Ueber bedingt periodische Bewegungen eines materiellen Punktes auf Oberflächen zweiter Ordnung mit besonderer Berücksichtigung der Grenzfälle.

Von  
OTTO PUND.

---

### Erster Abschnitt.

## Ueber die Bewegung eines materiellen Punktes auf einer Oberfläche zweiter Ordnung im Allgemeinen.

### § 1.

#### Allgemeine Form der beiden ersten Integrale.

Wir nehmen an, dass ein materieller Punkt, dessen Masse der Einfachheit halber als Einheit zu Grunde gelegt werden möge, sich auf einer Fläche zweiter Ordnung

$$1) \quad f(x, y, z) = 0$$

unter dem Einfluss einer Kraft bewegt, deren Componenten sich als die partiellen Derivirten einer von der Zeit unabhängigen Kräftefunction  $U(x, y, z)$  darstellen lassen. Durch Accente bezeichnen wir die Ableitungen nach der Zeit  $t$ , durch die Indices 1, 2, 3 die nach  $x, y, z$  und setzen zur Abkürzung

$$2) \quad F = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2, \\ \Omega = f_{11}x'^2 + f_{22}y'^2 + f_{33}z'^2 + 2f_{23}y'z' + 2f_{31}z'x' + 2f_{12}x'y'.$$

Versteht man dann unter  $\lambda$  eine gewisse Function von  $t$ , die sich durch den Normalwiderstand  $N$  der Fläche in der Form  $\lambda = \frac{N}{F}$  ausdrücken lässt, so kann man die Bewegungsgleichungen in folgender Form darstellen:

$$3) \quad \begin{aligned} x'' &= \lambda f_1 + U_1, \\ y'' &= \lambda f_2 + U_2, \\ z'' &= \lambda f_3 + U_3. \end{aligned}$$

Wir multipliciren nun die beiden Seiten derselben der Reihe nach mit

$$4) \quad \begin{array}{ccc} x', & y', & z', \\ f_1, & f_2, & f_3, \\ f_1', & f_2', & f_3', \end{array}$$

addiren jedesmal und beachten dabei die während der Bewegung immer erfüllten Gleichungen

$$5) \quad \frac{df}{dt} \equiv f_1 x' + f_2 y' + f_3 z' = 0,$$

$$6) \quad \frac{d^2 f}{dt^2} \equiv f_1 x'' + f_2 y'' + f_3 z'' + \Omega = 0,$$

sowie die folgende für Oberflächen zweiter Ordnung geltende Gleichung

$$7) \quad f_1' x'' + f_2' y'' + f_3' z'' = \frac{1}{2} \Omega'.$$

Aus der ersten der auf diese Weise entstehenden neuen Gleichungen

$$8) \quad x' x'' + y' y'' + z' z'' = U'$$

ergibt sich mit Einführung der Constanten  $h$  das Integral der lebendigen Kraft

$$I) \quad \frac{1}{2} (x'^2 + y'^2 + z'^2) = U + h;$$

aus den beiden anderen

$$9) \quad -\Omega = \lambda F + \sum_k U_k f_k, \\ 10) \quad \frac{1}{2} \Omega' = \frac{\lambda}{2} F' + \sum_k U_k f_k' \quad (k = 1, 2, 3)$$

leitet man durch Elimination von  $\lambda$

$$11) \quad \frac{d}{dt} (F \Omega) = 2F \sum_k U_k f_k' - F' \sum_k U_k f_k$$

ab. Nehmen wir nun an, dass sich die rechte Seite dieser Gleichung als der Differentialquotient einer Function  $\Psi$  von  $x, y, z$  darstellen lasse,

$$12) \quad \Psi' = 2F \sum_k U_k f_k' - F' \sum_k U_k f_k,$$

so ergibt sich mit Einführung einer Constanten  $k$  ein zweites Integral

$$II) \quad F \Omega = \Psi + k.$$

Die Constanten  $h$  und  $k$  müssen so beschaffen sein, dass sich aus 5), I), II) reelle Werthe von  $x', y', z'$  ergeben. Den Integralen kann man eine geometrische Bedeutung beilegen. Bezeichnet man nämlich den Krümmungsradius des Normalschnittes der Fläche, in welchem sich der materielle Punkt momentan bewegt mit  $\varrho$ , so ist

$$13) \quad \varrho = \frac{2F^{\frac{3}{2}}(U + h)}{\Psi + k}.$$

Da unter den gemachten Annahmen zwei Integrale unseres Bewegungsproblemekes bekannt sind, so kann man aus allgemeinen Theorien Jacobi's schliessen, dass sich das Problem mit Hilfe von Quadraturen lösen lässt.\*

\* Dies folgt aus der Theorie des letzten Multiplikators oder aus der Zurückführung des mechanischen Problems auf partielle Differentialgleichungen. Jacobi, *Vorl. über Dynamik*. 22 Vorl. 2 Ausg. (Werke, Supplementband), S. 175.



$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1' & f_2' & f_3' \end{vmatrix}$$

verschwindet. Das Verschwinden der Determinante drückt aber aus, dass sich der materielle Punkt auf einer Krümmungslinie der Fläche bewegt.

Die Bewegungen auf Krümmungslinien, welche die Integrale I) und II) zulassen, müssen also noch daraufhin untersucht werden, ob sie den ursprünglichen Differentialgleichungen 3) der Bewegung Genüge leisten. Diese Untersuchung wird daher bei den unten behandelten speciellen Beispielen durchgeführt werden.

Man kann das soeben erhaltene Resultat noch auf einem andern Wege ableiten, nämlich aus der Gleichung

$$17) \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1' & f_2' & f_3' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ x'' - U_1 & y'' - U_2 & z'' - U_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x'^2 + y'^2 + z'^2 & 0 & x'x'' + y'y'' + z'z'' - U' \\ 0 & F & -\Omega + \sum_k U_k f_k \\ \Omega & \frac{1}{2}F' & \frac{1}{2}\Omega' - \sum_k U_k f_k' \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) \frac{d}{dt} \left\{ F\Omega - \Psi \right\} - F\Omega \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) - U \right\}$$

die man leicht erhält, wenn man die Gleichungen 5), 6), 7) und die folgende

$$f_1'x' + f_2'y' + f_3'z' = \Omega$$

berücksichtigt, und die für einen speciellen Fall schon von Gehring angegeben ist.\* Sie lehrt unmittelbar, dass die Integrale I) und II) bei der Bewegung auf einer Krümmungslinie Giltigkeit haben.

Die im Vorstehenden entwickelte Integrationsmethode\*\* wollen wir jetzt auf zwei Probleme zur Anwendung bringen.

## § 2.

### Erstes Beispiel.

Wir nehmen an, dass die gegebene Oberfläche zweiter Ordnung eine Rotationsfläche und dass die Kräftefunction in den Parallelkreisen constant sei. Wählen wir die Z-Achse zur Rotationsachse und setzen die Gleichung der Fläche in der Form

$$1a) \quad 2f \equiv x^2 + y^2 - \varphi^2(z) = 0, \quad \varphi^2(z) \equiv az^2 + 2bz + c$$

gegeben voraus, so ergibt sich

\* Hesse, Vorlesungen über analyt. Geom. des Raumes. 23. Vorl. S. 326 fig.

\*\* Sie ist für den speciellen Fall der geodätischen Linien von Joachimsthal (Journ. für Math. Bd. 26, S. 161 fig.) entwickelt, später von Schellbach (Journ. für Math. Bd. 54) und St. Germain (Journ. d. Mathém. 3. série, tome 3) auch auf einige andere Fälle zur Anwendung gebracht worden.



$$\Omega = x'^2 + y'^2 - az'^2, \quad \Psi = 2(b^2 - ac)U(z),$$

und es lauten die Integrale

$$\text{Ia)} \quad \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) = 2U(z) + h,$$

$$\text{IIa)} \quad \varphi^2(z)[1 + \varphi'(z)^2](x'^2 + y'^2 - az'^2) = 2(b^2 - ac)U(z) + k'.$$

Bekanntlich gilt für eine beliebige Rotationsfläche das Flächenintegral; man erhält es aus den beiden obigen Gleichungen, wenn man die beiden Seiten der ersten mit  $b^2 - ac$  multiplicirt und von den entsprechenden der zweiten subtrahirt, nach einigen Umformungen in der Gestalt

$$\text{IIa')} \quad xy' - yx' = k,$$

wo

$$k = \sqrt{\frac{k' - 2h(b^2 - ac)}{1 + a}}$$

die doppelte Flächengeschwindigkeit der auf die Ebene eines Parallelkreises projecirten Bewegung ausdrückt.

Drückt man nun die Bedingung dafür aus, dass  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  sich aus den Integralen Ia), IIa') und der Gleichung

$$xx' + yy' - \varphi(z)\varphi'(z)z' = 0$$

als reelle Grössen ergeben müssen, so erhält man

$$R(z) \equiv 2[U(z) + h]\varphi^2(z) - k^2 \geq 0,$$

oder, da  $x^2 + y^2 = \varphi^2(z)$  ist, kann man diese Bedingung unabhängig von der Gleichung der Rotationsfläche in der Gestalt

$$2[U(z) + h](x^2 + y^2) - k^2 \geq 0$$

schreiben und in einfacher Weise geometrisch deuten: Die Gebiete auf der gegebenen Rotationsfläche, in welchen sich der materielle Punkt überhaupt befinden kann, werden von Parallelkreisen begrenzt, welche durch den Schnitt mit der Rotationsfläche

$$x^2 + y^2 = \frac{k^2}{2[U(z) + h]}$$

entstehen. Auf die weitere Bedeutung dieser Rotationsfläche für den Charakter der Bewegung gehen wir im zweiten Abschnitt noch genauer ein.

### § 3.

#### Zweites Beispiel.

Um ein weiteres Beispiel zu behandeln, auf welches unsere Integrationsmethode Anwendung findet, bemerken wir, dass  $\Psi'$  in die Form gebracht werden kann:

$$\Psi' = -\frac{d}{dt}(F \Sigma U_k f_k) + F \Sigma (3 U_k f_k' + U_k' f_k).$$

Wenn wir nun annehmen, dass zwischen  $U$  und  $f$  die Beziehungen

$$18) \quad \Sigma U_k f_k' = 0, \quad \Sigma U_k' f_k = 0$$

stattfinden, in welchem Falle dann

$\Sigma U_k f_k$  einer Constanten  $g$  gleich ist, so nimmt das zweite Integral die Form

$$F(\Omega + g) = k$$

an. Da  $U$  und  $f$  ihre Rollen vertauschen können, so erhalten wir auf diese Weise zwei Bewegungsprobleme, wenn  $U$  vom zweiten Grade ist.

Es sei nun die Gleichung der Oberfläche die eines auf seine Hauptachsen bezogenen Ellipsoides

$$1b) \quad 2f \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \quad (a > b > c)$$

so erkennt man leicht, dass den soeben angegebenen Bedingungen Genüge geleistet wird durch

$$U = \frac{1}{2}g(x^2 + y^2 + z^2),$$

dass

$$F = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}, \quad \Omega = \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2}$$

ist, und dass die Integrale lauten:

$$Ib) \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 - g(x^2 + y^2 + z^2) = 2h,$$

$$IIb) \quad \left( \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right) \left( \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} + g \right) = k.$$

Aus der Form der Kräftefunction ist unmittelbar ersichtlich, dass wir es hier mit einer vom Mittelpunkte des Ellipsoids ausgehenden, der Entfernung proportionalen, und, wenn wir  $g > 0$  annehmen, abstossenden Kraft zu thun haben. Vertauschen wir die Rollen von  $f$  und  $U$ , so erhalten wir ein von C. Neumann behandeltes Problem.\* Man kann die Bahncurve des materiellen Punktes, wie sich aus den Integralen Ib) und IIb) ergibt, auch auf folgende Weise geometrisch definiren. Bezeichnet man die Entfernung des materiellen Punktes vom Centrum des Ellipsoides mit  $r$ , die Länge des Lothes vom Mittelpunkte auf die Tangentialebene, welche an das Ellipsoid in dem betrachteten Punkte errichtet ist, mit  $p$  und endlich den zur Bewegungsrichtung parallelen Radiusvector des Ellipsoides mit  $d$ , so ergibt sich aus

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad p^2 = \frac{1}{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}, \quad d^2 = \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2}}$$

und den Integralen leicht

$$kp^2 d^2 - g(d^2 + r^2) = 2h \quad \text{oder} \quad d = \sqrt{\frac{2h + gr^2}{kp^2 - g}}.$$

Auf diese Beziehung kommt man auch sofort, wenn man in die oben angegebene Gleichung 13) die speciellen Werthe einsetzt und beachtet,

dass  $\rho = \frac{d^2}{p}$  ist.

\* Neumann, De problemate quodam mechanico, quod ad primam integralium ultraellipticorum classem revocatur. Journal für Mathematik Bd. 56, S. 46.

Für den Fall, dass  $g = 0$  ist, erhält man die von Joachimsthal\* angegebene geometrische Interpretation für die geodätischen Linien auf dem Ellipsoid  $pd = \sqrt{\frac{2h}{k}}$ .

Es ist leicht zu ersehen, dass wir das Ellipsoid durch ein einschaliges und zweischaliges Hyperboloid ersetzen könnten. Wenn wir aber ein Paraboloid zu Grunde legen, so nimmt die Kräftefunction eine andere, aber noch einfachere Gestalt an, zu der wir auch durch einen Grenzübergang gelangen können. Transformiren wir nämlich die Gleichung des Ellipsoids dadurch, dass wir  $a + x$  an Stelle von  $x$  setzen, oder geometrisch gesprochen, verrücken wir den Anfangspunkt des Coordinatensystems vom Mittelpunkte des Ellipsoids in der Richtung der positiven X-Achse bis zum Scheitel, und setzen dann für  $a, b, c, g$  resp.  $\omega^2, b\omega, c\omega, \frac{g}{2\omega^2}$  ein, so wird die Gleichung des Ellipsoids

$$2\omega^2 f \equiv \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2x + \frac{x^2}{\omega^2} = 0$$

und die Kräftefunction nimmt die Form

$$U = gx + \frac{1}{2} \frac{g}{\omega^2} (x^2 + y^2 + z^2) + \frac{1}{2} g\omega^2$$

an. Beachten wir nun, dass das constante Glied in letzterer fortgelassen werden kann, da in den Bewegungsgleichungen nur ihre Ableitungen vorkommen, und lassen wir, nachdem solches geschehen ist,  $\omega$  über alle Grenzen hinaus wachsen, so geht die Gleichung des Ellipsoids in die eines elliptischen Paraboloids

$$2f \equiv \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2x = 0$$

über, und die Kräftefunction nimmt die Gestalt

$$U = gx$$

an. Man kann nachträglich leicht zeigen, dass auf diese Weise den Bedingungen 18) wirklich Genüge geleistet wird. Nehmen wir nun die positive Richtung der X-Achse nach unten gerichtet an, so wendet das Paraboloid seine concave Seite nach oben, und auf den materiellen Punkt wirkt eine constante nach unten gerichtete Kraft, wenn ausserdem  $g > 0$  vorausgesetzt wird.

---

\* Journal für Mathematik Bd. 26, S. 168.

## Zweiter Abschnitt.

## Die Bewegungen auf den Rotationsflächen zweiter Ordnung.

## § 1.

## Bewegungen auf Krümmungscurven.

Um das im ersten Abschnitt angegebene Problem der Bewegung auf einer Rotationsfläche weiter zu behandeln, führen wir zum Zwecke der Separation der Variabeln in die Integrale Ia) und II'a) neue Coordinaten ein und setzen

$$1) \quad x = \varphi(z) \cos u, \quad y = \varphi(z) \sin u.$$

Dann ergibt sich

$$2) \quad \begin{cases} \varphi^2(z)[1 + \varphi'(z)^2]z'^2 - 2[U(z) + h]\varphi^2(z) - k^2 \\ \varphi^2(z)u' = k, \end{cases}$$

oder wir erhalten in separirter Form als Differentialgleichung der Bahncurve

$$3) \quad du = \frac{k \sqrt{1 + \varphi'(z)^2}}{\varphi(z) \sqrt{2[U(z) + h]\varphi^2(z) - k^2}} dz$$

und für die Zeit

$$4) \quad dt = \frac{\varphi(z) \sqrt{1 + \varphi'(z)^2}}{\sqrt{2[U(z) + h]\varphi^2(z) - k^2}} dz.$$

Wir beschäftigen uns zuvörderst mit der Frage nach den Bewegungen auf Krümmungslinien. Oben war bemerkt worden, dass die Integrale, aus denen sich die Gleichungen 2) ableiten, solche Bewegungen zulassen, ohne dass diese den ursprünglichen Bewegungsgleichungen zu genügen brauchen, und diese sind daher auszuschliessen. Wenn nun die Rotationsfläche keine Kugel ist, so existiren auf ihnen zwei Arten von Krümmungslinien, Meridiane und Parallelkreise.

Für eine Bewegung auf den ersteren hat man  $k = 0$  zu setzen und es lässt sich dann der Rückgang auf die ursprünglichen Differentialgleichungen der Bewegung ohne weitere Schwierigkeiten bewerkstelligen. Für die Zeit wird also

$$5) \quad dt = \frac{\sqrt{1 + \varphi'(z)^2}}{\sqrt{2[U(z) + h]}} dz.$$

Von den unter gewissen Bedingungen möglichen labilen Bewegungsformen abgesehen, finden auf dem Meridiane Oscillationen oder Circulationen des materiellen Punktes statt, und zwar erweist sich hier die Bedingung  $U(z) + h = 0$  von entscheidender Bedeutung.

Für eine Bewegung auf einem Parallelkreise würde  $z' = 0$  und der zugehörige Werth  $z = z_0$  eine Wurzel der Gleichung

$$6) \quad R(z) \equiv 2[U(z) + h]\varphi^2(z) - k^2 = 0$$

sein, wie aus der ersten der Gleichungen 2) unmittelbar ersichtlich ist. Aber diese Bedingung allein ist nicht ausreichend. In der That würden sich dann nach den Gleichungen 3) des ersten Abschnittes folgende Gleichungen für die Bewegung aufstellen lassen:

$$x'' = \lambda x, \quad y'' = \lambda y, \quad z' = \lambda \varphi(z) \varphi'(z) + U'(z) = 0$$

$$xx'' + yy'' + x'^2 + y'^2 = 0, \quad x'^2 + y'^2 = 2(U[z] + h)$$

und eliminirt man aus ihnen  $x'', y'', x', y', \lambda$ , so erhält man

$$7) \quad R'(z) \equiv 2\varphi(z)\{2[U(z) + h]\varphi'(z) + U'(z)\varphi(z)\} = 0$$

für  $z = z_0$ , so dass also  $z_0$  eine Doppelwurzel der Gleichung  $R(z) = 0$  ist. Und umgekehrt, hat der materielle Punkt eine solche Energie  $h$  und eine solche Flächengeschwindigkeit  $k$ , dass für einen bestimmten Werth  $z_0$  von  $z$  die Gleichung  $R(z) = 0$  eine Doppelwurzel besitzt, so muss sich der Punkt auf dem Parallelkreise  $z = z_0$  bewegen, wenn er zu Anfang darin war. Denn man kann, was sehr einfach ist und wohl nicht näher auseinanderzusetzen zu werden braucht, erstens zeigen, dass bei dieser Bewegungsart der Rückgang auf die ursprünglichen Differentialgleichungen der Bewegungen möglich ist, und zweitens, dass der materielle Punkt, wenn er sich überhaupt in der Umgebung des Parallelkreises bewegen kann, niemals aus demselben herausgekommen sein, ebenso wenig wie er andererseits in denselben jemals hineingelangen kann. Da nämlich  $R(z) = 0$  die Doppelwurzel  $z = z_0$  hat, muss  $R(z)$  sich in der Form  $(z - z_0)^2 R_1(z)$  darstellen lassen, wo  $R_1(z)$  für  $z = z_0$  einen von Null verschiedenen endlichen Werth annimmt, und man hat dann nach 4)

$$dt = \frac{\varphi(z) \sqrt{1 + \varphi^2(z)}}{(z - z_0) \sqrt{R_1(z)}} dz.$$

Wenn nun in der Umgebung des Parallelkreises  $z = z_0$  eine Bewegung möglich ist, so muss  $R_1(z)$  für diese  $> 0$  sein, und man kann dann aus der eben abgeleiteten Differentialgleichung das Behauptete leicht bewahrheiten. Die Bewegung könnte man daher als eine asymptotisch-singuläre bezeichnen, während, wenn in der Umgebung von  $z_0$   $R_1(z) < 0$  ist, dieselbe eine singuläre Bewegung genannt werden soll. In beiden Fällen findet in dem Parallelkreis  $z = z_0$  eine Berührung der Rotationsfläche und der Fläche

$$8) \quad x^2 + y^2 = \frac{k^2}{2[U(z) + h]}$$

statt, beim ersten ist für die Umgebung auf der Oberfläche



immer neuen Windungen die Rotationsfläche umkreisend sich immer mehr dem kritischen Parallelkreise nähert, ohne ihn aber jemals zu erreichen.

### § 3.

#### Geodätische Linien auf Rotationsellipsoiden.

Nach diesem Ueberblicke über die allgemeinen Verhältnisse wenden wir uns jetzt zu einigen speciellen Beispielen, um bei ihnen namentlich die Windungsverhältnisse der regulären Bewegungsformen zu studiren, nämlich zu den geodätischen Linien und der Bewegung eines schweren Punktes auf den Rotationsellipsoiden. Die Gleichung der Fläche sei

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Bei der Trägheitsbewegung, bei welcher zwischen den Constanten  $h$  und  $k$  die Ungleichung  $2ha^2 > k^2$  vorausgesetzt werden muss und wir zur Abkürzung

$$\alpha^2 = b^2 - \frac{k^2 b^2}{2ha^2}$$

setzen wollen, lautet die Differentialgleichung der Curve

$$du = \frac{\sqrt{b^2 - \alpha^2}}{a} \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)z^2 + b^4}}{(b^2 - z^2)\sqrt{\alpha^2 - z^2}} dz.$$

Die Bahn verläuft periodisch zwischen den Wendekreisen  $z = \alpha$  und  $z = -\alpha$  und während des Zeitabschnittes zwischen zwei auf einander folgenden Berührungen mit ihnen beschreibt der Radiusvector der Projection des Punktes auf die  $XY$ -Ebene einen Winkel, dessen Grösse durch

$$\omega = \frac{\sqrt{b^2 - \alpha^2}}{a} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)z^2 + b^4}}{(b^2 - z^2)\sqrt{\alpha^2 - z^2}} dz$$

ausgedrückt wird. Bringt man diesen Ausdruck auf die Form

$$\omega = b \sqrt{b^2 - \alpha^2} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\sqrt{1 + \frac{(b^2 - a^2)(b^2 - z^2)}{a^2 b^2}}}{(b^2 - z^2)\sqrt{\alpha^2 - z^2}} dz$$

und vergleicht ihn mit dem folgenden

$$\pi = b \sqrt{b^2 - \alpha^2} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{dz}{(b^2 - z^2)\sqrt{\alpha^2 - z^2}}, \quad (b^2 > \alpha^2)$$

so erkennt man, da im Integrationsintervall stets  $b^2 - z^2 > 0$  ist, dass  $\omega \geq \pi$  ist, je nachdem man  $b \geq a$  hat, also das Rotationsellipsoid ein

verlängertes, eine Kugel oder ein abgeplattetes ist. Man kann aber den Betrag, um den sich  $\omega$  von  $\pi$  unterscheidet, in einfacher Form darstellen.

Ist nämlich das Rotationsellipsoid ein verlängertes ( $b > a$ ), so werde

$$\beta^2 = \frac{b^4}{b^2 - a^2} (> b^2)$$

gesetzt, so dass

$$\omega = \frac{b^2 \sqrt{b^2 - a^2}}{a\beta} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\sqrt{\beta^2 - z^2} dz}{(b^2 - z^2) \sqrt{a^2 - z^2}} = \frac{2b^2 \sqrt{(b^2 - a^2)}}{a\beta} \int_0^{\alpha} \frac{\sqrt{\beta^2 - z^2} dz}{(b^2 - z^2) \sqrt{a^2 - z^2}}$$

ist; versteht man dann unter  $\omega_1$  das Integral

$$\omega_1 = \frac{2b^2 \sqrt{b^2 - a^2}}{a\beta} \int_{\beta}^{\infty} \frac{\sqrt{z^2 - \beta^2}}{(z^2 - b^2) \sqrt{z^2 - a^2}} dz,$$

so besteht die Gleichung

$$\omega = \pi + \omega_1.$$

Beim abgeplatteten Rotationsellipsoid ( $b < a$ ) dagegen wird mit Einführung von

$$\beta^2 = \frac{b^4}{a^2 - b^2},$$

$$\omega = \frac{b^2 \sqrt{b^2 - a^2}}{a\beta} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\sqrt{\beta^2 + z^2} dz}{(b^2 - z^2) \sqrt{a^2 - z^2}} = \frac{2b^2 \sqrt{b^2 - a^2}}{a\beta} \int_0^{\alpha} \frac{\sqrt{\beta^2 + z^2} dz}{(b^2 - z^2) \sqrt{a^2 - z^2}}$$

und es ergibt sich, wenn

$$\omega_1 = \frac{2b^2 \sqrt{b^2 - a^2}}{a\beta} \int_{\beta}^{\infty} \frac{\sqrt{z^2 - \beta^2}}{(z^2 + b^2) \sqrt{z^2 + a^2}} dz$$

gesetzt wird,

$$\omega = \pi - \omega_1.$$

Es kann nun vorkommen, dass die Bahncurven geschlossen sind; dann müssen  $\omega$  und  $\pi$  oder  $\omega_1$  und  $\pi$  in einem rationalen Verhältniss zu einander stehen. Wenn eine Schliessung nach  $n$  Umläufen und  $m$  Oscillationen erfolgt, unter einer Oscillation die Bewegung von einem Wendekreis zum andern und dann wieder zum ursprünglichen zurück verstanden, so muss nämlich

$$n\pi = m\omega$$

sein. Aus den Ungleichungen folgt daher, dass beim verlängerten Rotationsellipsoid  $n > m$ , beim abgeplatteten  $n < m$  ist. Während also auf einer Kugel stets eine Schliessung nach einem Umlaufe und einer Oscillation stattfindet, sind für eine Schliessung auf dem verlängerten Rotationsellipsoid, wenn solche überhaupt eintritt, mehr Umläufe als Oscillationen, beim abgeplatteten dagegen weniger erforderlich. Wenn überhaupt Schliessung der Bahn stattfinden kann, so ist die anfängliche Lage des materiellen Punktes in der Bewegungszone ohne Belang.





Während einer halben Oscillation beschreibt der Radiusvector der Projection des Punktes auf die Horizontalebene einen Winkel

$$\omega = \frac{\sqrt{(b^2 - \alpha^2)(b^2 - \beta^2)}}{a} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)z^2 + b^4} dz}{(b^2 - z^2) \sqrt{(z - \alpha)(\beta - z)(b^2 + [\alpha + \beta]z + \alpha\beta)}}.$$

Schreibt man  $\omega$  in der Form

$$\omega = \frac{\sqrt{(b^2 - \alpha^2)(b^2 - \beta^2)}}{a} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{z^2 + \frac{b^2}{a^2}(b^2 - z^2)} dz}{(b^2 - z^2) \sqrt{(z - \alpha)(\beta - z)(b^2 + [\alpha + \beta]z + \alpha\beta)}}$$

so erkennt man, dass der Werth von  $\omega$  mit wachsendem  $a$  abnimmt.

Der Betrag, um welchen sich  $\omega$  von  $\pi$  unterscheidet, lässt sich auch hier bestimmen. Wir behandeln nacheinander die Fälle  $a = b$ ,  $a < b$ ,  $a > b$ .

Dem Falle  $a = b$  entspricht das Problem des Kugelpendels. Es ist dann

$$\omega = a \sqrt{(a^2 - \alpha^2)(a^2 - \beta^2)} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dz}{(a^2 - z^2) \sqrt{(z - \alpha)(\beta - z)(a^2 + [\alpha + \beta]z + \alpha\beta)}},$$

und es ergibt sich, wenn

$$\omega_1 = a \sqrt{(a^2 - \alpha^2)(a^2 - \beta^2)} \int_{\frac{\alpha^2 + \alpha\beta}{\alpha + \beta}}^{\infty} \frac{dz}{(z^2 - a^2) \sqrt{(z + \alpha)(z + \beta)([\alpha + \beta]z - a^2 - \alpha\beta)}}$$

gesetzt wird:

$$\omega = \pi - \omega_1.$$

Während einer ganzen Oscillation wird also noch keine Windung um die Zone vollendet, und wenn die Bahn des materiellen Punktes sich schliesst, so geschieht diese Schliessung immer mit mehr Oscillationen als Windungen. Es lässt sich ferner zeigen, dass  $\omega > \frac{\pi}{2}^*$  ist, indem man  $\omega$  in der Form schreibt:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\sqrt{(b - \alpha)(b - \beta)}}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dz}{(b - z) \sqrt{(z - \alpha)(\beta - z)}} \cdot \sqrt{\frac{b^2 + (\alpha + \beta)b + \alpha\beta}{b^2 + (\alpha + \beta)z + \alpha\beta}} \\ &+ \frac{\sqrt{(b + \alpha)(b + \beta)}}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dz}{(b + z) \sqrt{(z - \alpha)(\beta - z)}} \cdot \sqrt{\frac{b^2 - (\alpha + \beta)b + \alpha\beta}{b^2 - (\alpha + \beta)z + \alpha\beta}} \end{aligned}$$

und beachtet, dass

\* Vergl. Durège, Theorie der elliptischen Functionen. Leipzig 1868. S. 328. Dort wird der Beweis für diese Behauptung mit Hilfe der elliptischen Functionen geführt.

$$\pi = \sqrt{(b-\alpha)(b-\beta)} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dz}{(b-z) \sqrt{(z-\alpha)(\beta-z)}}, \quad (\alpha < \beta < b)$$

und dass im Integrationsintervall

$$\sqrt{\frac{b^2 + (\alpha + \beta)b + \alpha\beta}{b^2 + (\alpha + \beta)z + \alpha\beta}} > 1$$

ist.

Beim verlängerten Rotationsellipsoid\* ( $b > a$ ) kann man, wenn

$\delta^2 = \frac{b^4}{b^2 - a^2}$  ist, die drei Fälle  $\frac{b^2 + \alpha\beta}{\alpha + \beta} > \delta$ ,  $\frac{b^2 + \alpha\beta}{\alpha + \beta} = \delta$ ,  $\frac{b^2 + \alpha\beta}{\alpha + \beta} < \delta$  unterscheiden.

Wenn  $\frac{b^2 + \alpha\beta}{\alpha + \beta} = \delta$  ist, so besteht zwischen den Integralen

$$\omega = \frac{b^2 \sqrt{(b^2 - \alpha^2)(b^2 - \beta^2)}}{\delta a(\alpha + \beta)} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{\delta - z} dz}{(b^2 - z^2) \sqrt{(z - \alpha)(z - \beta)(z + \delta)}},$$

$$\omega_1 = \frac{b^2 \sqrt{(b^2 - \alpha^2)(b^2 - \beta^2)}}{\delta a(\alpha + \beta)} \int_{\delta}^{\infty} \frac{\sqrt{\delta - z} dz}{(z^2 - b^2) \sqrt{(z - \alpha)(z - \beta)(z + \delta)}}$$

die Relation

$$\omega = \pi + \omega_1.$$

In den beiden anderen Fällen ist

$$\omega = \frac{b^2 \sqrt{(b^2 - \alpha^2)(b^2 - \beta^2)}}{a\delta} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{\delta^2 - z^2} dz}{(b^2 - z^2) \sqrt{(z - \alpha)(\beta - z)(b^2 + [\alpha + \beta]z + \alpha\beta)}}$$

und werde gesetzt

$$\omega_1 = \frac{b^2 \sqrt{(b^2 - \alpha^2)(b^2 - \beta^2)}}{a\delta} \int_{\delta}^{\infty} \frac{\sqrt{z^2 - \delta^2} dz}{(z^2 - b^2) \sqrt{(z - \alpha)(z - \beta)(b^2 + [\alpha + \beta]z + \alpha\beta)}}$$

Versteht man dann beim Falle  $\frac{b^2 + \alpha\beta}{\alpha + \beta} > \delta$  unter  $\omega_2$  das Integral

$$\omega_2 = \frac{b^2 \sqrt{(b^2 - \alpha^2)(b^2 - \beta^2)}}{a\delta} \int_{\delta}^{\frac{b^2 + \alpha\beta}{\alpha + \beta}} \frac{\sqrt{z^2 - \delta^2} dz}{(z^2 - b^2) \sqrt{(a + z)(\beta + z)(b^2 - [\alpha + \beta]z + \alpha\beta)}}$$

so ist

$$\omega = \pi + \omega_1 + \omega_2;$$

wenn dagegen  $\frac{b^2 + \alpha\beta}{\alpha + \beta} < \delta$  ist, und unter  $\omega_2$  das Integral

\* Vergl. Schleiermacher, Ueber die Bewegung eines schweren Punktes auf dem verlängerten Rotationsellipsoid und die ultraelliptischen Integrale 3. Gattung. Dissertation Erlangen.

$$\omega_2 = \frac{b^2 \sqrt{(b^2 - \alpha^2)(b^2 - \beta^2)}}{a\delta} \int_{\frac{b^2 + \alpha\beta}{\alpha + \beta}}^{\delta} \frac{\sqrt{\delta^2 - z^2} dz}{(z^2 - b^2) \sqrt{(\alpha + z)(\beta + z)(-b^2 + [\alpha + \beta]z - \alpha\beta)}}$$

verstanden wird, so ergibt sich

$$\omega = \pi + \omega_1 - \omega_2.$$

In den beiden zuerst behandelten Fällen ist also stets  $\omega > \pi$ , in dem zuletzt behandelten kann dagegen  $\omega$  grösser, gleich oder kleiner als  $\pi$  sein. Beim verlängerten Rotationsellipsoid kann also während einer Oscillation eine Windung um die Zone schon vollendet sein, gleichzeitig mit ihr zusammentreffen oder noch nicht zum Abschluss gebracht sein. Auch hier lässt sich zeigen, dass  $\omega > \frac{\pi}{2}$  ist; nämlich es ist  $\omega$  jedenfalls grösser als für den Fall  $a = b$ , wo  $\omega$  schon den Werth  $\frac{\pi}{2}$  überstieg.

Auf dem abgeplatteten Rotationsellipsoid ( $b < a$ ) dagegen wird ebenso wie auf der Kugel während einer Oscillation noch keine Windung vollendet. Ist  $\delta^2 = \frac{b^4}{a^2 - b^2}$ , so besteht zwischen dem Integral

$$\omega = \frac{b^2 \sqrt{(b^2 - \alpha^2)(b^2 - \beta^2)}}{a\delta} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{z^2 + \delta^2} dz}{(b^2 - z^2) \sqrt{(z - \alpha)(\beta - z)(b^2 + [\alpha + \beta]z + \alpha\beta)}}$$

und den folgenden

$$\omega_1 = \frac{b^2 \sqrt{(b^2 - \alpha^2)(b^2 - \beta^2)}}{a\delta} \int_{\frac{b^2 + \alpha\beta}{\alpha + \beta}}^{\infty} \frac{\sqrt{z^2 + \delta^2} dz}{(z^2 - b^2) \sqrt{(\alpha + z)(\beta + z)(-b^2 + [\alpha + \beta]z - \alpha\beta)}}$$

$$\omega_2 = \frac{2b^2}{a\delta} \sqrt{(b^2 - \alpha^2)(b^2 - \beta^2)}$$

$$\int_{\delta}^{\infty} \frac{\sqrt{(z^2 - \delta^2) \{ [b^2 - \alpha^2 - \beta^2 - \alpha\beta]z^2 - \alpha\beta[b^2 + \alpha\beta] + \sqrt{(z^2 + \alpha^2)(z^2 + \beta^2)}([\alpha + \beta]z^2 + (b^2 + \alpha\beta)^2) \}}}{(z^2 + b^2) \sqrt{2(z^2 + \alpha^2)(z^2 + \beta^2)([\alpha + \beta]^2 z^2 + [b^2 + \alpha\beta]^2)}} dz$$

die Relation

$$\omega = \pi - \omega_1 - \omega_2.$$

## § 5.

### Ueber die Ableitung der Periodenrelationen.

Da bei der Ableitung der angegebenen Periodenrelationen ganz besondere Sorgfalt auf die richtige Bestimmung der Vorzeichen anzuwenden ist, so halten wir es nicht für überflüssig, an einem Beispiel die Ableitung derselben ausführlich zu zeigen, und zwar wählen wir als solches die zu-



für die Verzweigungsschnitte der reellen Achse:

	von $-\infty$ bis $-\gamma$	von $\alpha$ bis $\beta$
auf der positiven Seite des oberen und negativen des unteren Blattes	$-\sqrt{R(z)}$	$+\sqrt{R(z)}$
auf der positiven Seite des unteren und negativen des oberen Blattes	$+\sqrt{R(z)}$	$-\sqrt{R(z)}$

für die übrigen Theile der reellen Achse:

	von $-\gamma$ bis $\alpha$	von $\beta$ bis $\infty$
auf dem oberen Blatte	$+i\sqrt{-R(z)}$	$-i\sqrt{-R(z)}$
auf dem unteren Blatte	$-i\sqrt{-R(z)}$	$+i\sqrt{-R(z)}$

Um die Werthvertheilung auf der imaginären Achse zu bestimmen, bemerke man, dass für  $z = iy$

$$R(iy) = u + iv,$$

$$u = (\alpha + \beta)(\delta^2 - y^2)[(\gamma - \alpha - \beta)y^2 - \alpha\beta\gamma],$$

$$v = (\alpha + \beta)(\delta^2 - y^2)(b^2 + y^2)y$$

ist, und dass ferner

$$\sqrt{u + iv} = \pm \left[ \sqrt{\frac{u + \sqrt{u^2 + v^2}}{2}} + \varepsilon i \sqrt{\frac{-u + \sqrt{u^2 + v^2}}{2}} \right],$$

wo  $\varepsilon = +1$  oder  $-1$  ist, je nachdem  $v > 0$  oder  $< 0$  ist.

Die Ausdrücke  $\sqrt{\frac{u + \sqrt{u^2 + v^2}}{2}}$  und  $\sqrt{\frac{-u + \sqrt{u^2 + v^2}}{2}}$  sind

Functionen von  $y^2$ , die wir mit  $\varphi(y^2)$  und  $\psi(y^2)$  bezeichnen wollen. Demnach ist auf der imaginären Achse

$$\sqrt{R(z)} = \pm [\varphi(y^2) - i\psi(y^2)]$$

für  $\infty > y > \delta$  und für  $-\delta < y < 0$ , dagegen

$$\sqrt{R(z)} = \pm [\varphi(y^2) + i\psi(y^2)]$$

für  $-\infty < y < -\delta$  und für  $\delta > y > 0$ .

Bestimmt man nun für den Verzweigungsschnitt die Winkel  $\varphi$  für die unendlich fernen Punkte und leitet daraus die Vorzeichen der reellen und imaginären Theile von  $\sqrt{R(z)}$  ab und beachtet man weiter, dass die

Werthe von  $\sqrt{R(z)}$  auf der imaginären Achse in ihrem Schnitt mit der reellen Achse in die früher bestimmten übergehen müssen, so erhält man als Werth von  $\sqrt{R(z)}$

für den Verzweigungsschnitt der imaginären Achse:

	von $i\delta$ bis $i\infty$	von $-i\delta$ bis $-i\infty$
auf der positiven Seite des oberen und negativen des unteren Blattes	$-\varphi(y^2) + i\psi(y^2)$	$\varphi(y^2) + i\psi(y^2)$
auf der negativen Seite des oberen und positiven des unteren Blattes	$\varphi(y^2) - i\psi(y^2)$	$-\varphi(y^2) - i\psi(y^2)$

für die übrigen Theile der imaginären Achse:

	von 0 bis $i\delta$	von 0 bis $-i\delta$
auf dem oberen Blatte	$\varphi(y^2) + i\psi(y^2)$	$-\varphi(y^2) + i\psi(y^2)$
auf dem unteren Blatte	$-\varphi(y^2) - i\psi(y^2)$	$\varphi(y^2) - i\psi(y^2)$

Schliesst man nun aus dem oberen Blatte die Punkte  $-b$  und  $+b$  durch kleine Kreise, die Verzweigungsschnitte durch sich eng anschmiegende Schleifen aus, so ist in dem übrigen Theil des Blattes die Function

$$\frac{b^2}{a\delta} \sqrt{(b^2 - \alpha^2)(b^2 - \beta^2)} \frac{z^2 + \delta^2}{b^2 - z^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{R(z)}}$$

regulär, und daher das über die Begrenzung erstreckte Integral gleich 0. Da das Integral über die Begrenzung im Unendlichen selbst gleich 0 ist, so hat man die Summe der etwa im positiven Sinne über die Verzweigungsschnitte und die Punkte  $-b$  und  $+b$  erstreckten Integrale gleich 0 zu setzen.

Bei der Integration um den Verzweigungsschnitt von  $\alpha$  bis  $\beta$  ergibt sich

$$\begin{aligned} & \frac{b^2}{a\delta} \sqrt{(b^2 - \alpha^2)(b^2 - \beta^2)} \left[ \int_{\alpha}^{\beta} \frac{z^2 + \delta^2}{b^2 - z^2} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} - \int_{\beta}^{\alpha} \frac{z^2 + \delta^2}{b^2 - z^2} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} \right] \\ & - \frac{2b^2}{a\delta} \sqrt{(b^2 - \alpha^2)(b^2 - \beta^2)} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{z^2 + \delta^2}{b^2 - z^2} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} = 2\omega, \end{aligned}$$

um den Verzweigungsschnitt von  $-\infty$  bis  $-\gamma$

$$\frac{b^2}{a\delta} \overline{V(b^2 - \alpha^2)(b^2 - \beta^2)} \left[ \int_{-\gamma}^{-\infty} \frac{z^2 + \delta^2}{b^2 - z^2} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} - \int_{-\infty}^{-\gamma} \frac{z^2 + \delta^2}{b^2 - z^2} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} \right] \\ - \frac{2b^2}{a\delta} \overline{V(b^2 - \alpha^2)(b^2 - \beta^2)} \int_{-\gamma}^{-\infty} \frac{z^2 + \delta^2}{b^2 - z^2} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} = 2\omega_1,$$

um den Verzweigungsschnitt von  $i\delta$  über  $i\infty$ ,  $-i\infty$  bis  $-i\delta$

$$\frac{b^2}{a\delta} \overline{V(b^2 - \alpha^2)(b^2 - \beta^2)} \left[ \int_{i\delta}^{i\infty} \frac{z^2 + \delta^2}{b^2 - z^2} \frac{dz}{(\varphi - i\psi)} + \int_{i\infty}^{i\delta} \frac{z^2 + \delta^2}{b^2 - z^2} \frac{dz}{(-\varphi + i\psi)} \right. \\ \left. + \int_{-i\infty}^{-i\delta} \frac{z^2 + \delta^2}{b^2 - z^2} \frac{dz}{(-\varphi - i\psi)} + \int_{-i\delta}^{-i\infty} \frac{z^2 + \delta^2}{b^2 - z^2} \frac{dz}{(\varphi + i\psi)} \right] \\ - \frac{2b^2}{a\delta} \overline{V(b^2 - \alpha^2)(b^2 - \beta^2)} \left[ \int_{i\delta}^{i\infty} \frac{z^2 + \delta^2}{b^2 - z^2} \frac{dz}{\varphi - i\psi} + \int_{-i\delta}^{-i\infty} \frac{z^2 + \delta^2}{b^2 - z^2} \frac{dz}{\varphi + i\psi} \right] \\ - \frac{2b^2}{a\delta} \overline{V(b^2 - \alpha^2)(b^2 - \beta^2)} \left[ \int_{i\delta}^{i\infty} \frac{z^2 + \delta^2}{b^2 - z^2} \frac{dz}{\varphi - i\psi} - \int_{i\delta}^{i\infty} \frac{z^2 + \delta^2}{b^2 - z^2} \frac{dz}{\varphi + i\psi} \right] \\ - \frac{2b^2}{a\delta} \overline{V(b^2 - \alpha^2)(b^2 - \beta^2)} \int_{i\delta}^{i\infty} \frac{z^2 + \delta^2}{b^2 - z^2} \frac{2i\psi}{\varphi^2 + \psi^2} dz \\ - \frac{4b^2}{a\delta} \overline{V(b^2 - \alpha^2)(b^2 - \beta^2)} \int_{\delta}^{\infty} \frac{y^2 - \delta^2}{b^2 + y^2} \frac{\psi dy}{\varphi^2 + \psi^2} \\ = 2\omega_2,$$

während die Integration um die Punkte  $-b$  und  $+b$  zusammen den Betrag  $-2\pi$  liefert. Auf diese Weise gelangt man zu der letzten oben angegebenen Periodenrelation.

(Schluss folgt.)



## Kleinere Mittheilungen.

---

### IV. Ueber einige Eigenschaften der Bessel'schen Function erster Art, insbesondere für ein grosses Argument.

Der nachfolgende kleine Beitrag ist eines Theils gestützt auf eine Vorlesung meines verehrten Lehrers L. Schläfli, anderen Theils angeregt durch den Unterricht, den ich selbst zu ertheilen habe, entstanden. Er stellt in einfacher Weise die Formeln auf, die entstehen, wenn das Argument aus der positiven Lage um den Nullpunkt herum geführt wird und bestimmt den Grenzwert für den Fall  $m = \frac{1}{2}$ . Dies für alle vorkommenden Formen durchzuführen und zu beweisen, mag vielleicht einiges Interesse haben.

Wenn wir die Bessel'sche Function erster Art  $\overset{a}{J}(x)$  folgendermassen definiren:

$$1) \quad \overset{a}{J}(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^a}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + a\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos(x \sin \varphi) \cos^{2a} \varphi \, d\varphi$$

und mit  $\overset{a}{K}(x)$  folgenden Ausdruck bezeichnen:

$$2) \quad \overset{a}{K}(x) = \cotga \pi \overset{a}{J}(x) - \frac{\overset{-a}{J}(x)}{\sin a \pi},$$

so erhalten wir, da

$$3) \left\{ \begin{aligned} \overset{-a}{J}(x) &= \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^a}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + a\right)} \\ &\times \left\{ 2 \sin a \pi \int_0^\infty e^{-x \sin \chi} \cos^{2a} \chi \, d\chi + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin \varphi + a \pi) \cos^{2a} \varphi \, d\varphi \right\}, \end{aligned} \right.$$

schliesslich für  $\overset{a}{K}(x)$  den Werth

$$4) \left\{ \begin{aligned} \bar{K}(x) &= \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^a}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + a\right)} \\ &\times \left\{ 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x \sin \varphi) \cos \varphi^{2a} d\varphi - 2 \int_0^{\infty} e^{-x \sin \chi} \cos^{2a} \chi d\chi \right\}. \end{aligned} \right.$$

Nun kann man weiter mittelst folgender zwei Beziehungen

$$\bar{P}(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{ia\pi}{2}} \left( \bar{J}(x) + i \bar{K}(x) \right)$$

und

$$\bar{Q}(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{ia\pi}{2}} \left( \bar{J}(x) - i \bar{K}(x) \right)$$

finden:

$$5) \left\{ \begin{aligned} \bar{P}(x) &= \frac{e^{\frac{ia\pi}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + a\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^a \\ &\times \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ix \sin \varphi} \cos \varphi^{2a} d\varphi - i \int_0^{\infty} e^{-x \sin \chi} \cos^{2a} \chi d\chi \right\} \end{aligned} \right.$$

und  $\bar{Q}(x)$ , das formell conjugirt ist

$$6) \left\{ \begin{aligned} \bar{Q}(x) &= \frac{e^{-\frac{ia\pi}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + a\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^a \\ &\times \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-ix \sin \varphi} \cos \varphi^{2a} d\varphi - i \int_0^{\infty} e^{-x \sin \chi} \cos^{2a} \chi d\chi \right\}. \end{aligned} \right.$$

Umgekehrt ist

$$\bar{J}(x) = e^{-\frac{ia\pi}{2}} \bar{P}(x) + e^{\frac{ia\pi}{2}} \bar{Q}(x),$$

$$\bar{K}(x) = \frac{1}{i} \left( e^{-\frac{ia\pi}{2}} \bar{P}(x) - e^{\frac{ia\pi}{2}} \bar{Q}(x) \right).$$

Nun wollen wir das Argument um 0 herum führen, indem wir statt  $x$  den Werth  $e^{im\pi}x$  substituiren, was bedeuten soll, man habe  $x$  um  $m$  Halbkreise aus der positiven Lage gedreht.

Dann ist nach

$$\overset{a}{J}(-x) = (-1)^a \overset{a}{J}(x),$$

auch

$$7) \quad \overset{a}{J}(e^{im\pi}x) = e^{im\pi a} \overset{a}{J}(x).$$

Ferner da

$$\overset{a}{K}(-x) = \overset{-a}{K}(x) = (-1)^a \overset{a}{K}(x),$$

folgt

$$8) \quad \overset{a}{K}(e^{im\pi}x) = e^{im\pi a} \overset{a}{K}(x),$$

oder

$$9) \quad \overset{a}{K}(e^{im\pi}x) = \cotga\pi \cdot e^{im\pi a} \overset{a}{J}(x) - \frac{e^{im\pi a} \overset{-a}{J}(x)}{\sin a\pi}.$$

Andererseits ist aber

$$10) \quad \overset{a}{K}(e^{im\pi}x) = \frac{2i \cos a\pi \sin m\pi a}{\sin a\pi} \overset{a}{J}(x) + e^{-im\pi a} \overset{a}{K}(x).$$

In der That ist die rechte Seite von 10):

$$\begin{aligned} &= \frac{2i \cos a\pi \sin m\pi a}{\sin a\pi} \overset{a}{J}(x) + \cos m\pi a \overset{a}{K}(x) - i \sin m\pi a \overset{a}{K}(x) \\ &= \frac{2i \cos a\pi \sin m\pi a}{\sin a\pi} \overset{a}{J}(x) + \frac{\cos m\pi a \cdot \cos a\pi \overset{a}{J}(x)}{\sin a\pi} - \frac{\cos m\pi a \overset{-a}{J}(x)}{\sin a\pi} \\ &\quad - \frac{i \sin m\pi a \cos a\pi \overset{a}{J}(x)}{\sin a\pi} + \frac{i \sin m\pi a \overset{-a}{J}(x)}{\sin a\pi} \\ &= \frac{\cos a\pi (\cos m\pi a + i \sin m\pi a) \overset{a}{J}(x)}{\sin a\pi} - \frac{e^{-im\pi a} \overset{-a}{J}(x)}{\sin a\pi} \\ &= \cotga\pi \cdot e^{im\pi a} \overset{a}{J}(x) - \frac{e^{-im\pi a} \overset{-a}{J}(x)}{\sin a\pi}. \end{aligned}$$

Multiplizieren wir den Zähler und Nenner des zweiten Theils mit  $e^{2im\pi a}$ , so folgt

$$\begin{aligned} &= \cotga\pi \cdot e^{im\pi a} \overset{a}{J}(x) - \frac{e^{im\pi a} \overset{-a}{J}(x)}{\sin a\pi} \\ &= e^{im\pi a} \overset{a}{K}(x), \end{aligned}$$

somit ist 10) bewiesen.

Ausgehend von der Formel

$$\overset{a}{P}(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{ia\pi}{2}} \left( \overset{a}{J}(x) + i \overset{a}{K}(x) \right)$$

haben wir

$$\overset{a}{P}(e^{im\pi}x) = \frac{1}{2} e^{\frac{ia\pi}{2}} \left[ \overset{a}{J}(e^{im\pi}x) + i \overset{a}{K}(e^{im\pi}x) \right]$$

und nach 10)

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} e^{\frac{ia\pi}{2}} \cdot e^{im\pi a} J(x) - \frac{e^{\frac{ia\pi}{2}} \cos a\pi \cdot \sin m\pi a}{\sin a\pi} J(x) + \frac{i}{2} \cdot e^{\frac{ia\pi}{2}} \cdot e^{-im\pi a} K(x) \\
&= \frac{1}{2} e^{\frac{ia\pi}{2}} \cos m\pi a J(x) + \frac{i}{2} \sin m\pi a \cdot e^{\frac{ia\pi}{2}} J(x) - \frac{e^{\frac{ia\pi}{2}} \cos a\pi \sin m\pi a J(x)}{\sin a\pi} \\
&\quad + \frac{i}{2} \cos m\pi a \cdot e^{\frac{ia\pi}{2}} K(x) + \frac{1}{2} e^{\frac{ia\pi}{2}} \sin m\pi a K(x) \\
&= \frac{1}{2} e^{\frac{ia\pi}{2}} J(x) \cdot \frac{\cos m\pi a \sin a\pi - \sin m\pi a \cos a\pi}{\sin a\pi} \\
&\quad + \frac{i}{2} e^{\frac{ia\pi}{2}} K(x) \frac{\cos m\pi a \sin a\pi - \sin m\pi a \cos a\pi}{\sin a\pi} \\
&\quad + \left[ -\frac{1}{2} e^{\frac{ia\pi}{2}} \cos a\pi \sin m\pi a J(x) + \frac{i}{2} e^{\frac{ia\pi}{2}} \sin m\pi a \cos a\pi K(x) \right. \\
&\quad \left. + \frac{i}{2} \sin m\pi a e^{\frac{ia\pi}{2}} J(x) + \frac{1}{2} e^{\frac{ia\pi}{2}} \sin m\pi a K(x) \right].
\end{aligned}$$

Der erste Theil ist

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\sin(m-1)a\pi}{\sin a\pi} \cdot \frac{1}{2} e^{\frac{ia\pi}{2}} (J(x) + i K(x)) \\
&= -\frac{\sin(m-1)a\pi}{\sin a\pi} \cdot P(x). \quad (\alpha.)
\end{aligned}$$

Der zweite Theil wird zu

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} e^{\frac{ia\pi}{2}} \frac{\cos a\pi \sin m\pi a}{\sin a\pi} (J(x) - i K(x)) \\
&\quad + \frac{i}{2} e^{\frac{ia\pi}{2}} \frac{\sin m\pi a \sin a\pi}{\sin a\pi} (J(x) - i K(x)) \\
&= -\frac{1}{2} e^{\frac{ia\pi}{2}} \frac{\sin m\pi a}{\sin a\pi} \underbrace{(\cos a\pi - i \sin a\pi)}_{e^{-ia\pi}} (J(x) - i K(x)) \\
&= -\frac{1}{2} e^{-\frac{ia\pi}{2}} \frac{\sin m\pi a}{\sin a\pi} (J(x) - i K(x)) \\
&= -\frac{\sin m\pi a}{\sin a\pi} \cdot Q(x) \quad (\beta.),
\end{aligned}$$

somit im Ganzen nach  $(\alpha.)$  und  $(\beta.)$

$$11) \quad P(e^{im\pi x}) = -\frac{\sin(m-1)\pi a}{\sin a\pi} P(x) - \frac{\sin m\pi a}{\sin a\pi} Q(x),$$

analog

$$12) \quad Q(e^{im\pi x}) = \frac{\sin m\pi a}{\sin a\pi} P(x) + \frac{\sin(m+1)\pi a}{\sin a\pi} Q(x).$$

Specielle Anwendungen für ein grosses Argument  $x$  ergeben sich mit Hilfe der von Poisson, Journal de l'école polytechnique, Cah. XIX. pag. 250, gegebenen Formel, die dann von Hankel\* und Lommel\*\* verallgemeinert wurde. Es ist für ein grosses Argument:

$$J^a(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left[ x - \left( a + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} \right],$$

indem man  $x$  durch  $ix$  ersetzt

$$\begin{aligned} J^a(ix) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \frac{1}{e^{\frac{i\pi}{4}}} \cos \left[ ix - \left( a + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \cdot \frac{1}{e^{\frac{i\pi}{4}}} \left( e^{-x} \cdot e^{-\frac{a\pi i}{2}} \cdot e^{-\frac{\pi i}{4}} + e^{x+\frac{a\pi i}{2}} \cdot e^{\frac{i\pi}{4}} \right); \end{aligned}$$

für ein sehr grosses  $x$  wird der erste Theil der  $= 0$ , und es folgt:

$$13) \quad J^a\left(e^{\frac{i\pi}{2}} x\right) = e^{\frac{ia\pi}{2}} J^a(x) = \frac{e^{x+\frac{a\pi i}{2}}}{\sqrt{2\pi x}}.$$

Die Phase von  $x$  muss zwischen  $-\frac{\pi}{2}$  und  $\frac{\pi}{2}$  liegen, ohne jedoch die Grenzen erreichen zu dürfen.

Der Grenzwert von  $K^a(ix)$  ist folgender:

$$K^a(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left[ x - \left( a + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} \right],$$

also

$$\begin{aligned} K^a(ix) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \frac{1}{e^{\frac{i\pi}{4}}} \cdot \sin \left[ ix - \left( a + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} \right] \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \frac{1}{e^{\frac{i\pi}{4}}} \cdot \frac{1}{2i} \left[ e^{-x-\frac{a\pi i}{2}-\frac{\pi i}{4}} - e^{x+\frac{a\pi i}{2}+\frac{\pi i}{4}} \right], \end{aligned}$$

$$K^a\left(e^{\frac{i\pi}{2}} x\right) = \frac{i}{\sqrt{2\pi x}} \cdot e^{x+\frac{a\pi i}{2}} = \frac{e^{x+(a+1)\frac{i\pi}{2}}}{\sqrt{2\pi x}},$$

also für ein grosses Argument

$$14) \quad K^a\left(e^{\frac{i\pi}{2}} x\right) = e^{\frac{ia\pi}{2}} K^a(x) = \frac{e^{x+(a+1)\frac{i\pi}{2}}}{\sqrt{2\pi x}}.$$

\* Mathem. Annalen Bd. I, 1869, S. 506.

\*\* Studien über die Bessel'schen Functionen, 1868, S. 65.

Aus dem Integral

$$\overset{a}{P}(x) = \frac{e^{i(x-\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi x} \Gamma(\frac{1}{2} + a)} \int_0^x e^{-s} s^{a-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{is}{2x}\right)^{a-\frac{1}{2}} ds$$

folgt, wenn  $x$  sehr gross ist:

$$\overset{a}{P}(x) = \frac{e^{i(x-\frac{\pi}{4})}}{\Gamma(\frac{1}{2} + a) \sqrt{2\pi x}} \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-s} s^{a-\frac{1}{2}} ds}_{\Gamma(a + \frac{1}{2})} = \frac{e^{i(x-\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi x}},$$

somit für ein grosses  $x$

$$\overset{a}{P}(x) = \frac{e^{i(x-\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi x}}; \quad \overset{a}{Q}(x) = \frac{e^{-i(x-\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi x}}.$$

Setzen wir in  $\overset{a}{P}(x)$  für  $x$   $ix$  ein, so ist

$$\overset{a}{P}(ix) = \frac{e^{-x} \cdot e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi x} \cdot e^{\frac{i\pi}{4}}} = \frac{e^{-\frac{i\pi}{2}} \cdot e^{-x}}{\sqrt{2\pi x}},$$

was für ein grosses  $x$  verschwindet, während

$$\overset{a}{Q}(ix) = \frac{e^x \cdot e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi x} e^{\frac{i\pi}{4}}} = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}.$$

$$15) \quad \overset{a}{Q}\left(e^{\frac{i\pi}{2}} x\right) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}.$$

Durch Vergleichung von 15) und 13) folgt:

$$\overset{a}{J}\left(e^{\frac{i\pi}{2}} x\right) = e^{\frac{ia\pi}{2}} \overset{a}{Q}\left(e^{\frac{i\pi}{2}} x\right).$$







geordnet. Es mögen nun in einer solchen Verbindung  $C$  gerade  $\alpha$  Endzahlen aufeinander folgen, so dass sie diese Form hat:

$$a_1, a_2 \dots s_1, s_2 \dots s_\alpha.$$

Dann ist die Anfangszahl  $a_1$  entweder  $< \alpha$ ,  $= \alpha$  oder  $> \alpha$ . Ist sie  $\leq \alpha$ , so stelle man  $C$  mit

$$C_0 = a_2 \dots s_{\alpha+1} - a_1 + 1, s_{\alpha+2} - a_1 + 1, \dots s_\alpha + 1$$

der vorhergehenden Classe zusammen, wo dann das Anfangsglied grösser ist, als die Anzahl der letzten aufeinander folgenden Zahlen, so dass man nicht in gleicher Weise zurückgehen kann. Ist  $a_1 > \alpha$ , so stelle man  $C$  mit

$$C_1 = \alpha, a_1, a_2, \dots s_1 - 1, s_2 - 1, \dots s_\alpha - 1$$

der folgenden Classe zusammen, wo das erste Glied  $\leq$  der Anzahl der letzten aufeinander folgenden Glieder ist, so dass man nicht in gleicher Weise vorwärts gehen kann. So ist jede Combination immer nur mit Einer von einer benachbarten Classe gepaart, und nur in zwei Fällen ist eine Ausnahme möglich. Man kann nämlich auf diese Weise keine Nachbarform in der folgenden Classe finden, wenn das Anfangselement  $a_1$  zugleich zu den letzten Elementen  $s_1 \dots$  gehört und eine Verminderung desselben um 1 weniger als  $\alpha + 1$  ergibt; also bei der Verbindung

$$\alpha + 1, \alpha + 2, \dots 2\alpha,$$

ebenso wenig kann eine Nachbarform der gekennzeichneten Art in der vorhergehenden Classe existiren, wenn das Anfangselement  $a_1$  zugleich zu den letzten Elementen  $s_1 \dots$  gehört und doch grösser ist als die Anzahl der darauf folgenden; also bei der Verbindung

$$\alpha, \alpha + 1, \dots 2\alpha - 1.$$

. Diese beiden Combinations können aber nur Zahlen von der Form  $\frac{3n^2 \pm n}{2}$  als Summe darstellen; sie haben eine gerade oder ungerade Zahl von Elementen, je nachdem  $n$  gerade oder ungerade ist.

Es giebt also gleichviel Verbindungen von einer geraden und einer ungeraden Anzahl der Elemente, wenn jene beiden Fälle nicht möglich sind; für Zahlen von der Form  $\frac{3n^2 \pm n}{2}$

aber giebt es eine gerade Verbindung mehr, als eine ungerade, und umgekehrt, je nachdem  $n$  gerade oder ungerade ist.

Ein einfaches Beispiel — alle Combinations zur Summe 15 — mag das Verfahren veranschaulichen:

15	1 14				
	2 13	1 2 12			
	3 12	1 3 11			
	4 11	1 4 10			
	5 10	1 5 9			
	6 9	1 6 8			
	7 8				
		2 3 10	1 2 3 9		
		2 4 9	1 2 4 8		
		2 5 8	1 2 5 7		
		2 6 7			
		3 4 8	1 3 4 7		
		3 5 7	1 3 5 6		
		4 5 6			
			2 3 4 6	1 2 3 4 5	
	7 8	2 6 7			
		4 5 6.			

In dem unendlichen Product

$$(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3) \dots$$

treten alle Potenzen, deren Exponenten die Summe einer geraden Anzahl von Zahlen der natürlichen Reihe bilden, mit positivem Vorzeichen auf, alle anderen mit ungeradem. Es bleiben also nur diejenigen Potenzen stehen, welche Zahlen der Form  $\frac{3n^2 + n}{2}$  zu Exponenten haben, das heisst

$$(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3) \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{\frac{3n^2 + n}{2}}.$$

Aus unserer Betrachtungsweise lässt sich nun ohne Schwierigkeit eine Verallgemeinerung, die in der Jacobi'schen Abhandlung (Werke I, Bln. 1846, S. 353) ausgesprochen ist, folgern. Beschränken wir die Zahlen, aus welchen eine Zahl  $P$  sich als Summe darstellen lässt, auf die ersten  $m - 1$  der positiven Ziffernreihe und ist  $P > m - 1$ , so wird das oben ausgesprochene Resultat sich nur durch diejenigen Verbindungen verändern, welche durch Weiterentwicklung in eine folgende Classe entstanden zu denken sind und welche sich aus einem Paare lösen, von welchem das eine Individuum  $m$  als höchstes Element enthält. Das sind aber die *folgenden Combinationen*:

---

1 . . . . .	$m - 1$ [1]
2 . . . . .	$m - 2, m - 1$ [2]
3 . . . . .	$m - 3, m - 2, m - 1$ [3]
. . . . .	.
. . . . .	.
$\alpha$ . . . .	$m - \alpha, m - (\alpha - 1) . . . . m - 2, m - 1$ [ $\alpha$ ]

Im Folgenden bezeichnen wir mit Jacobi durch

$$(P, \alpha, \beta, \gamma \dots)$$

den Ueberschuss der Anzahl derjenigen Zusammensetzungen, in welchen die Zahl der angewandten, von einander verschiedenen Elemente  $\alpha, \beta, \gamma \dots$  gerade ist, über die Zahl derjenigen, in welcher sie ungerade ist, wobei der Ueberschuss sowohl eine positive, als auch eine negative Grösse bedeuten kann. [Die Festsetzung des Werthes für

$$P = 0, (P, \alpha, \beta, \gamma \dots) = +1,$$

und dass

$$(P, \alpha, \beta, \gamma \dots) = 0$$

sein soll, wenn eine der Grössen  $\alpha, \beta, \gamma = 0$  wird, sei hier beiläufig erwähnt.]

Die Combinationen [1] hängen nun von der Zahl der Verbindungen zur Summe  $P - m$  ab, welche von den Elementen

$$2, 3 \dots m - 2$$

hergestellt werden können, ebenso die [2] von den Verbindungen zur Summe  $P - 2m + 1$  aus den Elementen

$$3, 4 \dots m - 3$$

und allgemein die Zahl der Combinationen [ $\alpha$ ] von den Verbindungen zur Summe

$$P - \alpha m + \frac{\alpha}{2} (\alpha - 1) = P - \frac{\alpha}{2} (2m - \alpha + 1) = P_\alpha,$$

welche die Zahlen

$$\alpha + 1, \alpha + 2 \dots m - (\alpha + 1)$$

eingehen können. Berücksichtigt man, dass die geraden oder ungeraden Verbindungen aus  $k$  Elementen wieder solche zu einer geraden oder ungeraden Anzahl ergeben werden, wenn man eine gerade Zahl  $\alpha$  Elemente wegnimmt, dass sie aber ihren Charakter ändern, wenn  $\alpha$  ungerade ist, so ergiebt sich der Satz

$$(P, 1, 2 \dots m - 1) = 1 + (P_1 2, 3 \dots m - 2) - (P_2 3, 4 \dots m - 3) + \dots,$$

wo der Ausdruck rechts, je nachdem  $m$  gerade oder ungerade ist, bis

$$(-1)^{\frac{1}{2}m} \left( P_{\frac{1}{2}(m-1)} \frac{m}{2} \right)$$

oder

$$(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} \left( P_{\frac{1}{2}(m-3)}, \frac{1}{2}(m-1), \frac{1}{2}(m+1) \right)$$

fortzusetzen ist, und wo  $\Delta$  für alle Zahlen  $P$  von der Form  $\frac{3n^2 \pm n}{2}$ , welche bis  $\frac{1}{8}m(3m-2)$  oder bis  $\frac{1}{8}(m-1)(3m-1)$  auftreten,  $= (-1)^n$  ist, während für den besonderen Fall, in welchem die Verbindung  $[a]$

$$\alpha, \alpha+1 \dots m-3, m-2, m-1$$

als eine ununterbrochene Folge auftritt, also für

$$P = \frac{3}{8}(mm-1) \Delta = (-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}$$

zu setzen ist.

Dieser Satz ist von Jacobi in anderer Weise abgeleitet; er folgert aus ihm den Euler'schen, für welchen  $P \leq (m-1)$  zu setzen ist und für den eine Zahl  $P = \frac{3}{8}(mm-1)$  nicht in Frage kommt.

Wie dem Satze von den Pentagonalzahlen die Euler'sche Gleichung entspricht, so ergeben sich aus dem soeben bewiesenen etwas allgemeineren Jacobi's die Formeln:

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + \sum_1^{\frac{1}{2}m} (-1)^n x^{\frac{1}{2}(3n^2-n)} + \sum_1^{\frac{1}{2}(m-1)} (-1)^n x^{\frac{1}{2}(3n^2+n)} \\ &\quad - \sum_0^{\frac{1}{2}m-1} (-1)^n x^{\frac{1}{2}n(2m-n-1)} (1-x^{n+1})(1-x^{n+2}) \dots (1-x^{m-n-1}), \\ 0 &= 1 + \sum_1^{\frac{1}{2}(m-1)} (-1)^n x^{\frac{1}{2}(3n^2-n)} + \sum_1^{\frac{1}{2}(m-1)} (-1)^n x^{\frac{1}{2}(3n^2+n)} + (-1)^{\frac{1}{2}(m+1)} x^{\frac{3}{8}(mm-1)} \\ &\quad - \sum_0^{\frac{1}{2}(m-3)} (-1)^n x^{\frac{1}{2}n(2m-n-1)} (1-x^{n+1})(1-x^{n+2}) \dots (1-x^{m-n-1}), \end{aligned}$$

von welchen die erste oder zweite zu nehmen ist, je nachdem  $m$  gerade oder ungerade ist.

Noch in anderer Weise unter Zuhilfenahme von Reihenentwicklung lässt sich das endliche Product

$$(1-x)(1-x^2) \dots (1-x^{m-1})$$

durch das unendliche darstellen. Nennen wir dasselbe  $Q$ , das letztere  $S$ , so ist

$$\frac{S}{(1-x^m)(1-x^{m+1})(1-x^{m+2}) \dots} = Q.$$

Entwickelt man nach Euler den Quotienten

$$\frac{1}{(1+x^m s)(1+x^{m+1} s)(1+x^{m+2} s) \dots} = 1 + R_1 s + R_2 s^2 + \dots = T$$

nach Potenzen von  $s$  und setzt sodann  $xs$  an die Stelle von  $s$ , so erhält man

$$\frac{1}{(1+x^{m+1}s)(1+x^{m+2}s)(1+x^{m+3}s)\dots} = 1 + R_1 x s + R_2 x^2 s^2 + \dots$$

$$= T(1+x^m s).$$

Durch Vergleichen der Coefficienten ergibt sich alsdann

$$R_1 + x^m = R_1 x$$

$$R_2 + R_1 x^m = R_2 x^2$$

$$R_3 + R_2 x^m = R_3 x^3$$

etc.,

und hieraus

$$R_1 = -\frac{x^m}{1-x}$$

$$R_2 = \frac{x^{2m}}{(1-x)(1-x^2)}$$

$$R_3 = -\frac{x^{3m}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

etc.,

so dass also für  $s = -1$  folgt

$$\frac{1}{(1-x^m)(1-x^{m+1})(1-x^{m+2})\dots} = 1 + \frac{x^m}{1-x} + \frac{x^{2m}}{(1-x)(1-x^2)}$$

$$+ \frac{x^{3m}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} \dots$$

Durch beiderseitige Multiplication mit  $P$  folgt hieraus

$$Q = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots\dots\dots$$

$$+ x^m(1-x^2)(1-x^3)\dots\dots\dots$$

$$+ x^{2m}(1-x^3)(1-x^4)\dots\dots\dots$$

$$+ x^{3m}(1-x^4)(1-x^5)\dots$$

$$+ \dots\dots\dots$$

Unter Anwendung des Jacobi'schen Symbols ergibt das die Gleichung

$$(P, 1, 2, 3 \dots m-1) = (P, 1, 2, 3 \dots) + (P-m, 2, 3, 4 \dots)$$

$$+ (P-2m, 3, 4, 5 \dots) + \dots,$$

in welcher die Grössen  $P - \alpha m$  soweit fortzuführen sind, als sie nicht negativ werden, und die oben erwähnte Bestimmung Jacobi's für den Fall, dass  $P - \alpha m = 0$  wird, zu berücksichtigen ist.

Setzt man in dieser Formel  $m-1=0$ , so geht sie in

$$(P, 0) = 0 = (P, 1, 2, 3 \dots) + (P-1, 2, 3, 4 \dots)$$

$$+ (P-2, 3, 4, 5 \dots) + \dots$$

über, entspricht der Gleichung

$$\begin{aligned}
 Q = 1 = & (1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3) \dots\dots\dots \\
 & + x(1 - x^2)(1 - x^3) \dots\dots\dots \\
 & + x^2(1 - x^3)(1 - x^4) \dots\dots \\
 & + x^3(1 - x^4) \dots\dots \\
 & + \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

und bringt einen einfachen combinatorischen Satz, der auch aus dem von Jacobi angewandten Princip

$$(P, \alpha, \beta, \gamma \dots) = (P, \beta, \gamma \dots) - \alpha, \beta, \gamma \dots$$

unmittelbar folgen würde, zum Ausdruck. Nimmt man allen Verbindungen zur Summe  $P$  nacheinander das erste Element  $\alpha$ , so entstehen alle Verbindungen zur Summe  $P - \alpha$  aus den übrigen Elementen. Es ist also der Unterschied der Anzahl aller möglichen Verbindungen zur Summe  $P$  aus einer geraden und einer ungeraden Zahl von Summanden gleich der negativ genommenen Summe für alle möglichen Grössen  $P - \alpha$ . Indem nämlich einer jeden Verbindung zu  $P$  ein Element genommen wurde, ist immer aus einer geraden Zahl von Elementen eine ungerade geworden und umgekehrt.

Für  $P \leq m - 1$  geht die Formel in die Identität

$$(P, 1, 2, 3 \dots m - 1) = (P, 1, 2, 3 \dots)$$

über, da alle Grössen  $P - \alpha m$  negativ werden, also durch positive Zahlen überhaupt nicht darzustellen sind.

G o t h a, Anfang December 1892.

Dr. L. GOLDSCHMIDT.

## VIII.

### Construction der Burmester'schen Punkte für ein ebenes Gelenkviereck.

Zweite Mittheilung.

Von

Prof. Dr. R. MÜLLER

in Braunschweig.

---

Hierzu Tafel II, Figur 1—14.

---

In unserer ersten Mittheilung\* haben wir die Aufgabe behandelt, für eine beliebige Koppellage eines ebenen Gelenkvierecks die Burmester'schen Punkte zu bestimmen, das heisst, in der Koppalebene diejenigen beiden reellen oder imaginären Punkte zu ermitteln, die augenblicklich Bahnelemente mit fünfpunktig berührendem Krümmungskreise beschreiben. Im Folgenden werden wir die früheren Ergebnisse nach zwei Richtungen hin vervollständigen, indem wir erstens auf den Zusammenhang eingehen, der zwischen der Aufsuchung der Burmester'schen Punkte und dem Problem der angenäherten Geradföhrung besteht, und indem wir zweitens eine Reihe von Sonderfällen betrachten, in denen die vorher abgeleitete allgemeine Construction versagt.

1. Wir bezeichnen, wie früher, mit  $ABBA$  ein Gelenkviereck mit dem festen Gliede  $AB$  und der Koppel  $AB$ , mit  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{Q}$  bez. die Schnittpunkte der Seitenpaare  $AA$ ,  $BB$  und  $AB$ ,  $AB$ , mit  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  die Winkel zwischen der Diagonale  $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$  und den Seiten  $BB$ ,  $AA$ ,  $AB$ ,  $AB$  (Fig. 1). Dabei ist  $\mathfrak{P}$  der Pol der Koppellage  $AB$ ; die zugehörige Polbahntangente  $t$  bildet mit  $\mathfrak{P}B$  den Winkel  $\beta$ . Sei ferner  $m$  die Kreispunktcurve für die augenblickliche Lage der Koppalebene,  $F$  ihr Focalcentrum,  $\mu$  mit dem Focalcentrum  $E$  die entsprechende Curve in der festen Ebene; dann befinden sich auf  $m$  die Burmester'schen Punkte  $M_I$ ,  $M_{II}$  der betrachteten Systemlage und auf  $\mu$  die zugehörigen Krümmungsmittelpunkte  $M_I$ ,  $M_{II}$ . Verstehen wir noch unter  $\varphi_F$ ,  $\varphi_E$ ,  $\varphi_I$ ,  $\varphi_{II}$  die Winkel, welche bez. die

---

\* Diese Zeitschrift Bd. XXXVII, S. 213.

Geraden  $\mathfrak{F}F$ ,  $\mathfrak{F}E$ ,  $\mathfrak{F}M_I$ ,  $\mathfrak{F}M_{II}$  mit der Polbahntangente  $t$  einschliessen, so sind  $\tan \varphi_I$ ,  $\tan \varphi_{II}$  die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\tan^2 \varphi - (\tan \varphi_F + \tan \varphi_E - \tan \alpha - \tan \beta) \tan \varphi + \frac{\tan \varphi_F \tan \varphi_E}{\tan \alpha \tan \beta} = 0^*.$$

Unter Benutzung der früher erhaltenen Formeln

$$1) \quad \tan \varphi_F = \frac{\tan \alpha \tan \beta}{\tan \chi}, \quad \tan \varphi_E = \frac{\tan \alpha \tan \beta^*}{\tan \psi}$$

verwandelt sich die vorige Gleichung in

$$2) \quad \tan^2 \varphi - \{\tan \alpha \tan \beta (\cot \psi + \cot \chi) - \tan \alpha - \tan \beta\} \tan \varphi + \tan \alpha \tan \beta \cot \psi \cot \chi = 0.$$

Nehmen wir jetzt an, es sei einer der beiden Burmester'schen Punkte, etwa  $M_I$ , identisch mit dem Ball'schen Punkte der Koppellage  $AB$ , das heisst, mit dem Schnittpunkte des Wendekreises und der Curve  $m$ , so wird  $M_I M_I = \infty$  und der Punkt  $M_I$  befindet sich augenblicklich in einer Bahnstelle mit fünfpunktig berührender Tangente. Nun liegt der Ball'sche Punkt der Curve  $m$  bekanntlich auf der Focalachse der Curve  $\mu$  und diese bildet mit  $t$  den Winkel  $-\varphi_E^{**}$ ; im vorliegenden Falle ist also nach 1)

$$3) \quad \tan \varphi_I = -\tan \alpha \tan \beta \cot \psi.$$

Durch Einsetzung dieses Werthes folgt aus Gleichung 2) die Bedingung

$$4) \quad 2 \cot \psi + \cot \chi - \cot \alpha - \cot \beta + \cot \alpha \cot \beta \cot \chi = 0;$$

gleichzeitig ergibt sich

$$\tan \varphi_{II} = -\cot \chi,$$

das heisst:

$$5) \quad \varphi_{II} = 90^\circ + \chi.$$

Berücksichtigen wir noch den früher erhaltenen Satz, dass bei jeder beliebigen Systembewegung immer drei der Burmester'schen Punkte auf einer Geraden liegen, sobald der vierte dieser Punkte mit dem Ball'schen Punkte zusammenfällt<sup>\*\*\*</sup>, so gelangen wir zu folgendem Ergebniss: Genügen die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  des Gelenkviereckes  $ABBA$  in einer gewissen Koppellage  $AB$  der Gleichung 4), so beschreibt ein bestimmter Punkt  $M_I$  der Koppellebene — der Ball'sche Punkt — augenblicklich eine Bahnstelle mit fünfpunktig berührender Tangente. Gleichzeitig fällt der Burmester'sche Punkt  $M_{II}$  mit demjenigen Punkte der Koppelgeraden  $AB$  zusammen, dessen Bahnnormale mit der Polbahnnormale den Winkel  $\chi$  einschliesst. — Die beiden Punkte  $M_I$ ,  $M_{II}$  sind im vorliegenden Falle selbstverständlich stets reell.

\* a. a. O. S. 217.

\*\* Ueber die Bewegung eines starren ebenen Systems durch fünf unendlich benachbarte Lagen. Diese Zeitschrift Bd. XXXVII, S. 144.

\*\*\* Ebenda, S. 149.



Um ein Viereck  $ABBA$  gemäss der Bedingung 4) zu construiren, ziehen wir in Figur 2 durch die willkürlich angenommenen Punkte  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{R}$  die beliebigen Geraden  $\mathfrak{P}A$ ,  $\mathfrak{P}B$ ,  $\mathfrak{R}AB$  und senkrecht zu  $\mathfrak{P}\mathfrak{R}$  die Geraden  $\mathfrak{P}\mathfrak{Z}$  und  $\mathfrak{R}\mathfrak{U}$ ; dieselben bestimmen auf  $AB$ ,  $\mathfrak{P}A$ ,  $\mathfrak{P}B$  bez. die Punkte  $\mathfrak{Z}$ ,  $\mathfrak{U}$ ,  $\mathfrak{B}$ . Von  $\mathfrak{Z}$  fällen wir auf  $\mathfrak{P}A$  ein Loth, welches  $\mathfrak{P}B$  in  $\mathfrak{H}$  schneidet, ziehen  $\mathfrak{H}\mathfrak{G}$  parallel zu  $\mathfrak{P}\mathfrak{R}$  bis  $\mathfrak{R}\mathfrak{B}$ , verbinden  $\mathfrak{G}$  mit dem Schnittpunkte  $\mathfrak{S}$  von  $A\mathfrak{B}$  und  $B\mathfrak{U}$  durch eine Gerade, welche  $AB$  in  $\mathfrak{T}$  trifft und ermitteln den Schnittpunkt  $\mathfrak{N}$  von  $\mathfrak{P}\mathfrak{T}$  und  $\mathfrak{R}\mathfrak{U}$ . Machen wir dann auf  $\mathfrak{P}\mathfrak{Z}$  die Strecke  $\mathfrak{P}\mathfrak{Z}' = 2 \cdot \mathfrak{R}\mathfrak{N}$ , so liegen auf  $\mathfrak{R}\mathfrak{Z}'$  die gesuchten Gelenkpunkte  $A$  und  $B$ .

Beweis. Aus Figur 2 folgt, wenn die Strecke  $\mathfrak{R}\mathfrak{B}$  negativ gerechnet wird,

$$\cot \alpha = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{R}}{\mathfrak{P}\mathfrak{B}}, \quad \cot \beta = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{R}}{\mathfrak{P}\mathfrak{U}}, \quad \cot \chi = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{R}}{\mathfrak{P}\mathfrak{Z}}, \quad \cot \psi = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{R}}{\mathfrak{P}\mathfrak{Z}'},$$

$$\mathfrak{P}\mathfrak{H} = \mathfrak{P}\mathfrak{Z} \cdot \frac{\sin \beta}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\mathfrak{R}\mathfrak{P}}{\cot \chi} \cdot \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos(\alpha - \beta)},$$

$$\mathfrak{R}\mathfrak{G} = \mathfrak{P}\mathfrak{H} \cdot \sin \alpha = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{R}}{\cot \chi} \cdot \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos(\alpha - \beta)}.$$

Die Punktreihe  $\mathfrak{R}AB\mathfrak{T}$  ist perspectiv zu  $\mathfrak{R}\mathfrak{U}\mathfrak{B}\mathfrak{R}$  und zu  $\mathfrak{R}\mathfrak{B}\mathfrak{U}\mathfrak{G}$ , die Punktpaare  $\mathfrak{U}$ ,  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{G}$ ,  $\mathfrak{R}$  bestimmen daher eine Involution mit dem Doppelpunkte  $\mathfrak{R}$ , mithin ist

$$\frac{1}{\mathfrak{R}\mathfrak{N}} + \frac{1}{\mathfrak{R}\mathfrak{G}} = \frac{1}{\mathfrak{R}\mathfrak{U}} + \frac{1}{\mathfrak{R}\mathfrak{B}},$$

oder

$$2 \cdot \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{R}}{\mathfrak{P}\mathfrak{Z}'} + \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}\mathfrak{G}} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}\mathfrak{U}} + \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}\mathfrak{B}},$$

das heisst:

$$2 \cot \psi + \cot \chi (1 + \cot \alpha \cot \beta) = \cot \alpha + \cot \beta.$$

Der Punkt  $M_I$  ergibt sich nunmehr in folgender Weise. Wir ziehen  $\mathfrak{P}U$  parallel zu  $AB$  bis  $AB$ , darauf durch  $U$  zu  $\mathfrak{P}\mathfrak{R}$  eine Parallele, die  $\mathfrak{P}A$  in  $V$ ,  $\mathfrak{P}B$  in  $V'$  schneidet, und errichten in  $V$  und  $V'$  bez. Lothe zu  $\mathfrak{P}A$  und  $\mathfrak{P}B$ ; dieselben treffen sich bekanntlich im Wendepole  $W$ . Fällen wir dann von  $\mathfrak{U}$  auf  $\mathfrak{P}B$  ein Loth, welches  $\mathfrak{P}\mathfrak{R}$  in  $Z$  schneidet, und machen auf  $\mathfrak{P}W$  die Strecke  $\mathfrak{P}Z' = \mathfrak{R}Z$ , sowie  $Z'Z''$  senkrecht zu  $\mathfrak{P}Z'$  und  $= \mathfrak{P}\mathfrak{Z}'$ , so ist  $M_I$  der Fusspunkt der von  $W$  auf  $\mathfrak{P}Z''$  gefällten Senkrechten. Es ist nämlich

$$\mathfrak{R}\mathfrak{U} = \mathfrak{P}\mathfrak{R} \tan \beta, \quad \mathfrak{R}Z = -\mathfrak{R}\mathfrak{U} \tan \alpha, \quad \mathfrak{P}\mathfrak{Z}' = \mathfrak{P}\mathfrak{R} \tan \psi,$$

also

$$\tan \varphi_I = \tan \angle \mathfrak{P}WM_I = \tan \angle Z'Z''\mathfrak{P} = -\tan \alpha \tan \beta \cot \psi,$$

in Uebereinstimmung mit Gleichung 3); überdies liegt  $M_I$  nach Construction auf dem Wendekreise, ist also in der That der Ball'sche Punkt für die betrachtete Systemlage.

Wir erhalten ferner den auf  $AB$  liegenden Punkt  $M_{II}$ , indem wir  $\angle W\mathfrak{P}M_{II} = \angle \mathfrak{P}\mathfrak{R}A$  machen.

In Figur 2<sup>a</sup> sind die Bahncurven  $m_I$ ,  $m_{II}$  der Punkte  $M_I$ ,  $M_{II}$  gezeichnet; dieselben sind bekanntlich tricirculare Curven sechster Ordnung.

Für die Curve  $m_{II}$ , die in Bezug auf  $AB$  symmetrisch ist, haben wir den Krümmungsmittelpunkt  $M_{II}$  und den zugehörigen Krümmungskreis angegeben. Die Curve  $m_I$ , die mit der Inflexionstangente  $WM_I$  an der Stelle  $M_I$  fünf unendlich nahe Punkte gemein hat, schmiegt sich in der Zeichnung an diese Gerade so innig an, dass ein beträchtliches Stück der Curve von der Geraden nicht unterschieden werden kann; wir dürfen demnach die Bewegung des Punktes  $M_I$  auf der Curve  $m_I$  als eine fünfpunktige Geradföhrung bezeichnen.\*

Bilden wir aus den Punkten  $A, A, M_{II}, M_{II}$  ein neues Gelenkviereck mit dem festen Gliede  $AM_{II}$ , so beschreibt der Punkt  $M_I$  als Eckpunkt des Koppeldreiecks  $AM_{II}M_I$  eine neue Bahncurve, die in  $M_I$  von der Tangente  $WM_I$  wiederum fünfpunktig berührt wird, und dasselbe gilt, wenn wir den Punkt  $M_I$  an die Koppel  $BM_{II}$  eines dritten Gelenkvierecks  $BM_{II}M_{II}B$  anschliessen. Nach dem Roberts'schen Satze von der dreifachen Erzeugung der Koppelcurve\*\* kann ferner jede der drei erhaltenen Bahncurven des Punktes  $M_I$  durch zwei neue Gelenkvierecke hervorgebracht werden; wir erhalten demnach aus dem ursprünglichen Viereck  $ABBA$  im Ganzen acht andere Gelenkvierecke, durch welche gleichfalls die Geradföhrung des Punktes  $M_I$  auf der Geraden  $WM_I$  bewirkt wird.

2. Soll der geradgeföhrte Punkt  $M_I$  auf der Koppelgeraden  $AB$  liegen, so muss er nothwendig mit dem zugehörigen  $M_{II}$  zusammenfallen, weil die Gerade  $AB$  mit der Kreispunktcurve  $m$  ausser  $A, B, M_{II}$  keinen vierten Punkt gemein haben kann. Dann ist

$$\varphi_I = \varphi_{II} = 90^\circ + \chi,$$

also nach 3):

$$-\cot \chi = -\tan \alpha \tan \beta \cot \psi,$$

oder

$$6) \quad \tan \psi = \tan \alpha \tan \beta \tan \chi,$$

und Gleichung 4) verwandelt sich in

$$7) \quad \tan \chi = \frac{3 + \tan \alpha \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta}.$$

Die Bedingungen 6) und 7) föhren zu folgender Construction des Vierecks  $ABBA$ . Wir beschreiben in Figur 3 über der beliebigen Strecke  $\mathfrak{P}\mathfrak{R}$  als Durchmesser einen Kreis  $\mathfrak{k}$ , legen an denselben in  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{R}$  die Tangenten  $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$  und  $\mathfrak{R}\mathfrak{Q}'$  und ziehen eine beliebige Secante, die  $\mathfrak{k}$  in  $C$  und  $D$ ,  $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$  in  $\mathfrak{Z}$ ,  $\mathfrak{R}\mathfrak{Q}'$  in  $\mathfrak{Z}'$  schneidet. Auf  $\mathfrak{Z}\mathfrak{Q}$  machen wir die Strecke  $\mathfrak{Z}\mathfrak{Z} = 2 \cdot \mathfrak{P}\mathfrak{Z} + \mathfrak{R}\mathfrak{Z}'$  und ziehen  $\mathfrak{Z}\mathfrak{L}$  senkrecht zu  $\mathfrak{P}C$  bis  $\mathfrak{P}\mathfrak{R}$ ,  $\mathfrak{L}\mathfrak{L}'$  parallel zu  $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$  bis  $\mathfrak{P}D$  und  $\mathfrak{L}'\mathfrak{Z}'$  parallel zu  $\mathfrak{P}\mathfrak{R}$  bis  $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ . Dann bestimmen die Geraden  $\mathfrak{P}C$ ,  $\mathfrak{P}D$  auf  $\mathfrak{R}\mathfrak{Z}$ ,  $\mathfrak{R}\mathfrak{Z}'$  bez. die Punkte  $A, B, A, B$ .

\* Ueber die angenäherte Geradföhrung durch ein Gelenkviereck vergl. Burmester, Kinematik I, S. 623.

\*\* Roberts, On Three-bar Motion in Plane Space, Proceedings of the London Mathematical Society, vol. VII, p. 14.

In der That, im Dreieck  $\mathfrak{P}C\mathfrak{Z}$  ist der Winkel bei  $\mathfrak{P} = 90^\circ - \beta$  und der Winkel bei  $C = 90^\circ - \alpha$ , also der Winkel bei  $\mathfrak{Z} = \alpha + \beta$ , mithin

$$\mathfrak{P}\mathfrak{Z} = \mathfrak{P}C \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = \mathfrak{P}\mathfrak{R} \cdot \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)},$$

$$\mathfrak{R}\mathfrak{Z}' = \mathfrak{P}\mathfrak{Z} - \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{R}}{\tan(\alpha + \beta)},$$

$$\mathfrak{P}\mathfrak{Z} = \mathfrak{P}\mathfrak{R} \left\{ \frac{4 \cos \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)} - \frac{1}{\tan(\alpha + \beta)} \right\}$$

also

$$\tan \chi = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{Z}}{\mathfrak{P}\mathfrak{R}} = \frac{3 + \tan \alpha \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta},$$

wie in Gleichung 7). Es ist ferner

$$\mathfrak{P}\mathfrak{Z}' = \mathfrak{R}\mathfrak{Z}' = \mathfrak{P}\mathfrak{R} \tan \alpha = \mathfrak{P}\mathfrak{Z} \tan \alpha \tan \beta,$$

das heisst:

$$\tan \psi = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{Z}'}{\mathfrak{P}\mathfrak{R}} = \tan \alpha \tan \beta \tan \chi,$$

in Uebereinstimmung mit Gleichung 6).

Die Polbahnnormale  $n$  ist parallel zu  $CD$ ; tragen wir in  $\mathfrak{P}$  den Winkel  $\chi$  an, so bestimmt die so erhaltene Gerade auf  $AB$  den geradgeführten Punkt  $M$ , in welchem sich gegenwärtig die beiden Burmester'schen Punkte  $M_I, M_{II}$  vereinigen.

3. Kehren wir in Figur 2<sup>a</sup> die Bewegung um, indem wir  $AB$  festhalten, so sind  $M_{II}$  und der unendlich ferne Punkt  $M_I$  die Burmester'schen Punkte für die augenblickliche Lage der mit dem Gliede  $AB$  verbundenen Ebene. Es fragt sich, welche neue Bedingung wir dem Viereck  $ABBA$  auferlegen müssen, damit auch bei dieser umgekehrten Bewegung ein Systempunkt — und dies kann nur  $M_{II}$  sein — momentan ein Bahnelement mit fünfpunktig berührender Tangente durchschreitet. Dann fällt  $M_{II}$  zusammen mit dem unendlich fernen Punkte der Kreispunktcurve  $m$ ; es ist also  $\varphi_{II}$  gleich dem Winkel, den die Focalachse von  $m$  mit der Polbahntangente einschliesst, das heisst,  $\varphi_{II} = -\varphi_F$ , oder nach Gleichung 1):

$$\tan \varphi_{II} = -\tan \alpha \tan \beta \cot \chi.$$

Aus 5) folgt aber

$$\tan \varphi_{II} = -\cot \chi,$$

mithin ist gegenwärtig

$$\tan \alpha \tan \beta = 1,$$

das heisst:

$$8) \quad \alpha + \beta = 90^\circ;$$

die Polbahnnormale  $n$  ist also identisch mit der Geraden  $\mathfrak{P}\mathfrak{R}$ . Dann verwandelt sich die Bedingung 4) in

$$2 \cot \psi + \cot \chi = \tan \alpha + \cot \alpha,$$

oder

$$9) \quad \cot \psi + \cot \chi = \frac{1}{\sin 2\alpha}.$$

Da  $M_{II}$  mit dem unendlich fernen Punkte der Geraden  $AB$  zusammenfällt, so ist  $\mathfrak{P}M_{II}$  parallel zu  $AB$ , also auch umgekehrt  $\mathfrak{P}M_I$  parallel zu  $AB$ . Wir gelangen demnach zu folgendem Ergebniss:

Genügen die Winkel  $\alpha, \beta, \psi, \chi$  des Gelenkvierecks  $ABBA$  den Gleichungen 8) und 9), so wird durch das Viereck in doppelter Weise eine fünfpunktige Geradföhrung vermittelt. Halten wir nämlich das Glied  $AB$  fest, so bewegt sich ein bestimmter Punkt  $M_I$  der Ebene  $AB$  momentan auf einer Geraden senkrecht zu  $AB$ , und kehren wir die Bewegung um, so bleibt ein bestimmter Punkt  $M_{II}$  der Ebene  $AB$  in fünf aufeinander folgenden Lagen auf einer Normalen zu  $AB$ .

Um ein derartiges Viereck zu erhalten, legen wir in Figur 4 durch den Scheitel  $\mathfrak{P}$  des rechten Winkels  $n\mathfrak{P}t$  die Gerade  $\mathfrak{P}A$  beliebig und die Gerade  $\mathfrak{P}B$  so, dass  $\angle n\mathfrak{P}A = \angle B\mathfrak{P}t$  ist, ziehen von einem beliebigen Punkte  $\mathfrak{R}$  des Schenkels  $n$  die Gerade  $\mathfrak{R}\mathfrak{B}$  senkrecht zu  $\mathfrak{P}B$  bis  $\mathfrak{P}B$ , darauf  $\mathfrak{B}\mathfrak{B}'$  parallel zu  $n$  bis  $t$  und machen auf  $t$  die Strecke  $\mathfrak{B}'\mathfrak{B} = 3 \cdot \mathfrak{P}\mathfrak{B}'$ . Sind dann  $\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}'$  irgend zwei Punkte, die durch  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{B}$  harmonisch getrennt werden, so schneiden  $\mathfrak{P}A, \mathfrak{P}B$  die Geraden  $\mathfrak{R}\mathfrak{Z}, \mathfrak{R}\mathfrak{Z}'$  bez. in  $A, B, A, B$ ; denn es ist

$$\frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{Z}} + \frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{Z}'} = \frac{2}{\mathfrak{P}\mathfrak{B}} = \frac{1}{2 \cdot \mathfrak{P}\mathfrak{B}'} = \frac{1}{2 \cdot \mathfrak{P}\mathfrak{R} \sin \alpha \cos \alpha},$$

oder

$$\cot \psi + \cot \chi = \frac{1}{\sin 2\alpha}.$$

Wir ziehen ferner  $\mathfrak{P}U$  parallel zu  $AB$  bis  $AB$ ,  $UT$  parallel zu  $n$  bis  $\mathfrak{P}B$ ,  $TW$  senkrecht zu  $\mathfrak{P}B$  bis  $n$ ; dann ist  $M_I$  der Fusspunkt des von  $W$  auf  $\mathfrak{P}U$  gefällten Lothes. Ziehen wir endlich die Geraden  $\mathfrak{P}R$  und  $WR$  parallel bez. senkrecht zu  $AB$ , so erhalten wir  $M_{II}$ , indem wir die Strecke  $\mathfrak{P}R$  über  $\mathfrak{P}$  hinaus um sich selbst verlängern.

4. Wir wollen noch untersuchen, unter welcher Bedingung in Figur 2<sup>a</sup> die Curve  $m_I$  mit ihrer Tangente in  $M_I$  nicht nur fünf, sondern sechs unendlich benachbarte Punkte gemein hat — es entspricht dies also der höchsten Ordnung der Beröhrung, die überhaupt zwischen einer Koppelcurve und ihrer Tangente eintreten kann. Lassen wir die Koppelgerade aus der Lage  $AB$  in eine unendlich benachbarte Lage  $A'B'$  übergehen, so verwandeln sich die Winkel  $\alpha, \beta, \psi, \chi$  in

$$\alpha + d\alpha, \quad \beta + d\beta, \quad \psi + d\psi, \quad \chi + d\chi.$$

Zu Folge der Gleichung 4) befindet sich der Punkt  $M_I$  in fünf unendlich benachbarten Systemlagen auf einer Geraden; derselbe ist also der Ball'sche Punkt auch für die Koppellage  $A'B'$ . Soll nun  $M_I$  sogar in sechs Nachbarlagen auf einer Geraden bleiben, so ist er zugleich ein *Burmester'scher Punkt* für die Koppellage  $A'B'$ ; es muss also auch für

die Lage  $A'B'$ , wie vorher für  $AB$ , ein Burmester'scher Punkt mit dem Ball'schen Punkte zusammenfallen, das heisst, es müssen auch die Winkel

$$\alpha + d\alpha, \quad \beta + d\beta, \quad \psi + d\psi, \quad \chi + d\chi$$

der Gleichung 4) genügen, oder, was dasselbe ist, es muss das Differential des Ausdruckes

$$2 \cot \psi + \cot \chi - \cot \alpha - \cot \beta + \cot \alpha \cot \beta \cot \chi$$

verschwinden. Die Ausführung der Differentiation liefert die Gleichung:

$$10) \quad \frac{2}{\sin^2 \psi} d\psi + \frac{\cot \alpha \cot \beta + 1}{\sin^2 \chi} d\chi + \frac{\cot \beta \cot \chi - 1}{\sin^2 \alpha} d\alpha + \frac{\cot \alpha \cot \chi - 1}{\sin^2 \beta} d\beta = 0.$$

Hierbei ergeben sich die Werthe von  $d\psi$ ,  $d\chi$ ,  $d\alpha$ ,  $d\beta$  aus der Bedingung, dass für jede Koppellage die Strecken  $AB$ ,  $AB$ ,  $AA$ ,  $BB$  unverändert bleiben. Nun folgt aus Figur 1:

$$AB = \mathfrak{P} \mathfrak{R} \cdot \frac{\sin \chi \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \chi) \sin(\beta + \chi)}$$

$$AB = \mathfrak{P} \mathfrak{R} \cdot \frac{\sin \psi \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \psi) \sin(\beta + \psi)}$$

$$AA = \mathfrak{P} \mathfrak{R} \cdot \frac{\sin \beta \sin(\psi - \chi)}{\sin(\beta + \psi) \sin(\beta + \chi)}$$

$$BB = \mathfrak{P} \mathfrak{R} \cdot \frac{\sin \alpha \sin(\psi - \chi)}{\sin(\alpha + \psi) \sin(\alpha + \chi)}$$

Aus diesen Gleichungen erhalten wir durch Differentiation, wenn wir zur Abkürzung  $\mathfrak{P} \mathfrak{R} = q$  und

$$\sin^2 \chi \cos(\alpha + \beta + \chi) - \sin \alpha \sin \beta \cos \chi = X$$

$$\sin^2 \psi \cos(\alpha + \beta + \psi) - \sin \alpha \sin \beta \cos \psi = \Psi$$

$$\sin^2 \beta \cos(\beta + \psi + \chi) - \cos \beta \sin \psi \sin \chi = B$$

$$\sin^2 \alpha \cos(\alpha + \psi + \chi) - \cos \alpha \sin \psi \sin \chi = A$$

setzen,

$$11) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\sin \chi \sin^2(\beta + \chi) d\alpha + \sin \chi \sin^2(\alpha + \chi) d\beta + X \sin(\alpha - \beta) d\chi \\ \quad = \sin \chi \sin(\alpha + \chi) \sin(\beta + \chi) \sin(\alpha - \beta) \frac{dq}{q} \\ -\sin \psi \sin^2(\beta + \psi) d\alpha + \sin \psi \sin^2(\alpha + \psi) d\beta + \Psi \sin(\alpha - \beta) d\psi \\ \quad = \sin \psi \sin(\alpha + \psi) \sin(\beta + \psi) \sin(\alpha - \beta) \frac{dq}{q} \\ B \sin(\psi - \chi) d\beta - \sin \beta \sin^2(\beta + \chi) d\psi + \sin \beta \sin^2(\beta + \psi) d\chi \\ \quad = \sin \beta \sin(\beta + \psi) \sin(\beta + \chi) \sin(\psi - \chi) \frac{dq}{q} \\ A \sin(\psi - \chi) d\alpha - \sin \alpha \sin^2(\alpha + \chi) d\psi + \sin \alpha \sin^2(\alpha + \psi) d\chi \\ \quad = \sin \alpha \sin(\alpha + \psi) \sin(\alpha + \chi) \sin(\psi - \chi) \frac{dq}{q} \end{array} \right.$$



$$12) \quad \mathfrak{P} W = \frac{du}{d\vartheta},$$

$$13) \quad \mathfrak{P} \mathfrak{C} = \frac{3du}{2d\vartheta + d\tau},$$

$$14) \quad \mathfrak{P} \mathfrak{D} = \frac{3dud\vartheta}{d^2\vartheta}.$$

Der Kreis über  $\mathfrak{P} \mathfrak{D}$  osculirt zugleich die Curve  $\mu$ ; der zweite Krümmungskreis von  $\mu$  hat den auf  $n$  liegenden Durchmesser

$$15) \quad \mathfrak{P} \mathfrak{C}' = \frac{3du}{d\tau - d\vartheta}.$$

Sei ferner  $A$  ein beliebiger Systempunkt,  $A$  der entsprechende Krümmungsmittelpunkt seiner Bahncurve,  $\mathfrak{P} A = r$ ,  $\mathfrak{P} A = \varrho$ ,  $\angle A \mathfrak{P} t = \varphi$ ; dann ist bekanntlich

$$16) \quad \frac{d\vartheta}{du} = \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho} \right) \sin \varphi.$$

Setzen wir endlich  $r \cos \varphi = x$ ,  $r \sin \varphi = y$ , so gelten für die Coordinaten  $x, y, \varphi$  eines jeden der vier Burmester'schen Punkte die beiden Gleichungen\*:

$$17) \quad \begin{cases} (x^2 + y^2) \{ x d\vartheta (3 d^2\vartheta + d^2\tau) + y [d\vartheta (d\vartheta + d\tau) (2 d\vartheta + d\tau) + d^3\vartheta] - 3 du d\vartheta^2 \} - y du \\ \times \{ 5 x d^2\vartheta + 2 y d\vartheta (d\vartheta + 2 d\tau) - 3 du d\vartheta \} = 0, \end{cases}$$

$$18) \quad \begin{cases} d^2\vartheta^2 \tan^4 \varphi - d\vartheta d^2\vartheta (d\vartheta + 2 d\tau) \tan^3 \varphi + (3 d\vartheta d^3\vartheta - 4 d^2\vartheta^2) \tan^2 \varphi \\ + 3 d\vartheta (d\vartheta d^2\tau - d\tau d^2\vartheta) \tan \varphi - d\vartheta^2 (d\vartheta - d\tau) (2 d\vartheta + d\tau) = 0. \end{cases}$$

6. Fall Ia. Wird in Figur 5 das Viereck  $ABBA$  so gezeichnet, dass  $\mathfrak{P} \mathfrak{R}$  auf  $BB$  senkrecht steht, so ist die Polbahnnormale  $n$  identisch mit der Geraden  $\mathfrak{P} A$ ;  $n$  hat also mit den Curven  $m$  und  $\mu$ , von dem dreifach zählenden Punkte  $\mathfrak{P}$  abgesehen, noch bez. die Punkte  $A$  und  $A$  gemein, folglich zerfallen  $m$  und  $\mu$  in die Gerade  $n$  und die Kreise  $c$  und  $\gamma$ , welche bez. durch  $B$  und  $B$  gehen und die Polbahntangente  $t$  in  $\mathfrak{P}$  berühren. Zwei Lothe in  $B$  und  $B$  bestimmen auf  $n$  die Schnittpunkte  $\mathfrak{C}$  und  $\mathfrak{C}'$  dieser Geraden mit  $c$  und  $\gamma$ .

Gegenwärtig ist  $\angle \alpha = \angle \mathfrak{R} \mathfrak{P} B = 90^\circ$ , aus Gleichung 2) folgt also

$$19) \quad \tan \varphi_I = \frac{\tan \beta \cot \psi \cot \chi}{\tan \beta (\cot \psi + \cot \chi) - 1}$$

und  $\tan \varphi_{II} = \infty$ ,

das heisst,  $\varphi_{II} = 90^\circ$ .  $M_{II}$  ist also ein vorläufig noch unbestimmter Punkt auf der Geraden  $n$ .

Construction von  $M_I$ . Wir ziehen  $\mathfrak{C} H$  parallel zu  $AB$  bis  $BB$ , machen auf  $\mathfrak{P} B$  die Strecke  $\mathfrak{P} H' = \mathfrak{P} B + \mathfrak{P} B - BH$  und  $\angle \mathfrak{C} \mathfrak{P} M_I = \angle H' \mathfrak{R} \mathfrak{P}$ ; dann sind  $M_I$ ,  $M_I$  die Fusspunkte der von  $\mathfrak{C}$ ,  $\mathfrak{C}'$  auf  $\mathfrak{P} M_I$  gefällten Lothe.

\* Ueber die Bewegung eines starren ebenen Systems etc. § 7.

Beweis. Es ist  $\angle M_I \mathfrak{P} t = \varphi_I = \angle \mathfrak{P} H' \mathfrak{R}$ , also

$$\cot \varphi_I = \frac{\mathfrak{P} H'}{\mathfrak{P} \mathfrak{R}} = \frac{\mathfrak{P} B}{\mathfrak{P} \mathfrak{R}} + \frac{\mathfrak{P} B}{\mathfrak{P} \mathfrak{R}} - \frac{B H}{\mathfrak{P} \mathfrak{R}}.$$

Nun folgt aus den ähnlichen Dreiecken  $B \mathfrak{C} H$  und  $\mathfrak{P} \mathfrak{R} B$

$$\frac{B H}{B \mathfrak{C}} = \frac{\mathfrak{P} B}{\mathfrak{P} \mathfrak{R}},$$

also ist

$$\frac{B H}{\mathfrak{P} \mathfrak{R}} = \frac{B \mathfrak{C}}{\mathfrak{P} \mathfrak{R}} \cdot \frac{\mathfrak{P} B}{\mathfrak{P} \mathfrak{R}} = \frac{\mathfrak{P} B \cot \beta}{\mathfrak{P} \mathfrak{R}} \cdot \frac{\mathfrak{P} B}{\mathfrak{P} \mathfrak{R}} = \cot \beta \tan \chi \tan \psi$$

und daher

$$\cot \varphi_I = \tan \chi + \tan \psi - \cot \beta \tan \chi \tan \psi,$$

in Uebereinstimmung mit 19).

Construction von  $M_{II}$ . Die rechtwinkligen Coordinaten der vier Burmester'schen Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $M_I$ ,  $M_{II}$  genügen der Gleichung 17). Setzen wir in derselben  $x = 0$ , so ergibt sich

$$20) \quad y^2 \{ d\vartheta (d\vartheta + d\tau) (2d\vartheta + d\tau) + d^3\vartheta \} - y du d\vartheta (5d\vartheta + 4d\tau) + 3du^2 d\vartheta = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind  $y = \mathfrak{P} A$  und  $y = \mathfrak{P} M_{II}$ , also ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} A + \mathfrak{P} M_{II} &= \frac{du d\vartheta (5d\vartheta + 4d\tau)}{d\vartheta (d\vartheta + d\tau) (2d\vartheta + d\tau) + d^3\vartheta} \\ \mathfrak{P} A \cdot \mathfrak{P} M_{II} &= \frac{3du^2 d\vartheta}{d\vartheta (d\vartheta + d\tau) (2d\vartheta + d\tau) + d^3\vartheta}, \end{aligned}$$

und hieraus folgt durch Division

$$\frac{1}{\mathfrak{P} M_{II}} + \frac{1}{\mathfrak{P} A} = \frac{5d\vartheta + 4d\tau}{3du} = 4 \cdot \frac{2d\vartheta + d\tau}{3du} - \frac{d\vartheta}{du},$$

oder nach 13) und 16)

$$= \frac{4}{\mathfrak{P} \mathfrak{C}} - \frac{1}{\mathfrak{P} A} + \frac{1}{\mathfrak{P} A},$$

das heisst:

$$21) \quad \frac{1}{\mathfrak{P} M_{II}} = \frac{4}{\mathfrak{P} \mathfrak{C}} - \frac{2}{\mathfrak{P} A} + \frac{1}{\mathfrak{P} A}.$$

Bezeichnet nun  $\Omega$  den vierten harmonischen Punkt zu  $\mathfrak{P}$ ,  $\mathfrak{C}$ ,  $A$ , so ist

$$\frac{2}{\mathfrak{P} \mathfrak{C}} = \frac{1}{\mathfrak{P} A} + \frac{1}{\mathfrak{P} \Omega},$$

also

$$\frac{1}{\mathfrak{P} M_{II}} = \frac{2}{\mathfrak{P} \Omega} + \frac{1}{\mathfrak{P} A};$$

machen wir daher auf  $n$  die Strecke  $\mathfrak{P} A' = -\mathfrak{P} A$ , so ist  $M_{II}$  der vierte harmonische Punkt zu  $\mathfrak{P}$ ,  $\Omega$ ,  $A'$ .

Der Punkt  $M_{II}$  wird erhalten, indem wir  $B$  mit dem Schnittpunkte der Geraden  $B M_{II}$  und  $\mathfrak{P} \mathfrak{R}$  verbinden.



Der Ball'sche Punkt ist gegenwärtig identisch mit dem Wendepol  $W$ ; fällt also  $M_{II}$  mit  $W$  zusammen, so beschreibt der Wendepol eine Bahncurve mit fünfpunktig berührender Tangente. Dann ist

$$\frac{1}{\mathfrak{P} M_{II}} = \frac{1}{\mathfrak{P} W} = \frac{1}{\mathfrak{P} A} - \frac{1}{\mathfrak{P} A};$$

mit Rücksicht auf 21) folgt also für diese specielle Bewegung des Wendepols die Bedingung:

$$\frac{4}{\mathfrak{P} \mathfrak{C}} = \frac{3}{\mathfrak{P} A} - \frac{2}{\mathfrak{P} A}.$$

7. Fall 1b. Ist in Figur 6  $AB$  parallel zu  $AB$ , so liegt der Punkt  $\mathfrak{A}$  unendlich fern und wir erhalten  $t$ , indem wir  $\angle t \mathfrak{P} A = \angle B \mathfrak{P} \mathfrak{A}_{\infty}$  machen. Dann berührt  $t$  den durch  $\mathfrak{P}$ ,  $A$  und  $B$  gehenden Kreis  $c$ ; derselbe hat also mit der Kreispunktcurve  $m$  den dreifach zählenden Punkt  $\mathfrak{P}$ , die Punkte  $A$  und  $B$  und die imaginären Kreispunkte gemein, das heisst,  $m$  zerfällt in  $c$  und die Polbahnnormale  $n$ . Ziehen wir  $A\mathfrak{C}$  senkrecht zu  $\mathfrak{P}A$  bis  $n$ , so ist  $\mathfrak{P}\mathfrak{C}$  ein Durchmesser von  $c$ .

Im vorliegenden Falle ist  $\psi = \chi = 0$ ; aus Gleichung 2) folgt also  $\cot^2 \varphi = 0$ , das heisst,  $M_I$  und  $M_{II}$  liegen beide auf  $n$ . Zu ihrer Bestimmung dient Gleichung 20), deren Coefficienten vorher durch die gegebenen Stücke  $\mathfrak{P}A = r$ ,  $\mathfrak{P}A = \varrho$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  auszudrücken sind. Nun ist nach 13):

$$\frac{2d\vartheta + d\tau}{3du} = \frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{C}} = \frac{\sin \alpha}{r},$$

also nach 16):

$$d\tau - d\vartheta = 3du \left( \frac{\sin \alpha}{r} - \frac{d\vartheta}{du} \right) = 3 \frac{\sin \alpha}{\varrho} du.$$

Da  $\mathfrak{P}\mathfrak{D}$  unendlich gross wird, so ist nach 14)  $d^2\vartheta = 0$ , also geht Gleichung 18) über in

$$3d^3\vartheta \tan^2 \varphi + 3d\vartheta d^2\tau \tan \varphi - d\vartheta(d\vartheta - d\tau)(2d\vartheta + d\tau) = 0,$$

oder

$$d^3\vartheta \tan^2 \varphi + d\vartheta d^2\tau \tan \varphi + 3 \frac{\sin^2 \alpha}{r\varrho} du^2 d\vartheta = 0.$$

Setzen wir hier der Reihe nach  $\varphi = \alpha$  und  $\varphi = \beta$ , so ergibt sich durch Elimination von  $d^2\tau$

$$d^3\vartheta = \frac{3 \sin \alpha \cos \alpha}{r\varrho \tan \beta} du^2 d\vartheta.$$

Durch Substitution der gefundenen Werthe von  $2d\vartheta + d\tau$ ,  $d\tau - d\vartheta$ ,  $d^3\vartheta$  erhalten wir endlich aus 20) zur Bestimmung von  $M_I$ ,  $M_{II}$  die Gleichung:

$$22) \quad y^2 \sin \alpha \{ 2\varrho \sin \alpha \sin \beta + r \cos(\alpha - \beta) \} - yr(3\varrho + r) \sin \alpha \sin \beta + r^2 \varrho \sin \beta = 0.$$

Ist  $AA = BB$  und  $\angle A \mathfrak{P} B = 2\varepsilon$ , so verwandelt sich die vorige Gleichung in

$$y^2(r \cos 2\varepsilon + 2\varrho \cos^2 \varepsilon) - yr(3\varrho + r) \cos \varepsilon + r^2 \varrho = 0.$$

Soll dann einer der Punkte  $M_I$ ,  $M_{II}$  mit dem Ball'schen Punkte, das heisst mit dem Wendepol  $W$ , zusammenfallen, so muss

$$23) \quad y = \mathfrak{P}W = \frac{r\varrho}{(\varrho - r)\cos\varepsilon}$$

eine Wurzel der letzten Gleichung sein; dies führt zu der Bedingung

$$24) \quad \cos 2\varepsilon = -\frac{r}{r + \varrho}$$

und mithin zu folgender Construction des Vierecks  $ABBA$  (Fig. 7). In dem beliebig gewählten gleichschenkligen Dreieck  $\mathfrak{P}AB$  verlängern wir den Schenkel  $\mathfrak{P}A$  um sich selbst bis  $A'$ , errichten in  $A'$  zu  $A'\mathfrak{P}$  ein Loth, welches  $\mathfrak{P}B$  in  $C$  schneidet, und machen  $CB = \mathfrak{P}A = r$ . Ziehen wir noch  $\mathfrak{P}U$  senkrecht zu  $\mathfrak{P}B$  und  $BU$  senkrecht zu  $AB$ , so trifft die Gerade  $UB$  das von  $\mathfrak{P}$  auf  $AB$  gefällte Loth in  $W$ . Da die Bahncurve des Punktes  $W$  in Bezug auf die Gerade  $\mathfrak{P}W$  symmetrisch ist, so hat sie mit ihrer Tangente in  $W$  nicht fünf, sondern sechs unendlich benachbarte Punkte gemein; das gleichschenklige Trapez  $ABBA$  bewirkt also eine sechspunktige Geradföhrung des Wendepols  $W$ .

In Figur 7 ist der zweite Burmester'sche Punkt identisch mit dem Mittelpunkt  $M$  der Strecke  $AB$ . Die Punkte  $W$  und  $M$  fallen zusammen für  $\mathfrak{P}W = r\cos\varepsilon$ ; dann ist aber nach 23):

$$\cos^2\varepsilon = \frac{\varrho}{\varrho - r},$$

folglich nach 24):

$$\varrho = -3r, \quad 2\varepsilon = 60^\circ.$$

Verhält sich also in dem gleichschenkligen Gelenkviereck  $ABBA$

$$AB:AB:AA = 1:3:4,$$

so beschreibt der Mittelpunkt des Gliedes  $AB$  eine Bahncurve mit sechspunktig berührender Tangente (Fig. 8).

8. Fall IIa. Liegt in Figur 9 der Punkt  $B$  auf dem festen Gliede  $AB$ , so fällt  $\mathfrak{P}$  mit  $A$ ,  $\mathfrak{R}$  mit  $B$ , die Polbahntangente  $t$  mit  $AA$  zusammen. Die Kreispunktcurve  $m$  hat also mit der Geraden  $t$  ausser  $\mathfrak{P}$  noch den Punkt  $A$  gemein und degenerirt deshalb in  $t$  und einen Kreis  $d$ , der durch  $B$  geht und die Polbahnnormale  $n$  in  $\mathfrak{P}$  berührt. Ziehen wir  $B\mathfrak{D}$  senkrecht zu  $AB$  bis  $AA$ , so ist  $A\mathfrak{D}$  der auf  $t$  liegende Durchmesser von  $d$ . Der Durchmesser  $\mathfrak{P}\mathfrak{E}$  des zweiten Krümmungskreises der Curve  $m$  wird unendlich gross, folglich ergibt sich aus 13):

$$d\tau = -2d\vartheta.$$

Es ist ferner nach 14):

$$\frac{3du d\vartheta}{d^2\vartheta} = \mathfrak{P}\mathfrak{D} = \frac{\mathfrak{P}B}{\cos\beta},$$

oder

$$d^2 \vartheta = \frac{3 du d \vartheta \cos \beta}{\Re B}$$

und nach 15), wenn K den Rückkehrpol bezeichnet,

$$\Re \mathfrak{C}' = \frac{3 du}{d\tau - d\vartheta} = -\frac{du}{d\vartheta} = \Re K;$$

die Curve  $\mu$  bleibt daher eine eigentliche Curve dritter Ordnung mit Krümmungskreisen über den Durchmessern  $\Re \mathfrak{D}$  und  $\Re K$ .

Da die Winkel  $\alpha$  und  $\psi$  verschwinden, so dient Gleichung 2) nicht mehr zur Bestimmung der Punkte  $M_I$ ,  $M_{II}$ . Wir benutzen vielmehr Gleichung 18; dieselbe verwandelt sich gegenwärtig in

$$d^2 \vartheta^2 \tan^3 \varphi - d \vartheta d^2 \vartheta (d \vartheta + 2 d \tau) \tan^2 \varphi + (3 d \vartheta d^3 \vartheta - 4 d^2 \vartheta^2) \tan \varphi + 3 d \vartheta (d \vartheta d^2 \tau - d \tau d^2 \vartheta) = 0$$

mit den Wurzeln  $\tan \varphi_I$ ,  $\tan \varphi_{II}$ ,  $\tan \beta$ . Es ist also:

$$\tan \varphi_I + \tan \varphi_{II} + \tan \beta = \frac{d \vartheta (d \vartheta + 2 d \tau)}{d^2 \vartheta}$$

und

$$\tan \varphi_I \tan \varphi_{II} \tan \beta = \frac{3 d \vartheta (d \tau d^2 \vartheta - d \vartheta d^2 \tau)}{d^2 \vartheta^2}.$$

Die hier noch vorkommende unbekannte Grösse  $d^2 \tau$  ermitteln wir am einfachsten aus Gleichung 17); setzen wir in derselben  $x = \Re A$ ,  $y = 0$ , so folgt:

$$d^2 \tau = \frac{3 du d \vartheta}{\Re A} - 3 d^2 \vartheta.$$

Durch Einsetzung der gefundenen Werthe von  $d \tau$ ,  $d^2 \vartheta$ ,  $-\frac{du}{d \vartheta}$ ,  $d^2 \tau$  gehen die vorigen Gleichungen über in

$$25) \left\{ \begin{array}{l} \tan \varphi_I + \tan \varphi_{II} = \Re \mathfrak{D} \left( \frac{1}{\Re K} - \frac{\sin \beta}{\Re B} \right) \\ \tan \varphi_I \tan \varphi_{II} = \frac{\Re \mathfrak{D}}{\Re K} \cdot \frac{\Re B - \Re A \cos \beta}{\Re A \sin \beta}. \end{array} \right.$$

Die Punkte  $M_I$ ,  $M_{II}$  liegen nun auf dem Kreise  $d$ ; bezeichnen wir bez. mit  $N$  und  $T$  die Punkte, in denen die Verbindungslinie  $M_I M_{II}$  die Geraden  $n$  und  $t$  schneidet, so ist, wie in der vorhergehenden Mittheilung gezeigt wurde,

$$\Re N = \frac{\Re \mathfrak{D}}{\tan \varphi_I + \tan \varphi_{II}}$$

und das Theilungsverhältniss

$$\frac{\mathfrak{D} T}{\Re T} = \tan \varphi_I \tan \varphi_{II},$$

also im vorliegenden Falle

$$\frac{1}{\Re N} = \frac{1}{\Re K} - \frac{\sin \beta}{\Re B}$$

und

$$\frac{\mathfrak{D} T}{\Re T} = \frac{\Re \mathfrak{D}}{\Re K} \cdot \frac{\Re B - \Re A \cos \beta}{\Re A \sin \beta}.$$

Verlängern wir die Gerade  $B\mathfrak{D}$  bis zu ihrem Schnittpunkte  $B'$  mit  $n$  und ziehen  $\mathfrak{D}\mathfrak{D}'$  parallel zu  $AB$  bis  $AB$ ,  $\mathfrak{D}'\mathfrak{D}''$  senkrecht zu  $AB$  und  $\mathfrak{D}\mathfrak{D}''$  parallel zu  $n$ , so wird:

$$\mathfrak{P}B' = \frac{\mathfrak{P}B}{\sin \beta}$$

$$B\mathfrak{D}' = \mathfrak{P}\mathfrak{D} \frac{\mathfrak{P}B}{\mathfrak{P}A} \mathfrak{P}\mathfrak{D} \cos \beta$$

$$\mathfrak{D}\mathfrak{D}'' = \frac{B\mathfrak{D}'}{\sin \beta} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{D}(\mathfrak{P}B - \mathfrak{P}A \cos \beta)}{\mathfrak{P}A \sin \beta}$$

und wir erhalten:

$$\frac{1}{\mathfrak{P}N} = \frac{1}{\mathfrak{P}K} - \frac{1}{\mathfrak{P}B'}$$

$$\frac{\mathfrak{D}T}{\mathfrak{P}T} = \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{D}''}{\mathfrak{P}K}.$$

Hieraus ergibt sich die folgende Construction. Wir errichten in  $\mathfrak{P}$  zu  $\mathfrak{P}B$  ein Loth und ermitteln den Schnittpunkt  $V$  desselben mit einer Parallelen durch  $B$  zu  $n$ ; dann bestimmt die Gerade  $BV$  auf  $n$  den Rückkehrpol  $K$  und die Gerade  $K\mathfrak{D}''$  auf  $\mathfrak{P}\mathfrak{D}$  den Punkt  $T$ . Ziehen wir ferner  $\mathfrak{P}V'$  parallel zu  $B'V$  bis  $KV'$  und durch  $V'$  zu  $V\mathfrak{P}$  eine Parallele, so trifft dieselbe  $n$  in  $N$ . Die Gerade  $NT$  schneidet den Kreis  $d$  in  $M_I$  und  $M_{II}$ .

Der Ball'sche Punkt ist gegenwärtig der Schnittpunkt des Wendekreises mit dem Kreise  $d$ , das heisst, der Fusspunkt des Lothes aus  $\mathfrak{P}$  auf die Gerade, die  $\mathfrak{D}$  mit dem Wendepole  $W$  verbindet. Der Punkt  $M_I$  fällt demnach mit dem Ball'schen Punkte zusammen, sobald

$$\tan \varphi_I = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{D}}{\mathfrak{P}W} = - \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{D}}{\mathfrak{P}K}$$

wird. Setzen wir diesen Werth für  $\tan \varphi_I$  in die Gleichungen 25) ein, so folgt durch Elimination von  $\tan \varphi_{II}$

$$\mathfrak{P}K = 2 \cdot \frac{\mathfrak{P}A \cdot \mathfrak{P}B \sin \beta}{\mathfrak{P}A - \mathfrak{P}B \cos \beta}.$$

Sei nun in Figur 10  $\mathfrak{P}AB$  ein beliebiges Dreieck,  $R$  der Schnittpunkt von  $AB$  mit einer Senkrechten in  $\mathfrak{P}$  zu  $\mathfrak{P}A$ , dann ist, wenn wir den Winkel  $B\mathfrak{P}A$  mit  $\beta$  bezeichnen,

$$\mathfrak{P}R = \frac{\mathfrak{P}A \cdot \mathfrak{P}B \sin \beta}{\mathfrak{P}A - \mathfrak{P}B \cos \beta}.$$

Wir machen auf der Verlängerung von  $\mathfrak{P}R$  die Strecke  $\mathfrak{P}W = 2 \cdot \mathfrak{P}R$ , errichten in  $\mathfrak{P}$  zu  $\mathfrak{P}B$  ein Loth, welches die Gerade  $WB$  in  $U$  schneidet, und ziehen  $UB$  parallel zu  $RW$  bis  $\mathfrak{P}B$ ,  $B\mathfrak{D}$  senkrecht zu  $\mathfrak{P}B$  bis  $\mathfrak{P}A$ ,  $\mathfrak{P}M_I$  senkrecht zu  $\mathfrak{D}W$ . Ertheilen wir dem Punkte  $\mathfrak{P}$  noch die Bezeichnung  $A$ , so bewirkt das Gelenkviereck  $ABBA$  eine fünfpunktige Geradföhrung des Punktes  $M_I$  auf der Geraden  $\mathfrak{D}W$ .

Durch Umkehrung der Bewegung erhalten wir aus Figur 9 den Fall IIIa; die Koppelgerade befindet sich dann in der Todtlage  $AB$ . Um also für diesen Fall die Burmester'schen Punkte  $M_I$ ,  $M_{II}$  zu construiren, bestimmen wir zunächst in der eben angegebenen Weise die entsprechenden Krümmungsmittelpunkte  $M_I$ ,  $M_{II}$  und finden hierauf  $M_I$ ,  $M_{II}$  durch die bekannte Bobillier'sche Construction. — Da der Rückkehrkreis die Kreispunktcurve  $\mu$  im Punkte  $\mathfrak{P}$  osculirt, so fällt bei der umgekehrten Bewegung der Ball'sche Punkt mit  $\mathfrak{P}$ , das heisst mit  $A$  zusammen; von einer Geradführung kann dann also nicht mehr die Rede sein.

9. Fall IIb. In Figur 11 haben wir das Viereck  $ABBA$  so gewählt, dass  $\angle A \mathfrak{R} \mathfrak{P} = \chi = 90^\circ$  ist. Beschreiben wir durch die Punkte  $\mathfrak{P}$ ,  $A$ ,  $B$  einen Kreis  $d$  und ziehen in demselben den Durchmesser  $\mathfrak{P}\mathfrak{D}$ , so ist

$$\angle B \mathfrak{P} \mathfrak{D} = \angle \mathfrak{R} \mathfrak{P} A,$$

also  $\mathfrak{P}\mathfrak{D}$  die Polbahntangente  $t$ . Die Curve  $m$  hat mit dem Kreise  $d$  sieben Punkte gemein, sie zerfällt demnach in  $d$  und die Gerade  $t$ .

Aus Gleichung 2) ergibt sich:

$$\begin{aligned} 26) \quad & \tan \varphi_I = \tan \alpha \tan \beta \cot \psi - \tan \alpha - \tan \beta \\ \text{und} \quad & \tan \varphi_{II} = 0. \end{aligned}$$

Construction von  $M_I$ . Wir legen durch  $\mathfrak{P}$  zu  $AB$  eine Parallele, welche  $AB$  in  $E$ , das in  $B$  zu  $AB$  errichtete Loth in  $C$  schneidet, und ziehen von  $C$  nach dem Schnittpunkte von  $\mathfrak{P}\mathfrak{R}$  und  $AE$  die Gerade  $CG$  bis  $AB$ . Machen wir dann auf  $AB$  die Strecke  $BH = GA$  und bestimmen die Schnittpunkte  $\mathfrak{R}'$ ,  $H'$  des Kreises  $d$  mit den Geraden  $\mathfrak{P}\mathfrak{R}$ ,  $\mathfrak{P}H$ , so erhalten wir den Punkt  $M_I$ , indem wir den Bogen  $\mathfrak{R}'H'$  von  $\mathfrak{D}$  aus in demselben Sinne auf  $d$  abtragen. Es ist nämlich:

$$\mathfrak{R}G = \frac{\mathfrak{P}C \cdot \mathfrak{R}A}{\mathfrak{P}E} = \frac{\mathfrak{R}B \cdot \mathfrak{R}A}{\mathfrak{P}E}$$

und

$$\mathfrak{R}H = \mathfrak{R}B + \mathfrak{R}A - \mathfrak{R}G,$$

also:

$$\begin{aligned} \tan \angle \mathfrak{R} \mathfrak{P} H &= \frac{\mathfrak{R}B}{\mathfrak{P}\mathfrak{R}} + \frac{\mathfrak{R}A}{\mathfrak{P}\mathfrak{R}} - \frac{\mathfrak{R}B}{\mathfrak{P}\mathfrak{R}} \cdot \frac{\mathfrak{R}A}{\mathfrak{P}\mathfrak{R}} \cdot \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{R}}{\mathfrak{P}E} \\ &= \tan \alpha + \tan \beta - \tan \alpha \tan \beta \cot \psi, \\ &\quad \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Aus Gleichung 4) ergibt sich für die fünfpunktige Geradführung des Punktes  $M_I$  die Bedingung:

$$2 \cot \psi = \cot \alpha + \cot \beta.$$

Construction von  $M_{II}$ . Setzen wir in 17)  $x = \mathfrak{P}M_{II}$ ,  $y = 0$ , so folgt:

$$\frac{1}{\mathfrak{P}M_{II}} = \frac{3d^2\vartheta + d^2\tau}{3dud\vartheta}.$$

Nun ist wieder  $\mathfrak{P} \mathfrak{C} = \infty$ , also  $d\tau = -2d\vartheta$ ; die Gleichung 18) verwandelt sich demnach in die Gleichung dritten Grades:

$$d^2\vartheta^2 \tan^3\varphi + 3d\vartheta^2 d^2\vartheta \tan^2\varphi + (3d\vartheta d^3\vartheta - 4d^2\vartheta^2) \tan\varphi + 3d\vartheta^2 (d^2\tau + 2d^2\vartheta) = 0.$$

Die Wurzeln derselben sind  $\tan\alpha$ ,  $\tan\beta$ ,  $\tan\varphi_I$ ; mithin ist das letzte Glied

$$3d\vartheta^2 (d^2\tau + 2d^2\vartheta) = -d^2\vartheta^2 \tan\alpha \tan\beta \tan\varphi_I$$

und daher

$$27) \quad \frac{1}{\mathfrak{P} M_{II}} = \frac{d^2\vartheta}{3dud\vartheta} \left( 1 - \frac{d^2\vartheta}{3d\vartheta^2} \tan\alpha \tan\beta \tan\varphi_I \right).$$

Wir erhalten ferner aus 14):

$$\frac{d^2\vartheta}{3dud\vartheta} = \frac{1}{\mathfrak{P} \mathfrak{D}} = \frac{\cos\alpha \cos\beta}{\mathfrak{P} \mathfrak{R}}$$

und aus 16):

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{du} &= \left( \frac{1}{\mathfrak{P} A} - \frac{1}{\mathfrak{P} A} \right) \sin\alpha \\ &= \left\{ \frac{\cos\beta}{\mathfrak{P} \mathfrak{R}} - \frac{\sin(\beta + \psi)}{\mathfrak{P} \mathfrak{R} \sin\psi} \right\} \sin\alpha = -\frac{\sin\alpha \sin\beta}{\mathfrak{P} \mathfrak{R} \tan\psi}, \end{aligned}$$

also

$$\frac{d^2\vartheta}{3d\vartheta^2} = -\frac{\tan\psi}{\tan\alpha \tan\beta}.$$

Setzen wir noch für  $\tan\varphi_I$  den Werth aus 26), so geht Gleichung 27) über in

$$28) \quad \frac{1}{\mathfrak{P} M_{II}} = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\mathfrak{P} \mathfrak{R}} - \frac{\sin(\alpha + \beta) \tan\psi}{\mathfrak{P} \mathfrak{R}}.$$

Der Punkt  $M_{II}$  ergibt sich demnach in folgender Weise. Wir fällen von  $\mathfrak{P}$  auf  $AB$  ein Loth, welches  $AB$  in  $T$  schneidet, machen auf dem Kreise  $d$  den Bogen  $BS' = \mathfrak{D}B$ , bestimmen den Schnittpunkt  $S$  der Geraden  $\mathfrak{P}S'$  mit  $AB$  und tragen die Strecke  $\mathfrak{P}S$  von  $\mathfrak{P}$  aus auf  $\mathfrak{P}\mathfrak{D}$  ab. Den so erhaltenen Punkt  $S''$  verbinden wir mit  $T$  und ziehen durch den Schnittpunkt der Geraden  $TS''$  und  $\mathfrak{P}\mathfrak{R}$  eine Parallele zu  $\mathfrak{P}T$ ; dieselbe trifft  $\mathfrak{P}\mathfrak{D}$  in  $M_{II}$ .

In der That, es verhält sich

$$\mathfrak{P} M_{II} : \mathfrak{P} S'' = T \mathfrak{R} : T \mathfrak{R} + \mathfrak{P} S' \sin(\alpha + \beta).$$

Nun ist

$$\mathfrak{R} T = \mathfrak{P} \mathfrak{R} \cot\psi, \quad \angle \mathfrak{R} \mathfrak{P} S' = \alpha - \beta, \quad \mathfrak{P} S'' = \mathfrak{P} S = \frac{\mathfrak{P} \mathfrak{R}}{\cos(\alpha - \beta)},$$

also

$$\mathfrak{P} M_{II} = \frac{\mathfrak{P} S'' \cdot \mathfrak{R} T}{\mathfrak{R} T - \mathfrak{P} S'' \sin(\alpha + \beta)} = \frac{\mathfrak{P} \mathfrak{R}}{\cos(\alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta) \tan\psi}.$$

Der dem Punkte  $M_{II}$  entsprechende Krümmungsmittelpunkt  $M_{II}$  ist identisch mit  $\mathfrak{P}$ .

Hiermit ist zugleich der Fall IIIb erledigt, der durch Umkehrung der Bewegung aus dem eben behandelten Falle hervorgeht.

10. Fall IV. Sind in Figur 12 die Glieder  $AA$  und  $BB$  parallel, so liegt der Pol  $\mathfrak{P}$  unendlich fern und die Polbahntangente  $t$  wird parallel zu  $AA$ . Füllen wir von dem Schnittpunkte  $\mathfrak{R}$  der Geraden  $AB$  und  $AB$  ein Loth auf  $AA$ , welches die Geraden  $AA$ ,  $BB$ ,  $t$  bez. in  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{D}$  schneidet, so ist bekanntlich  $\mathfrak{R}\mathfrak{A} = \mathfrak{B}\mathfrak{D}$ . Die Kreispunktcuren  $m$  und  $\mu$  zerfallen, wie Herr Rodenberg gezeigt hat\*, in die unendlich ferne Gerade und je eine gleichseitige Hyperbel durch  $A$  und  $B$ , bez.  $A$  und  $B$ , mit den Asymptoten  $t$  und  $\mathfrak{R}\mathfrak{D}$ .

Um auch in diesem Falle die Burmester'schen Punkte  $M_I$ ,  $M_{II}$  zu bestimmen, gehen wir aus von Figur 13, in welcher sich  $AA$  und  $BB$  in einem endlichen Punkte  $\mathfrak{P}$  treffen. Sei wieder  $t$  die Polbahntangente,  $\mathfrak{P}\mathfrak{M}$  ein beliebiger Strahl, der mit  $t$  den Winkel  $\varphi$  bildet; ein Loth von  $\mathfrak{R}$  auf  $t$  schneide  $\mathfrak{P}A$ ,  $\mathfrak{P}B$ ,  $\mathfrak{P}\mathfrak{M}$ ,  $t$  bez. in  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{D}$ . Dann ist, wenn die Bezeichnungen  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  in demselben Sinne gebraucht werden, wie bisher,

$$\tan \alpha = \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{A}}{\mathfrak{P}\mathfrak{D}}, \quad \tan \beta = \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{B}}{\mathfrak{P}\mathfrak{D}}, \quad \tan \varphi = \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{M}}{\mathfrak{P}\mathfrak{D}}.$$

Liegt nun auf  $\mathfrak{P}\mathfrak{M}$  einer der Burmester'schen Punkte, so genügt  $\tan \varphi$  der Gleichung 2), und diese geht über in

$$\mathfrak{D}\mathfrak{M}^2 - \mathfrak{D}\mathfrak{M} \times \left\{ \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{D}\mathfrak{B}}{\mathfrak{P}\mathfrak{D}} (\cot \psi + \cot \chi) - \mathfrak{D}\mathfrak{A} - \mathfrak{D}\mathfrak{B} \right\} + \mathfrak{D}\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{D}\mathfrak{B} \cot \psi \cot \chi = 0.$$

Lassen wir jetzt  $\mathfrak{P}\mathfrak{D}$  unendlich gross werden, so verwandelt sich Figur 13 in Figur 12 und wir erhalten zur Bestimmung von  $M_I$ ,  $M_{II}$  die Gleichung:  $\mathfrak{D}\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{D}\mathfrak{M}(\mathfrak{D}\mathfrak{A} + \mathfrak{D}\mathfrak{B}) + \mathfrak{D}\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{D}\mathfrak{B} \cot \psi \cot \chi = 0$ , oder

$$29) \quad \mathfrak{D}\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{D}\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{D}\mathfrak{M} + A\mathfrak{A} \cdot B\mathfrak{B} = 0.$$

In Figur 12 sind die Punkte  $M_I$ ,  $M_{II}$ , deren Entfernungen von  $\mathfrak{D}$  der letzten Gleichung genügen, unter bloßer Anwendung des Zirkels construirt worden. Um auf der durch  $M_I$  gezogenen Parallele zu  $t$  die Punkte  $M_I$ ,  $M_I$  zu ermitteln, bestimmen wir die Schnittpunkte  $D$ ,  $\Delta$  dieser Geraden mit zwei Parallelen zu  $\mathfrak{R}\mathfrak{D}$  durch  $B$  und  $B$ . Trifft  $BB$  die Geraden  $\mathfrak{D}D$ ,  $\mathfrak{D}\Delta$  bez. in  $D'$ ,  $\Delta'$ , so sind  $D'M_I$  und  $\Delta'M_I$  parallel zu  $\mathfrak{R}\mathfrak{D}$ .

Der Wendekreis zerfällt gegenwärtig in die unendlich ferne Gerade der Ebene und die Polbahntangente  $t$ ; der Ball'sche Punkt ist folglich der Schnittpunkt der durch  $A$  und  $B$  gehenden gleichseitigen Hyperbel mit ihrer Asymptote  $t$ , das heisst, der unendlich ferne Pol  $\mathfrak{P}$ . Im vorliegenden Falle beschreibt also im Allgemeinen kein endlicher Systempunkt eine Bahncurve, die mit ihrer Tangente mehr als drei unendlich benachbarte Punkte gemein hat. Eine Ausnahme hiervon bildet aber der Fall,

\* a. a. O. S. 273.

dass die Seite  $AB$  auf  $AA$  und  $BB$  senkrecht steht. Dann degeneriert nämlich die Hyperbel, die den endlichen Bestandtheil der Kreispunktcurve  $m$  darstellt, in die Geraden  $t$  und  $\mathcal{R}\mathcal{D}$ , folglich befindet sich jeder Punkt von  $t$  — wie bereits Herr Rodenberg bemerkt hat — in vier unendlich benachbarten Lagen auf einer Geraden. Wir wollen diesen interessanten Sonderfall noch etwas eingehender untersuchen.

Gegenwärtig ist  $B\mathcal{B} = 0$ , aus Gleichung 29) folgt also

$$\mathcal{D}M_I = -\mathcal{D}\mathcal{R}, \quad \mathcal{D}M_{II} = 0.$$

Der Punkt  $M_I$  liegt demnach auf  $\mathcal{D}\mathcal{R}$  symmetrisch zu  $\mathcal{R}$ .

Um den auf  $t$  liegenden Punkt  $M_{II}$  zu ermitteln, gehen wir aus von Figur 11 — Fall IIb. In derselben ist bereits  $\angle A\mathcal{R}\mathcal{B} = 90^\circ$ , und wir erhalten aus ihr den jetzt betrachteten Sonderfall, wenn wir den Punkt  $\mathcal{B}$  in unendliche Entfernung verlegen. Nach Gleichung 28) ist in Figur 11:

$$\mathcal{B}M_{II} = \frac{\mathcal{B}\mathcal{R}}{\cos(\alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta)\tan\psi}.$$

Fällen wir, wie in Figur 13, auf  $t$  das Loth  $\mathcal{R}\mathcal{D}$ , welches  $\mathcal{B}A$  und  $\mathcal{B}B$  bez. in  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  schneidet, so wird

$$\mathcal{B}\mathcal{R} = \frac{\mathcal{B}\mathcal{D}}{\cos(\alpha + \beta)},$$

folglich:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}M_{II} &= \mathcal{B}M_{II} - \mathcal{B}\mathcal{D} = \mathcal{B}\mathcal{D} \cdot \frac{1 - \cos(\alpha + \beta)\{\cos(\alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta)\tan\psi\}}{\cos(\alpha + \beta)\{\cos(\alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta)\tan\psi\}} \\ &= \mathcal{B}\mathcal{D} \cdot \frac{(1 + \tan^2\alpha)(1 + \tan^2\beta) - (1 - \tan\alpha\tan\beta)\{1 + \tan\alpha\tan\beta - (\tan\alpha + \tan\beta)\tan\psi\}}{(1 - \tan\alpha\tan\beta)\{1 + \tan\alpha\tan\beta - (\tan\alpha + \tan\beta)\tan\psi\}} \\ &= \mathcal{B}\mathcal{D} \cdot \frac{(\mathcal{B}\mathcal{D}^2 + \mathcal{D}\mathcal{A}^2)(\mathcal{B}\mathcal{D}^2 + \mathcal{D}\mathcal{B}^2) - (\mathcal{B}\mathcal{D}^2 - \mathcal{D}\mathcal{A} \cdot \mathcal{D}\mathcal{B})\{\mathcal{B}\mathcal{D}^2 - \mathcal{B}\mathcal{D}(\mathcal{D}\mathcal{A} + \mathcal{D}\mathcal{B})\tan\psi + \mathcal{D}\mathcal{A} \cdot \mathcal{D}\mathcal{B}\}}{(\mathcal{B}\mathcal{D}^2 - \mathcal{D}\mathcal{A} \cdot \mathcal{D}\mathcal{B})\{\mathcal{B}\mathcal{D}^2 - \mathcal{B}\mathcal{D}(\mathcal{D}\mathcal{A} + \mathcal{D}\mathcal{B})\tan\psi + \mathcal{D}\mathcal{A} \cdot \mathcal{D}\mathcal{B}\}} \end{aligned}$$

Für  $\mathcal{B}\mathcal{D} = \infty$  ergibt sich demnach:

$$30) \quad \lim \mathcal{D}M_{II} = (\mathcal{D}\mathcal{A} + \mathcal{D}\mathcal{B})\tan\psi = \mathcal{D}\mathcal{R}\tan\psi.$$

In Figur 14 wird durch  $ABBA$  ein Gelenkviereck dargestellt, dessen Koppel  $AB$  auf den Seiten  $AA$ ,  $BB$  senkrecht steht. Dann ist  $\angle BAA = \psi$ ; errichten wir also in  $\mathcal{R}$  zu  $AB$  ein Loth, so schneidet dasselbe die Polbahntangente  $t$  in dem Burmester'schen Punkte  $M_{II}$ . Demselben entspricht, wie allen Punkten von  $t$ , ein unendlich ferner Krümmungsmittelpunkt; die Bahncurve von  $M_{II}$  hat also an dieser Stelle mit ihrer Tangente fünf unendlich benachbarte Punkte gemein.

Aus den ähnlichen Dreiecken  $A\mathcal{R}A$  und  $\mathcal{R}\mathcal{D}M_{II}$  folgt

$$A\mathcal{R} : A\mathcal{R} = \mathcal{R}M_{II} : \mathcal{D}M_{II};$$

es verhält sich also auch



Demnach ist  
folglich

$$\Delta A \mathfrak{R} M_{II} \sim \Delta B \mathfrak{D} M_{II},$$

$$\angle \mathfrak{R} M_{II} A = \angle B M_{II} \mathfrak{D}.$$

In derselben Weise ergibt sich, dass  
mithin ist

$$\angle B M_{II} \mathfrak{R} = \angle \mathfrak{D} M_{II} A,$$

$$\angle B M_{II} A = \angle B M_{II} A,$$

dass heisst, der Punkt  $M_{II}$  befindet sich augenblicklich in einem Doppelpunkte seiner Bahncurve\*. Wir erhalten daher den folgenden Satz:

Steht in dem Gelenkviereck die Koppelgerade  $AB$  senkrecht auf den beiden anstossenden Seiten, so beschreibt jeder Punkt der Polbahntangenten augenblicklich einen Undulationspunkt. Ausgenommen ist hiervon nur derjenige Punkt  $M_{II}$ , in welchem das in  $\mathfrak{R}$  zu  $AB$  errichtete Loth die Gerade  $t$  schneidet. Derselbe bleibt nicht nur in vier, sondern in fünf unendlich benachbarten Lagen auf einer zu  $t$  senkrechten Geraden und geht überdies im Verlaufe der Bewegung noch einmal durch die mit  $M_{II}$  bezeichnete Stelle hindurch.

---

\* Vergl. Burmester, Kinematik I, S. 296.

## IX.

### Ueber die Ermittlung der Sterblichkeit, Invalidität u. s. w. bei Gesammtheiten mit ein- und austretenden Personen.

Von

W. KÜTTNER

in Burgk b. Dresden.

---

Die Beobachtungen, die sich auf die Feststellung der Sterblichkeit, Invalidität u. s. w. beziehen, haben sich nicht allein auf eine möglichst grosse Anzahl von Personen zu erstrecken, sondern müssen auch von bestimmter endlicher Dauer sein.

Im Allgemeinen legt man den einzelnen Beobachtungen der hier in Frage kommenden Ereignisse die Dauer eines Jahres zu Grunde. Haben die Beobachtungen länger gewährt, so lassen sich solche meist in Beobachtungen von einjähriger Dauer zerlegen. Schwierigkeiten bieten nur die Fälle, wo die Beobachtungen kürzer als ein Jahr sind, und die hauptsächlich dort angetroffen werden, wo Gesellschaften mit ein- und austretenden Mitgliedern der Beobachtung unterliegen. Die innerhalb eines Jahres bei einer Gesammtheit neu unter Beobachtung kommenden oder der Beobachtung sich entziehenden Personen stellen Beobachtungsfälle von abgekürzter Dauer dar, die weder aus den Gesamtbeobachtungen weggelassen, noch als gleichwerthig mit den übrigen in die Rechnung eingeführt werden können. Durch Weglassung der Eingetretenen oder der neu unter Beobachtung gekommenen Personen würde der Wahrscheinlichkeitswerth in allen den Fällen vergrössert werden, wo es nicht möglich ist, die Personen einzeln zu verfolgen, während man bei Nichtberücksichtigung der Ausgetretenen den Wahrscheinlichkeitswerth ausnahmslos zu klein finden würde.

Theoretische Erörterungen über diesen Gegenstand haben Heym, Wittstein, Behm u. A. gegeben. Namentlich ist es aber Zeuner, der sich mit der Ermittlung der Sterblichkeit in Gesellschaften mit ein- und austretenden Mitgliedern beschäftigt und zuerst eine lichtvolle Darstellung *diesen Gegenstand* gegeben hat. So hochverdienstlich alle diese Arbeiten *und so sehr* namentlich die Zeuner'schen Ausführungen sich durch



derselben Zeit neu unter Beobachtung gekommenen Personen, also die Eingetretenen, mit  $b$  zu bezeichnen, so würden, wenn die mittlere Beobachtungsdauer für die letzteren mit  $\mu$  und für die Ausgeschiedenen mit  $\mu'$  bezeichnet wird, als Gesamtbeobachtungsfälle in Frage kommen:

$$1) \quad a + \mu b - (1 - \mu')c.$$

Ist nun  $\alpha$  mal das der Beobachtung unterlegene Ereigniss eingetreten, so ist nach dem Satze von Bayes die Wahrscheinlichkeit  $h$  der Hypothese, dass  $s$  der gesuchte Wahrscheinlichkeitswerth ist, gleich

$$2) \quad h = \frac{s^\alpha (1-s)^{a+\mu b-(1-\mu')c-\alpha}}{\int_0^1 s^\alpha (1-s)^{a+\mu b-(1-\mu')c-\alpha} ds}.$$

Nun wird aber  $h$  am grössten, oder  $s$  ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit nach der wahrscheinlichsten Hypothese, wenn

$$3) \quad s^\alpha (1-s)^{a+\mu b-(1-\mu')c-\alpha} ds = \text{Maximum},$$

oder

$$1) \quad s = \frac{\alpha}{a + \mu b - (1 - \mu')c}$$

ist.

Diese Formel, die in aller Strenge unter den von uns gemachten Annahmen gilt, ist unabhängig von jedweder Hypothese über die Ein- und Austrittsbewegung und somit auf alle Verhältnisse gleich anwendbar, worin ihre Ueberlegenheit gegenüber allen anderen bis jetzt zur Ableitung gekommenen Formeln beruht. Beziehen wir dieselbe auf die Sterblichkeit, wie es in den nachfolgenden Erörterungen der Einfachheit halber immer geschehen soll, so lassen sich Einwendungen nur gegen die zu Grunde liegende Annahme über den Verlauf der Sterblichkeit machen, und wir haben zu untersuchen, inwieweit diese Einwendungen beachtlich sind.

Man wird ohne Weiteres zugeben müssen, dass kein Grund für eine sprungweise Aenderung der Sterblichkeit vorhanden ist, wie sie bestehen müsste, wenn die Sterbenswahrscheinlichkeit innerhalb eines Jahres unveränderlich wäre. Die Sterblichkeit wird also mit dem Alter stetig wachsen und mithin die Annahme, die unserer Formel zu Grunde liegt, nicht ganz zutreffend sein. Fasst man aber den Verlauf der Sterblichkeit näher in's Auge, so erkennt man leicht, dass sie nur in den höheren Altersjahren, wo die Aus- und Eintrittsbewegungen in den Gesellschaften gewöhnlich nur noch minimale sind, beträchtlich wächst. In den jüngeren Jahren, wo sich hauptsächlich die Zu- und Abgänge vollziehen, ist die Veränderung der Sterblichkeit innerhalb eines Jahres so gering, dass sie bei den Schwankungen, die sich im gesetzmässigen Eintritte der Ereignisse zeigen, für uns gar nicht in Betracht kommt. Daher erscheint auch unter gewöhnlichen Verhältnissen die unserer Formel zu Grunde liegende Annahme zulässig.

Finden dagegen in den höheren Altern, wo die Mortalität sehr beträchtlich wächst, noch grössere Ein- und Austrittsbewegungen statt, so erscheint unsere Formel I) nicht mehr genau genug, sie bei genügend umfänglichen Beobachtungen auf erwähnte Lebensalter anwenden zu können, vielmehr ist es in diesem Falle nöthig, die Sterblichkeit auch innerhalb des Beobachtungsjahres als veränderlich aufzufassen.

Nun ist aber klar, dass, wenn die Sterblichkeit wächst, aus gleich langen Beobachtungsstrecken innerhalb eines Jahres keine übereinstimmende Anzahl von Todesfällen bei einer Gesammtheit erwartet werden darf, sondern, dass wahrscheinlich aus einer Strecke höheren Alters mehr Tode hervorgehen werden, als aus einer gleich langen Strecke niederen Alters. Daher ist, streng genommen, der Werth einer Beobachtung nicht proportional ihrer Beobachtungsdauer, sondern proportional der Wahrscheinlichkeit, während der Beobachtung zu sterben.

Innerhalb eines Altersjahres sind drei verschiedene Beobachtungsfälle zu unterscheiden:

1. Die Beobachtung findet statt im Alter von  $m+x$  bis  $m+1$ ,
2. " " " " " " "  $m$  "  $m+t$  und
3. " " " " " " "  $m+t$  "  $m+x$ .

Die Fälle unter 1. umfassen die Eingetretenen, die bis zum Ende der Beobachtung in der Gesellschaft verbleiben. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein solcher Eingetretener während der Beobachtung stirbt, ist gleich der Wahrscheinlichkeit  $s_x$ , dass ein  $(m+x)$ jähriger vor Erreichung des Alters  $m+1$  mit Tode abgeht. Ist nun weiter die Wahrscheinlichkeit, innerhalb des Alters von  $m$  bis  $m+1$  zu sterben  $=s$ , der Werth einer vollen Beobachtung  $=1$  und der Werth der abgekürzten Beobachtung des Eingetretenen  $=w_1$ , so hat man nach dem obigen Satze:

$$w_1 : 1 = s_x : s,$$

woraus

$$4) \quad w_1 = \frac{s_x}{s}$$

folgt. Der Werth der Beobachtungen aller Eingetretenen, der an Stelle von  $\mu b$  tritt, ist somit:

$$5) \quad \frac{1}{s} \sum s_x.$$

Die Beobachtungsfälle unter 2. beziehen sich auf diejenigen Personen, die bis zum Alter  $m+t$  nicht verstorben sind, aber zu dem angegebenen Alter ausser Beobachtung kommen, das heisst, aus der Gesellschaft austreten. Der Werth  $w_2$  einer solchen Beobachtung und der Werth der Beobachtung eines Eintretenden vom Alter  $m+t$  bis zum Alter  $m+1$  ist aber offenbar gleich einer vollen Jahresbeobachtung, womit sofort

$$w_2 + \frac{s_t}{s} = 1$$

und

$$6) \quad w_2 = 1 - \frac{s_t}{s}$$

folgt. Für den Werth  $\mu'c$  in unserer Formel I) tritt daher

$$c - \frac{1}{s} \Sigma s_t,$$

oder  $(1 - \mu')c$  ist zu ersetzen durch

$$7) \quad \frac{1}{s} \Sigma s_t.$$

Die Beobachtungsfälle der dritten Art umfassen alle diejenigen, die innerhalb des Beobachtungsjahres im Alter  $m + x$  eingetreten, aber nicht bis zur Erfüllung des Alters  $m + 1$  in der Gesellschaft verblieben, sondern im Alter  $m + t$  wieder ausgeschieden sind. Bezeichnen wir den Werth einer solchen Beobachtung mit  $w_3$ , so ist

$$1 - \frac{s_x}{s} + w_3 + \frac{s_t}{s} = 1$$

und

$$8) \quad w_3 = \frac{s_x}{s} - \frac{s_t}{s},$$

weil nach 6) der Werth einer Beobachtung von  $m$  bis  $m + x$

$$= 1 - \frac{s_x}{s}$$

und der Werth einer Beobachtung von  $m + t$  bis  $m + 1$  nach 4)

$$= \frac{s_t}{s}$$

ist.

Der Gesamtwert aller Beobachtungen der dritten Art wird daher durch

$$9) \quad \frac{1}{s} \Sigma s_x - \frac{1}{s} \Sigma s_t$$

dargestellt, woraus folgt, dass diese Beobachtungsfälle alle doppelt zu rechnen sind, und zwar sind sie einmal unter den Eingetretenen und das andere Mal unter den Ausgetretenen aufzuzählen, wie dies in der Regel geschieht. Einer besonderen Berücksichtigung der unter 3) genannten Beobachtungsfälle in unseren Formeln bedarf es daher nicht.

Führen wir die Ausdrücke unter 5) und 7) in I) ein, so erhalten wir endlich

$$II) \quad s = \frac{\alpha}{a + \frac{1}{s} \Sigma s_x - \frac{1}{s} \Sigma s_t},$$

wo  $s_x$  für jeden Eingetretenen und  $s_t$  für jeden Ausgetretenen besonders festzustellen ist und daraus sodann die Summen  $\Sigma s_x$  und  $\Sigma s_t$  zu bilden sind.

Der soeben abgeleiteten Formel liegt weder über die Vertheilung der Ein- und Ausgetretenen, noch über den Verlauf der Sterblichkeit irgend welche willkürliche Annahme zu Grunde; sie besteht in aller Strenge und hat ganz allgemeine Giltigkeit. Freilich setzt sie voraus, dass das, was man sucht — die Function der Sterbenswahrscheinlichkeiten — schon bekannt ist, was aber bei allen strengeren Formeln, die bis jetzt abgeleitet worden sind, auch der Fall ist. Unsere Formel hat jedoch vor den letzteren den sehr beachtlichen Vorzug, dass sie unabhängig von dem Verlaufe der Ein- und Austrittsbewegung ist.

Die Anwendung der Formel II) wird nur dergestalt erfolgen können, dass aus Formel I) zunächst ein erster Näherungswerth für  $s$  ermittelt wird, woraus sodann unter Zugrundelegung irgend welcher Hypothese über den Verlauf der Mortalitätscurve sich  $s_x$  und  $s_t$  bestimmen lassen, mit deren Hilfe weiter nach Formel II) eine zweite Näherung erzielt wird.

Bezeichnet man allgemein mit  $y_u$  die Anzahl der Lebenden vom Alter  $u$ , so ist die Wahrscheinlichkeit  $s_x$ , im Alter von  $m+x$  bis  $m+1$  zu sterben, für den  $(m+x)$ jährigen

$$s_x = \frac{y_{m+x} - y_{m+1}}{y_{m+x}} = 1 - \frac{y_{m+1}}{y_{m+x}}.$$

Verläuft die Mortalitätscurve innerhalb der einzelnen Jahre geradlinig, so ist

$$10) \quad y_{m+x} = y_m - (y_m - y_{m+1})x,$$

und, wenn mit  $l$  die Lebenswahrscheinlichkeit eines  $m$ jährigen bezeichnet wird,

$$11) \quad \left\{ \begin{aligned} s_x &= 1 - \frac{y_{m+1}}{y_m - (y_m - y_{m+1})x} \\ &= 1 - \frac{l}{1 - s \cdot x}. \end{aligned} \right.$$

Führt man diesen Ausdruck in II) ein, so folgt, wenn in dem unendlich kleinen Altersintervall von  $m+x$  bis  $m+x+dx$

eintreten und  $\varphi(x)dx$  Personen

austreten,  $\psi(x)dx$  Personen

$$12) \quad s = \frac{\alpha}{a + \frac{1}{s} \int_0^1 \varphi(x) \left[ 1 - \frac{l}{1 - sx} \right] dx - \frac{1}{s} \int_0^1 \psi(t) \left[ 1 - \frac{l}{1 - st} \right] dt}.$$

Vertheilt sich der Zuwachs und Abgang gleichmässig über das Beobachtungsgebiet, so dass also in dem unendlich kleinen Altersintervall von  $m+x$  bis  $m+x+dx$

eintreten und  
 austreten, so ist

$$\begin{aligned} b dx \text{ Personen} \\ c dx \text{ Personen} \\ \frac{1}{s} \int_0^1 \varphi(x) \left[ 1 - \frac{l}{1-s \cdot x} \right] dx = \frac{b}{s} \int_0^1 \left[ 1 - \frac{l}{1-s \cdot x} \right] dx \\ = \frac{b}{s} \left[ 1 + \frac{l}{s} \log n \cdot l \right] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} \int_0^1 \psi(t) \left[ 1 - \frac{l}{1-s \cdot t} \right] dt = \frac{c}{s} \int_0^1 \left[ 1 - \frac{l}{1-s \cdot t} \right] dt \\ = \frac{c}{s} \left[ 1 + \frac{l}{s} \log n \cdot l \right]. \end{aligned}$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke in 12) folgt sodann die Wittstein'sche Formel

$$13) \quad s = \frac{\alpha}{a + \frac{b}{s} \left[ 1 + \frac{l}{s} \log n \cdot l \right] - \frac{c}{s} \left[ 1 + \frac{l}{s} \log n \cdot l \right]}.$$

Vertheilt sich hingegen der Zu- und Abgang mit Rücksicht auf die Ein- und Austrittsalter proportional der Mortalitätscurve, so wird derselbe innerhalb der unendlich kleinen Altersstrecke von  $m+x$  bis  $m+x+dx$

$$14) \quad \beta y_{m+x} dx$$

und beziehentlich von  $m+t$  bis  $m+t+dt$

$$15) \quad \gamma y_{m+t} dt$$

sein, wo  $\beta$  und  $\gamma$  sich aus den Gleichungen

$$16) \quad b = \beta \int_0^1 y_{m+x} dx$$

und

$$17) \quad c = \gamma \int_0^1 y_{m+t} dt$$

berechnen. Da aber  $s_x = 1 - \frac{y_{m+1}}{y_{m+x}}$ , so geht mit den Ausdrücken 14) und

$$15) \quad \frac{1}{s} \sum s_x m \quad \beta \int_0^1 (y_{m+x} - y_{m+1}) dx$$

und  $\frac{1}{s} \sum s_x$  in



$$\frac{\gamma}{s} \int_0^1 [y_{m+t} - y_{m+1}] dt$$

über. Wird nun hierin für  $y_{m+x}$  und  $y_{m+t}$  der Werth aus 10) substituiert, so folgt:

$$\frac{1}{s} \Sigma s_x = \frac{\beta}{s} \int_0^1 [(y_m - y_{m+1}) - (y_m - y_{m+1})x] dx = \frac{\beta}{s} \frac{y_m - y_{m+1}}{2},$$

$$\frac{1}{s} \Sigma s_t = \frac{\gamma}{s} \int_0^1 [(y_m - y_{m+1}) - (y_m - y_{m+1})t] dt = \frac{\gamma}{s} \frac{y_m - y_{m+1}}{2}.$$

Da aber nach 16) und 17)

$$\beta = \frac{2b}{y_m + y_{m+1}},$$

$$\gamma = \frac{2c}{y_m + y_{m+1}},$$

so ist auch

$$18) \quad \frac{1}{s} \Sigma s_x = \frac{b}{s} \frac{y_m - y_{m+1}}{y_m + y_{m+1}} = \frac{b}{1+l},$$

$$19) \quad \frac{1}{s} \Sigma s_t = \frac{c}{s} \frac{y_m - y_{m+1}}{y_m + y_{m+1}} = \frac{c}{1+l},$$

und mithin, wenn diese Ausdrücke in II) eingeführt werden,

$$20) \quad s = \frac{\alpha}{a + \frac{b-c}{1+l}}.$$

Diese Relation hat Zeuner zuerst angegeben, und sie verdient, wie später noch erörtert werden soll, entschieden den Vorzug vor Wittstein's Formel.

Die Heym'sche Formel darf, abgesehen von dem bei ihrer Ableitung untergelaufenen Irrthum, als ein specieller Fall der Wittstein'schen Formel aufgefasst werden, wie Zeuner in seinem vorzüglichen Werke „Abhandlungen aus der mathematischen Statistik“ ausführlich dargelegt hat. Heym's Formel wird auch kaum jemals Anwendung gefunden haben, da sie bei ihrer geringen Zuverlässigkeit auf viel zu umständliche Rechnungen führt. Eine nochmalige Ableitung dieser Formel erscheint daher hier überflüssig.

Die Anwendbarkeit der älteren Formeln wird, wie im Eingange bereits erwähnt, empfindlich beeinträchtigt durch die ihnen zu Grunde liegenden Hypothesen über die Ein- und Austrittsbewegung. Im strengen Sinne wird diese Bewegung nirgends eine stetige sein, wie bei der Ableitung aller dieser Formeln angenommen worden ist. Ja, man darf getrost annehmen, dass bei den meisten Gesammtheiten die Ein- und Austritte innerhalb des Beobachtungsgebietes sehr unregelmässig verlaufen und zwar so, dass sie zu bestimmten Zeitabschnitten sich ganz besonders anhäufen, zu anderen wieder Null werden, und dass diese Maxima und Minima für den Eintritt auf andere Zeitpunkte fallen, als für den Austritt. Man vergegenwärtige sich nur, dass bei vielen Gesellschaften die Erneuerung des Personals nur einmal jährlich geschieht, und zwar zu Anfang des Frühjahres oder mit Eintritt des Winters, je nachdem der Geschäftsbetrieb in der einen oder der anderen Jahreszeit ein besonders lebhafter ist, während wieder bei anderen Gesellschaften die Zugänge von den wechselnden Conjunctionen abhängen und jeder Stetigkeit entbehren. Eine gleiche Verschiedenheit lässt sich für die Abgänge beobachten. In dem einen Falle finden sie vorzugsweise im Frühjahre, in dem anderen im Herbste statt, und wieder in anderen hängen sie mit der Ableistung der Militärpflicht oder plötzlich eingetretenen Geschäftsstockungen zusammen.

Sehr wichtig bei Anwendung der älteren Formeln sind ferner die zusammen gefassten Altersklassen, mit denen operirt wird. Geschieht nämlich die Ermittlung der Sterblichkeit streng nach den Sätzen der mathematischen Statistik für genau Gleichalterige, so ist die Beobachtungsdauer für die Eingetretenen gleich der Altersstrecke, die vom Eintritte noch bis zur Erfüllung des angetretenen Altersjahres zu verleben ist, also von  $m+x$  bis  $m+1$ , während die Ausgetretenen immer einer Beobachtung unterliegen, die vom Austritte zurück bis zu dem Zeitpunkte reicht, wo das letzte Altersjahr erfüllt worden ist, nämlich in fortschreitender Richtung von  $m$  bis  $m+t$ . Die Beobachtungsdauer ist also hier nicht von der Ein- und Austrittszeit, sondern von dem Ein- und Austrittsalter abhängig. Nun werden aber die zur Zeit  $\tau'$  ein- und ausgetretenen Personen, wenn ihre Anzahl einigermaßen beträchtlich ist, nicht von genau gleichem Alter sein, vielmehr sich auf der Altersstrecke nach rechts und links vertheilen und das um so gesetzmässiger, je grösser ihre Anzahl ist. Findet nun im nächsten Jahre — also zur Zeit  $\tau'+1$  — wie dies ja häufig der Fall ist, eine ähnliche Aus- und Eintrittsbewegung statt, so führt dies auf eine Vertheilung der Aus- und Eingetretenen im Beobachtungsgebiet, die sehr wahrscheinlich proportional der Dichte der Bevölkerung sein und somit sehr nahe der Zeuner'schen Annahme entsprechen wird.

Mit Hilfe des Grundrisses der von Zeuner a. a. O. angegebenen *Darstellungsweise* der Lebenden und Verstörbenen lässt sich die Richtigkeit

dieses Satzes leicht nachweisen. Ist in beistehender Figur 1  $AB = CD$  die einjährige Altersstrecke und  $AC = BD$  die einjährige Geburtenstrecke, so wird die Beobachtungsdauer der zur Zeit  $\tau'$  Eintretenen, die für diese

Alters- und Geburtenstrecke in Frage kommen, durch die schraffierte Fläche  $JGFB$  und die Beobachtungsdauer der für diese Alters- und Geburtenstrecke ebenfalls in Frage kommenden und zur Zeit  $\tau' + 1$  Eintretenen durch  $FHD$  dargestellt. Nun ist aber, da nach Voraussetzung

$$EF = BD$$

u.  $\tau_0 \parallel \tau' \parallel \tau_1 \parallel (\tau' + 1) \parallel \tau_2$ ,

$\triangle FHD = \triangle EJB$  und mithin auch die Flächen  $JBFG + FHD = \triangle BCD$ . Die zur Zeit  $\tau'$  und  $\tau' + 1$  Eintretenen stellen sich also für die Beobachtung so dar, als ob sie im Laufe des Beobachtungsjahres nach und nach im Verhältniss zur Dichte der Bevölkerung eingetreten wären.

Für die Ausgetretenen gilt dasselbe, nur ist das für solche entstehende Bild umgekehrt. Die Beobachtungsdauer der zur Zeit  $\tau'$  und  $\tau' + 1$  Ausgetretenen wird durch die Flächen  $AJG$  und  $GFHC$  der beistehenden Figur 2 ausgedrückt, die zusammen einen Flächeninhalt gleich dem  $\triangle ABC$  haben.

In den Fällen, wo die Ein- und Austrittszeiten innerhalb je zwei aufeinander folgender Jahre verschieden sind, oder die Ein- und Ausgetretenen in den einzelnen

Fig. 1.

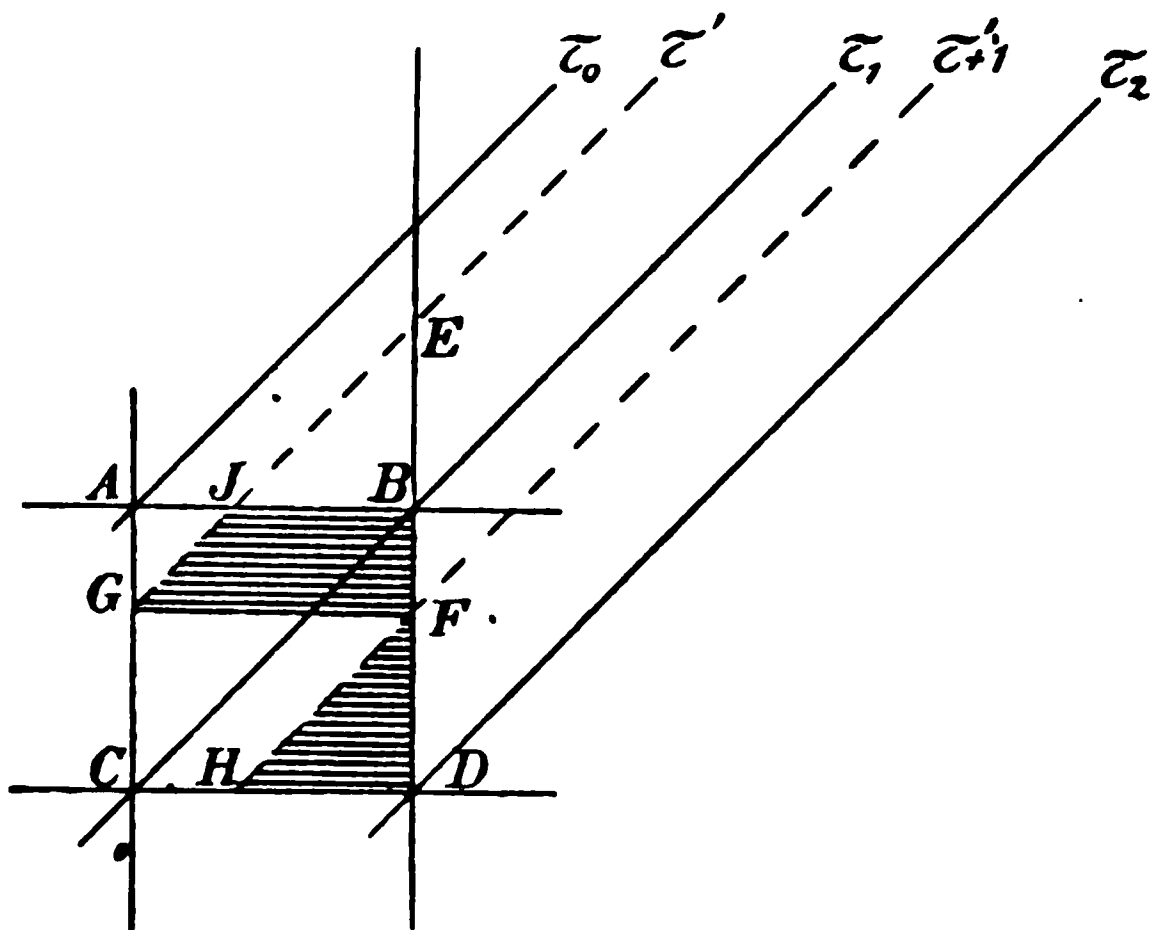
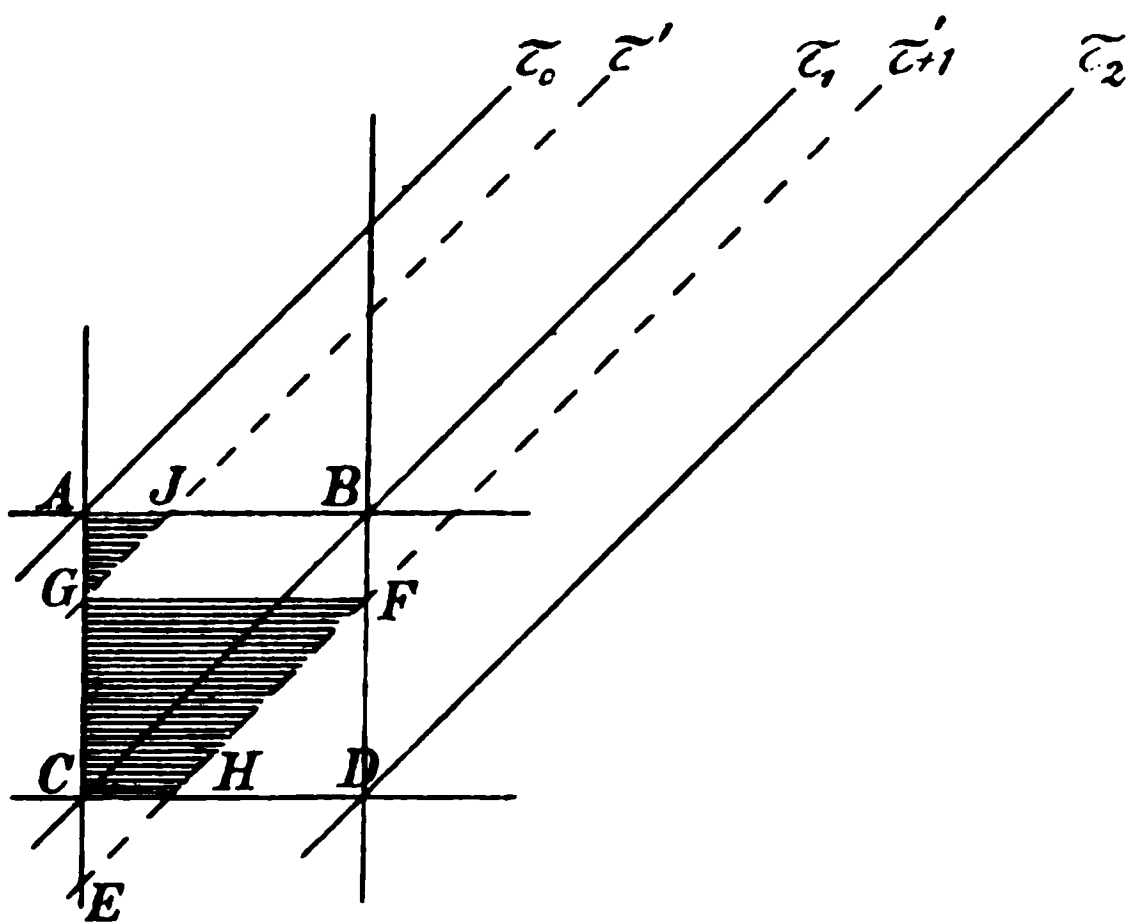


Fig. 2.



Jahren der Anzahl nach wesentlich von einander abweichen, kann auch bei Einführung von Gleichalterigen nach den einschlagenden Sätzen der mathematischen Statistik die Ermittlung der Beobachtungsdauer, bez. die dieser Beobachtungsdauer entsprechende Sterblichkeit nicht entbehrt werden. Es empfiehlt sich, in diesen Fällen die Zu- und Abgänge nach den Ein- und Austrittsaltern zu ordnen und nach Zehnteljahren fortzuschreiten.

Bezeichnen wir allgemein die im Alter von  $m + \frac{x}{10}$  bis  $m + \frac{x}{10} + \frac{1}{10}$  Eintretenden mit  $b_x$  und die in diesem Alter Austretenden mit  $c_x$ , so ist mit hinreichender Genauigkeit:

$$21) \quad \left\{ \begin{aligned} \mu b &= \frac{19}{20} b_0 + \frac{17}{20} b_1 + \frac{15}{20} b_2 + \dots + \frac{3}{20} b_8 + \frac{1}{20} b_9 \\ &= \frac{1}{20} [b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_8 + b_9 \\ &\quad 2(b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_8) \\ &\quad 2(b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_7) \\ &\quad \vdots \\ &\quad 2b_0]. \end{aligned} \right.$$

Hieraus folgt aber:

$$\begin{aligned} \mu b &= \frac{1}{10} \left[ \sum_0^9 b_x + \sum_0^8 b_x + \sum_0^7 b_x + \dots + \sum_0^1 b_x + \sum_0^0 b_x \right] - \frac{b}{20} \\ &= \frac{1}{10} \sum_{x=0}^9 \sum_0^x b_x - \frac{1}{20} b. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\mu' c = \frac{1}{20} c_0 + \frac{3}{20} c_1 + \frac{5}{20} c_2 + \dots + \frac{17}{20} c_8 + \frac{19}{20} c_9$$

und, wenn  $c_0 - c_0$ ,  $c_1 - c_1$ ,  $c_2 - c_2$ ,  $\dots$ ,  $c_8 - c_8$ ,  $c_9 - c_9$  hinzugefügt wird, auch

$$\mu' c = c - \left[ \frac{19}{20} c_0 + \frac{17}{20} c_1 + \frac{15}{20} c_2 + \dots + \frac{3}{20} c_8 + \frac{1}{20} c_9 \right].$$

Damit ist aber der Klammerausdruck auf die Form unter 21) zurückgeführt und wir können ohne Weiteres

$$\mu' c = c - \frac{1}{10} \sum_{x=0}^9 \sum_0^x c_x + \frac{1}{20} c$$

anschreiben.

Gestatten die Verhältnisse die Anwendung der Formel I), so ist:

$$22) \quad s = \frac{\alpha}{a + \frac{1}{10} \sum_{x=0}^9 \sum_0^x b_x - \frac{1}{10} \sum_{x=0}^9 \sum_0^x c_x - \frac{1}{20} (b - c)}.$$

Handelt es sich um die Ermittlung der Sterblichkeit  $s'$  von activen Personen, so sind neben den freiwillig Ein- und Ausgetretenen  $b$  und  $c$  noch die Zugänge  $r$  an Reactivirten und die Abgänge  $i$  durch eingetretene Invalidität zu berücksichtigen. Nun darf aber die Vertheilung dieser Zu- und Abgänge im Beobachtungsjahre als gleichmässig angenommen werden, so dass für die Fälle  $r$ , als auch für die Fälle  $i$  der Werth  $\mu = \frac{1}{2}$  gesetzt werden kann. Damit ergibt sich aber

$$23) \quad s' = \frac{\alpha}{a + \frac{1}{10} \sum_{x=0}^9 \sum_0^x b_x - \frac{1}{10} \sum_{x=0}^9 \sum_0^x c_x - \frac{1}{20} (b - c) + \frac{1}{2} (r - i)}.$$

Verlangt die Untersuchung die Anwendung der Formel II), so wird in den meisten Fällen mit hinreichender Genauigkeit an die in zehn Theile zerlegte Altersstrecke angeschlossen werden können. Da aber nach 11)

$$s_x = 1 - \frac{l}{1 - \frac{x}{10} s - \frac{1}{20} s},$$

wenn  $x$  die Werthe 0, 1, 2, ... 9 durchläuft und die Sterblichkeit in der Mitte einer solchen Altersstrecke als die durchschnittliche Sterblichkeit dieser Strecke angenommen wird, so geht Formel II) in

$$24) \quad s = \frac{\alpha}{a + \frac{1}{s} \sum_{x=0}^9 b_x \left( 1 - \frac{l}{1 - \frac{1+2x}{20} s} \right) - \frac{1}{s} \sum_{x=0}^9 c_x \left( 1 - \frac{l}{1 - \frac{1+2x}{20} s} \right)}$$

über. Bezeichnen wir die im Alter von  $m + \frac{x}{10}$  bis  $m + \frac{x+1}{10}$  Reactivirten mit  $r_x$  und die innerhalb derselben Alter in Invalidität Getretenen mit  $i_x$ , so ist auch

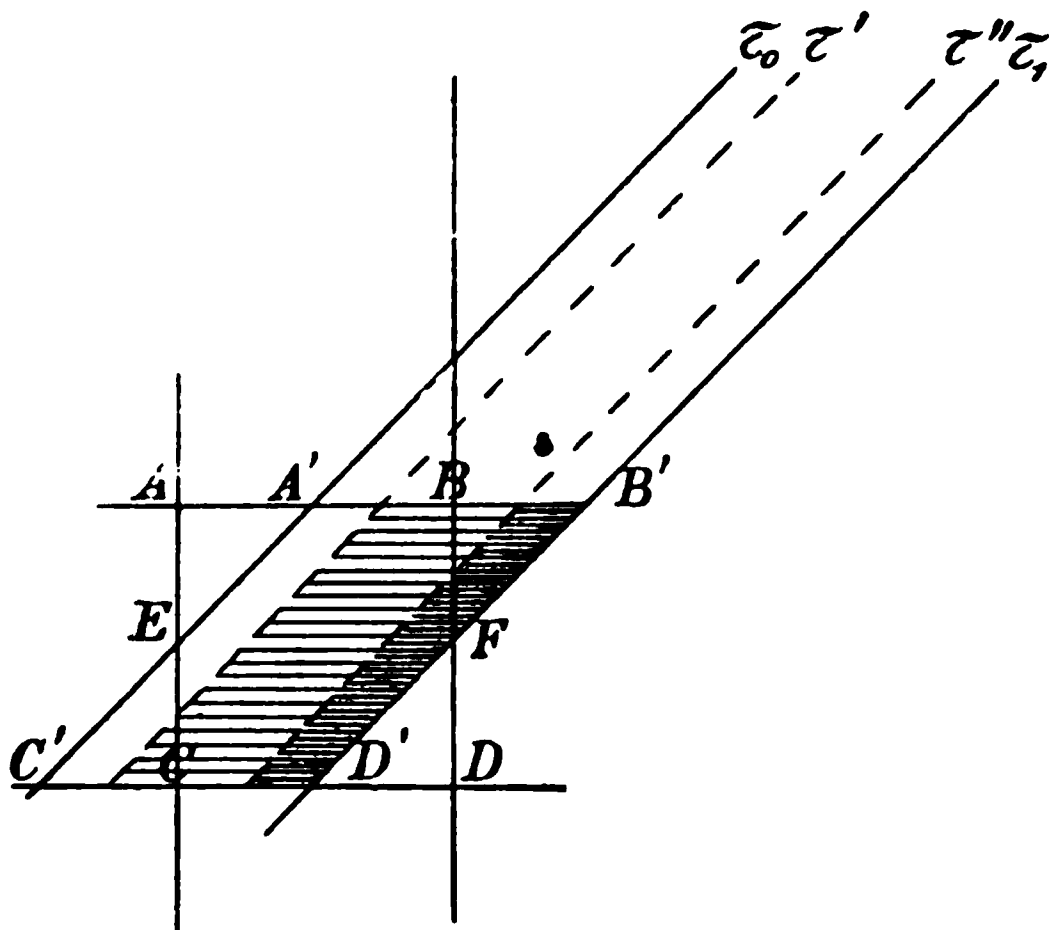
$$25) \quad s' = \frac{\alpha}{a + \frac{1}{s'} \sum_{x=0}^9 (b_x + r_x) \left( 1 - \frac{l}{1 - \frac{1+2x}{20} s'} \right) - \frac{1}{s'} \sum_{x=0}^9 (c_x + i_x) \left( 1 - \frac{l}{1 - \frac{1+2x}{20} s'} \right)}$$

Die letzten zwei Formeln sollten Anwendung finden, wenn in den höheren Lebensaltern beträchtliche Ein- und Austrittsbewegungen stattfinden. Leider ist aber nur ganz selten zur Ermittlung der Sterblichkeit der höheren Altersklassen ein so umfängliches Beobachtungsmaterial vorhanden, dass von der Anwendung der Formeln 24) und 25) ein wirklicher Nutzen erwartet werden kann. Die Beobachtungsfälle nehmen mit wachsendem Alter mehr und mehr ab und die wahrscheinlichen Fehler, die die daraus abgeleiteten Sterbenswahrscheinlichkeiten besitzen, sehr rasch

zu, so dass eine Correctur dieser Werthe nach 24) oder 25) selten angebracht ist. Was nützt eine peinliche Berücksichtigung der wachsenden Sterblichkeit, wenn es der Berechnung an der Erfüllung der vornehmsten Bedingung, dass sie sich auf ein umfassendes Beobachtungsmaterial stützt, fehlt?

Geschieht die Ermittlung der Sterblichkeit nicht für genau Gleichalterige, wie dies sehr oft der Fall ist, sondern für Personen von  $m - \frac{1}{2}$  bis  $m + \frac{1}{2}$  Jahren, die in eine Altersklasse gebracht werden, so fällt die Beobachtungstrecke der Ein- und Ausgetretenen nicht, wie vorstehend, mit der Altersstrecke von  $m + x$  bis  $m + 1$ , bez.  $m$  bis  $m + t$  zusammen, sondern mit der Zeitstrecke, die vom Eintritte  $\tau'$  bis zum Ende des Beobachtungs- (Kalender-) Jahres  $\tau_1$ , bez. vom Anfange des Beobachtungsjahres  $\tau_0$  bis zum Austritte  $\tau''$  vergangen ist. Ist in beistehender Figur 3  $AB = CD$  wieder die

Fig. 3.



einjährige Altersstrecke von  $m$  bis  $m + 1$  und  $AC = BD$  die zugehörige einjährige Geburtenstrecke, so wird die beobachtete Gesamtheit, die wir zur Unterscheidung von den

Gleichalterigen gemischalterigen nennen wollen, durch das Viereck  $A'B'C'D'$  in ihrer zeitlichen Ausdehnung begrenzt. Die in dem Dreieck  $EC'C$  auftretende Gesamtheit ist am Anfange der

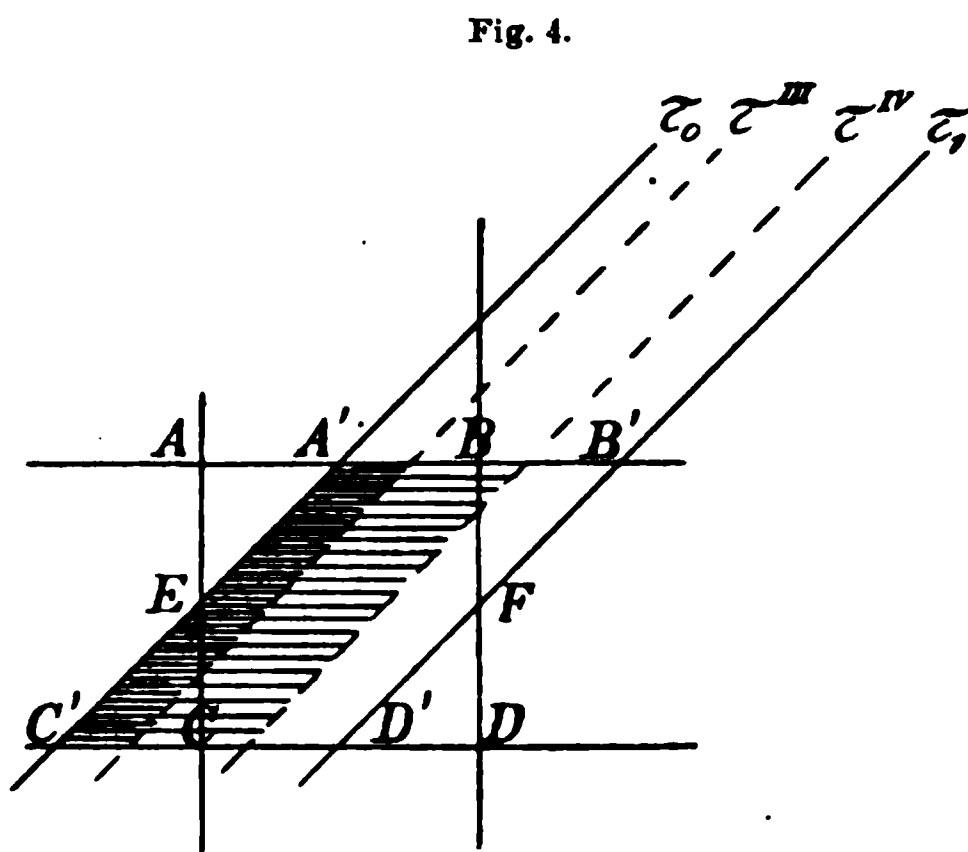
Beobachtung jünger als  $m$ , während die in dem Dreiecke  $BB'F$  auftretende Gesamtheit am Ende der Beobachtung älter als  $m + 1$  Jahre ist. Bei einer gleichmässigen Vertheilung der beobachteten Personen auf die Geburtenstrecke  $AC$  sind indess sämtliche Personen am Anfange des Beobachtungsjahres durchschnittlich  $m$  und am Ende des Beobachtungsjahres sehr nahe durchschnittlich  $m + 1$  Jahre alt.

Die zur Zeit  $\tau'$  eingetretenen Personen werden sämtlich von  $\tau'$  bis  $\tau_1$  und die zur Zeit  $\tau''$  eingetretenen Personen sämtlich von  $\tau''$  bis  $\tau_1$  beobachtet, wie durch die schraffirten Flächen in unserer Figur zur Anschauung gelangt. Man erkennt hieraus leicht, dass bezüglich der Beobachtungsdauer der Eingetretenen ein wesentlicher Unterschied zwischen gleichalterigen und gemischalterigen Gesamtheiten besteht, und dass namentlich bei den letzteren ein Zuwachs, der sich jährlich nur

einmal vollzieht oder in gewissen Perioden wiederholt, nicht als ein solcher angesprochen werden darf, der sich gleichmässig auf die Beobachtungstrecke vertheilt. Eine gleichmässige Vertheilung der Eingetretenen im Beobachtungsgebiet findet vielmehr nur dann statt, wenn in gleichen, aber beliebig kleinen Zeitabschnitten immer ein gleich grosser Zugang stattfindet.

Ganz das Gleiche gilt für die Ausgetretenen, wie aus der nachstehenden Figur 4 folgt. Die Abgänge zur Zeit  $\tau''$  haben eine Beobachtungsdauer gleich  $\tau_0 \tau''$ , während die Abgänge, die sich zur Zeit  $\tau^{IV}$  vollziehen, eine solche von  $\tau_0 \tau^{IV}$  haben. Zwischen den Figuren 3 und 4 besteht nur der Unterschied, dass die schraffirten Flächen auf entgegengesetzten Seiten liegen.

Ueberblickt man die Ergebnisse der vorstehenden Erörterungen, so folgt leicht, dass bei gemischalterigen Gesammtheiten der Zu- und Abgang im Gegensatz zu Gleichalterigen nur selten als gleichmässig sich auf die Beobachtungstrecke vertheilend angenommen werden kann, und dass dort, wo man mit solchen Gesammtheiten rechnet, den Ein- und Ausgetretenen eine ganz besondere Aufmerksamkeit gewidmet werden muss.



Behm, der nur mit gemischalterigen Gesammtheiten rechnet, hat in seinem Nachtrage für 1877 zur Statistik der Mortalitäts-, Invaliditäts- und Morbilitätsverhältnisse bei dem Beamtenpersonal der deutschen Eisenbahnverwaltungen eine Formel für discontinuirliche Zu- und Abgänge entwickelt, aber er behält immer noch für gleiche Zeitabschnitte eine gleich grosse Anzahl von Ein- und Ausgetretenen bei. Es kann dies ja für die Verhältnisse beim Eisenbahnwesen zutreffend sein; allein im Allgemeinen wird, wie wir bereits früher ausgeführt haben, eine annähernd gleiche Vertheilung des Zu- und Abgangs nur selten stattfinden.

Eine Formel, die allgemein zur Berechnung der Sterbenswahrscheinlichkeiten für gemischalterige Gesammtheiten genügen wird, erhält man, wenn die Ein- und Austritte Monat für Monat Berücksichtigung finden. Wir nehmen an, es treten im Januar  $b'_1$ , im Februar  $b'_2$ , im März  $b'_3$  u. s. w. Personen in die Gesammtheit ein, dagegen  $c'_1$  im Januar,  $c'_2$  im Februar,  $c'_3$  im März u. s. w. aus derselben aus, so ist





30)

$$s = \frac{\alpha}{a + \frac{1}{2}(b - c)}$$

und

31)

$$s' = \frac{\alpha}{a + \frac{1}{2}(b + r - c - i)}$$

anschreiben, die bis jetzt ausschliesslich Anwendung gefunden haben. Es ist wohl überflüssig, noch besonders hervorzuheben, dass in der ihnen zu Grunde liegenden zweiten Annahme zugleich der Fall der gleichmässigen Vertheilung der Zu- und Abgänge mit inbegriffen ist.

Die hier für die gemischalterigen Gesammtheiten abgeleiteten Formeln 28) bis 31) nehmen auf die Veränderung, welche die Sterblichkeit im Laufe des Beobachtungsjahres erfährt, keine Rücksicht. Im strengen Sinne lässt sich auch keine Formel ableiten, in der dieser Veränderung vollkommen Rechnung getragen werden könnte, dafern es sich nicht um Gleichalterige, sondern um Gemischalterige handelt, weil sodann in der Gesamtheit nicht eine einzige, sondern eine Anzahl verschiedener Sterblichkeiten herrschen, deren durchschnittlichen Werth wir erfahren. Freilich stünde Nichts im Wege, diese durchschnittliche Sterblichkeit in ähnlicher Weise zu berichtigen, wie es mit der Sterblichkeit der Gleichalterigen durch die Formeln 24) und 25) geschieht; allein einen wirklichen Nutzen würde eine solche Berichtigung nur selten haben, da die ungleiche Dichtigkeit, die innerhalb der Gesamtheit für die verschiedenen Geburtszeiten vermuthet werden muss, die Quelle für einen grösseren Fehler abgibt, als der ist, welcher aus der Annahme einer constanten Sterblichkeit innerhalb des Beobachtungsjahres entsteht.

Wir schliessen gegenwärtige Abhandlung mit einer Anwendung der Formel 29), indem wir an einem numerischen Beispiele den Einfluss, den die Zu- und Abgänge auf den Werth der Sterbenswahrscheinlichkeit auszuüben im Stande sind, zeigen. Bei einer Gesamtheit Activer, die am Anfange der Beobachtung 24½ bis 25½ Jahre alt war, und aus 5502 Personen bestand, sind während des Beobachtungsjahres vom 1. Januar bis 31. December

36 als Active verstorben,

20 invalid geworden,

5 als Reactivirte eingetreten

und endlich

im Monat	freiwillig beigetreten	freiwillig ausgetreten	im Monat	freiwillig beigetreten	freiwillig ausgetreten
Januar . . . .	315	12	Juli . . . . .	3	250
Februar . . . .	510	16	August . . . .	15	122
März . . . . .	120	220	September . .	108	5
April . . . . .	80	755	October . . . .	510	30
Mai . . . . .	12	905	November . .	806	12
Juni . . . . .	—	310	December . .	670	8.

In diesem Falle ist aber:

	$\sum_1^x b'_x =$		$\sum_1^x c'_x =$
$b'_1 = 315$	315	$c'_1 = 12$	12
$b'_2 = 510$	825	$c'_2 = 16$	28
$b'_3 = 120$	945	$c'_3 = 220$	248
$b'_4 = 80$	1025	$c'_4 = 755$	1003
$b'_5 = 12$	1037	$c'_5 = 905$	1908
$b'_6 = 0$	1037	$c'_6 = 310$	2218
$b'_7 = 3$	1040	$c'_7 = 250$	2468
$b'_8 = 15$	1055	$c'_8 = 122$	2590
$b'_9 = 108$	1163	$c'_9 = 5$	2595
$b'_{10} = 510$	1673	$c'_{10} = 30$	2625
$b'_{11} = 806$	2479	$c'_{11} = 12$	2637
$b'_{12} = 670$	3149	$c'_{12} = 8$	2645

$$b = 3149 \sum_{x=1}^{x=12} \sum_1^x b'_x = 15743$$

$$c = 2645 \sum_{x=1}^{x=12} \sum_1^x c'_x = 20977.$$

Damit folgt:

$$s' = \frac{36}{5502 + \frac{15743}{12} - \frac{20977}{12} - \frac{3149 - 2645}{24} + \frac{5 - 20}{2}} = \frac{36}{5037\frac{1}{3}} = 0,00715.$$

Hätte man die Sterblichkeit in vorliegendem Falle nach der Wittstein'schen Formel 31) berechnet, so würde als Resultat

$$s' = \frac{36}{5746,5} = 0,00626$$

gefunden worden sein. Die Abweichung ist, wie man sieht, sehr beträchtlich und rechtfertigt die etwas umständliche Ermittlung vollkommen. Dabei ist keineswegs die Aus- und Eintrittsbewegung, die unser Beispiel zeigt, mit Rücksicht auf die ältere Berechnungsweise besonders ungünstig; Grenzwerthe erhält man vielmehr, wenn man einmal die Eintritte am 1. Januar und die Austritte am 31. December annimmt, das andere Mal hingegen den Zugang am letzten December und den Abgang am ersten Januar sich vollziehen lässt. Im ersteren Falle wird

$$s' = 0,00416$$

gefunden, während im letzteren Falle

$$s' = 0,01263$$

ist. Diese Zahlen reden eine zu deutliche Sprache, als dass es noch eines besonderen Hinweises auf den Werth einer angemessenen Berücksichtigung der Zu- und Abgänge bedürfe.

## X.

# Ueber bedingt periodische Bewegungen eines materiellen Punktes auf Oberflächen zweiter Ordnung mit besonderer Berücksichtigung der Grenzfälle.

Von  
OTTO PUND.

Schluss.

### Dritter Abschnitt.

Die Bewegung eines materiellen Punktes auf einer centrischen Oberfläche zweiter Ordnung unter Einwirkung einer vom Mittelpunkt ausgehenden der Entfernung proportionalen Kraft.

#### § 1.

##### Aufstellung der Bewegungsgleichungen.

Um das im ersten Abschnitte angegebene Problem der Bewegung eines Punktes auf einem Ellipsoid weiter zu behandeln, haben wir uns der elliptischen Coordinaten zu bedienen und setzen folgende Definitionen und Bezeichnungen fest. Die Constanten des Coordinatensystems seien  $\alpha, \beta, \gamma$ , und es sei  $\alpha > \beta > \gamma$ . Sind dann  $x, y, z$  die Coordinaten irgend eines Punktes in Bezug auf ein gegebenes Cartesisches Coordinatensystem, so sollen die elliptischen Coordinaten  $\lambda, \mu, \nu$  als die, wie bekannt, reellen und den Ungleichungen

$$1) \quad \alpha > \nu > \beta > \mu > \gamma > \lambda > -\infty$$

genügenden Wurzeln der folgenden cubischen Gleichung in  $t$

$$2) \quad \frac{x^2}{\alpha - t} + \frac{y^2}{\beta - t} + \frac{z^2}{\gamma - t} = 1$$

definiert sein. Nehmen wir nun an, dass  $\alpha, \beta, \gamma$  so gewählt sind, dass mit Bezug auf die Gleichung des im ersten Abschnitte erwähnten Ellipsoides

$$3) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$a^2 - b^2 = \alpha - \beta$ ,  $a^2 - c^2 = \alpha - \gamma$  und

$$4) \quad a^2 = \alpha - \lambda_0, \quad b^2 = \beta - \lambda_0, \quad c^2 = \gamma - \lambda_0$$

ist, so ist die Gleichung des Ellipsoides in elliptischen Coordinaten  $\lambda = \lambda_0$ , und wir haben dann

$$5) \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = \alpha + \beta + \gamma - \lambda_0 - \mu - \nu, \\ \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{(\mu - \lambda_0)(\nu - \lambda_0)}{(\alpha - \lambda_0)(\beta - \lambda_0)(\gamma - \lambda_0)}, \\ 4(dx^2 + dy^2 + dz^2) = \frac{(\lambda_0 - \mu)(\nu - \mu)}{(\alpha - \mu)(\beta - \mu)(\gamma - \mu)} d\mu^2 + \frac{(\lambda_0 - \nu)(\mu - \nu)}{(\alpha - \nu)(\beta - \nu)(\gamma - \nu)} d\nu^2, \\ 4\left(\frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2} + \frac{dz^2}{c^2}\right) = \frac{\mu - \nu}{(\alpha - \mu)(\beta - \mu)(\gamma - \mu)} d\mu^2 + \frac{\nu - \mu}{(\alpha - \nu)(\beta - \nu)(\gamma - \nu)} d\nu^2. \end{array} \right.$$

In Folge dieser Gleichungen gehen nun die Integrale Ib) und IIb) des ersten Abschnittes über in

$$6) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} \left[ \frac{(\mu - \lambda_0)(\mu - \nu)}{(\alpha - \mu)(\beta - \mu)(\gamma - \mu)} \mu'^2 + \frac{(\nu - \lambda_0)(\nu - \mu)}{(\alpha - \nu)(\beta - \nu)(\gamma - \nu)} \nu'^2 \right] \\ \quad = g(\alpha + \beta + \gamma - \lambda_0 - \mu - \nu) + 2h, \\ \frac{1}{4} (\mu - \lambda_0)(\nu - \lambda_0) \left[ \frac{\mu - \nu}{(\alpha - \mu)(\beta - \mu)(\gamma - \mu)} \mu'^2 + \frac{\nu - \mu}{(\alpha - \nu)(\beta - \nu)(\gamma - \nu)} \nu'^2 \right] \\ \quad = -g(\mu - \lambda_0)(\nu - \lambda_0) + k(\alpha - \lambda_0)(\beta - \lambda_0)(\gamma - \lambda_0) \end{array} \right.$$

und es ergeben sich die folgenden beiden Bewegungsgleichungen:

$$7) \left\{ \begin{array}{l} (\mu - \lambda_0)(\nu - \mu)^2 \mu'^2 = -4g(\alpha - \mu)(\beta - \mu)(\gamma - \mu)(\mu^2 + 2\delta\mu + \varepsilon), \\ (\nu - \lambda_0)(\mu - \nu)^2 \nu'^2 = -4g(\alpha - \nu)(\beta - \nu)(\gamma - \nu)(\nu^2 + 2\delta\nu + \varepsilon), \end{array} \right.$$

wo gesetzt ist:

$$8) \left\{ \begin{array}{l} 2\delta = -\frac{2h}{g} - \alpha - \beta - \gamma + \lambda_0, \\ \varepsilon = \frac{k}{g}(\alpha - \lambda_0)(\beta - \lambda_0)(\gamma - \lambda_0) - 2\delta\lambda_0 - \lambda_0^2. \end{array} \right.$$

Vorausgesetzt nun, dass die Bewegung nicht auf einer Krümmungslinie vor sich geht ( $\mu'^2 = 0, \nu'^2 = 0$ ), folgt aus den Gleichungen 7) in Verbindung mit den Ungleichungen 1) leicht, dass  $\mu^2 + 2\delta\mu + \varepsilon > 0$ , dagegen  $\nu^2 + 2\delta\nu + \varepsilon < 0$  ist. Beachtet man nun noch, dass für hinreichend grosse Werthe von  $t$   $t^2 + 2\delta t + \varepsilon > 0$  ist, so erkennt man, dass die Gleichung

$$t^2 + 2\delta t + \varepsilon$$

zwei reelle Wurzeln hat, die, mit  $\varrho$  die grössere und  $\sigma$  die kleinere bezeichnet, den Ungleichungen

$$9) \quad \varrho > \nu > \sigma > \mu$$

genügen. Mit den Constanten  $h$  und  $k$  sind sie durch die Gleichungen

$$10) \left\{ \begin{array}{l} \frac{2h}{g} = -\alpha - \beta - \gamma + \lambda_0 + \varrho + \sigma, \\ \frac{k}{g} = \frac{(\varrho - \lambda_0)(\sigma - \lambda_0)}{(\alpha - \lambda_0)(\beta - \lambda_0)(\gamma - \lambda_0)} \end{array} \right.$$

verbunden, letztere sind also auch immer reell, und man erhält demnach alle Arten der Bewegungen, welche nicht auf Krümmungslinien erfolgen, wenn man  $\varrho$  und  $\sigma$  alle Werthe den Ungleichungen



Da der materielle Punkt auch auf dem Ellipsoid ruhen kann und diese Möglichkeit bei der vorhergehenden Untersuchung ausgeschlossen wurde, so ist noch nöthig, auch diesen Fall in Betracht zu ziehen. Es ergibt sich durch einfache Betrachtungen, dass der Punkt sich nur in einem Scheitel des Ellipsoids befinden kann, oder dass die elliptischen Coordinaten des Ruhepunktes doppelte Wurzeln der Gleichung  $R(t) = 0$  sind.

Die Wurzeln der Gleichung  $t^2 + 2\delta t + \varepsilon = 0$  sind also auch in den soeben betrachteten Fällen nicht nur reell, sondern auch gewissen Bedingungen unterworfen. Bezeichnen wir sie wie vorhin mit  $\varrho$  und  $\sigma$ , unter  $\varrho$  die grössere verstanden, falls nicht  $\varrho = \sigma$  ist, so gelangt man zu dem einfachen Ergebniss, dass man alle Arten der Bewegungen überhaupt erhält, wenn man  $\varrho$  und  $\sigma$  den Ungleichungen 11) entsprechend wählt, aber durch das Zeichen  $>$  die Gleichheit nicht ausschliesst.

Aus den obigen Untersuchungen folgt nun, dass wenn die Parameter einer Krümmungslinie eine doppelte Wurzel von  $R(t)$  ist, die Bewegung auf der Krümmungslinie möglich ist, nicht aber, dass sie nothwendig stattfindet. Wenn nämlich die Ungleichungen 11) in ihrer strengen Form erfüllt sind, so kann auch eine Bewegung auf einem zweifach ausgedehnten Gebiete stattfinden, wofür die genaueren Bedingungen später angegeben werden sollen. Ebenso braucht der materielle Punkt nicht zu ruhen, wenn  $R(t) = 0$  zwei Doppelwurzeln hat. Nur in dem Falle  $\varrho = \beta$ ,  $\sigma = \gamma$  ist keine andere Möglichkeit denkbar.

## § 2.

### Eintheilung der Bewegungsformen.

Auf Grund dieser Bemerkungen kann man die sämtlichen Bewegungsformen in folgender Weise eintheilen:

I. Strenge Giltigkeit der Ungleichungen  $\varrho > \sigma$ ,  $\varrho > \beta$ ,  $\alpha > \sigma > \gamma$ .

a)  $R(t) = 0$  hat keine Doppelwurzel. Nur bedingt periodische Bewegungen.

A. Reguläre Bewegungsformen.

b)  $R(t) = 0$  hat eine Doppelwurzel; daher auch Bewegung auf Krümmungslinien möglich. Nach später ersichtlichen Eigenschaften theilen wir diese Bewegungsformen ein in

B. Regulär-singuläre Bewegungsformen.

C. Regulär - asymptotisch - singuläre Bewegungsformen.

c)  $R(t) = 0$  hat zwei Doppelwurzeln. Im Allgemeinen ist das Bewegungsgebiet ein zweifach ausgedehntes; doch sind auch Bewegungen auf Krümmungslinien möglich und ferner auch Ruhe.

D. Regulär - asymptotisch - singulär - asymptotische Bewegungsformen.



hinaufrücken, so ergibt sich folgender Unterschied zwischen beiden Bewegungen. Beim Ellipsoid wird zunächst um beide Scheitel ein einfach zusammenhängendes Gebiet für die Bewegung zugänglich; schneidet die Kugelfläche die Scheitel der mittleren Achse, so verschmelzen beide Gebiete in ein zweifach zusammenhängendes, welches schliesslich, wenn die Kugelfläche durch die Scheitel der kleinsten Achse hindurchgeht, in die ganze Oberfläche des Ellipsoids übergeht. Beim Paraboloid dagegen wird stets ein einfach zusammenhängender Theil der Oberfläche herausgeschnitten, denn Scheitel der mittleren und kleinsten Achse rücken ins Unendliche.

Nach dieser allgemeinen Uebersicht wollen wir uns jetzt eine genaue Vorstellung von den Uebergängen der verschiedenen Bewegungen in einander verschaffen, indem wir sie nach der Lage des Niveaus der Geschwindigkeit 0 ordnen. Bei der Verkleinerung der Niveaueugeln sind drei Arten von Ellipsoiden zu unterscheiden, je nachdem nämlich das Niveau erst durch die Kreispunkte und dann durch die Scheitel der mittleren Achse hindurchgeht oder umgekehrt, oder beides zugleich erfolgt. Wir führen im Folgenden die Untersuchung nur für den ersten Fall durch, für welchen  $\alpha + \gamma > 2\beta$  ist.

### § 3.

#### Zusammenhang der Bewegungsformen mit der Veränderung der Constanten.

Mit den römischen Ziffern in Klammern (I bis XVIII) verweisen wir auf die unten zusammengestellten 18 verschiedenen Bewegungsformen und setzen im Folgenden  $\varrho + \sigma = s$ ,  $\varrho - \sigma = d$ , so dass nach 11) folgende Ungleichungen bestehen:

$$\text{für } s: \quad s \geq \beta + \gamma$$

$$\text{für } d: \quad d \geq 0, \quad d \geq 2\beta - s, \quad d \geq s - 2\alpha.$$

I. Geht das Niveau der Geschwindigkeit 0 durch die Scheitel der grossen Achse hindurch  $\left(-\frac{2h}{g} = \alpha - \lambda_0, s = \beta + \gamma\right)$ , so muss sich der Körper in einem derselben in Ruhe befinden (XVIII).

II. III. Verläuft das Niveau zwischen diesen Scheiteln und den Kreispunkten oder geht im Grenzfall durch letztere hindurch  $\left(\alpha - \lambda_0 > -\frac{2h}{g} \geq \alpha + \gamma - \beta - \lambda_0, 2\beta \geq s > \beta + \gamma\right)$ , so ist

$$s - 2\gamma > d > 2\beta - s \geq 0 > s - 2\alpha$$

und  $d$  kann also wachsend alle Werthe von  $2\beta - s$  bis  $s - 2\gamma$  annehmen;  $\varrho$  nimmt dann von  $\beta$  bis  $s - \gamma < \alpha$  zu,  $\sigma$  von  $s - \beta \leq \beta$  bis  $\gamma$  ab. Hat  $d$  den kleinsten Werth, so findet eine Oscillation des Punktes in der Y-Ebene statt zwischen den Kreispunkten, sie werden für den oben bezeichneten Grenzfall wirklich erreicht (XIII. XIV). Wächst nun  $d$ , so nimmt das vorher linienförmige Gebiet eine endliche Breite an; es wird





nehmendem  $d$  spaltet sich diese in zwei, zwischen welchen sich der Körper bewegt (III), dieses vergrössert sich immer mehr, bis es beim grössten Werth von  $d$  im ersten Theilintervall ein glockenförmiges wird (VI). Durchwandert jetzt  $d$  das zweite Theilintervall, so wächst  $\rho$  von  $s - \beta > \beta$  bis  $\alpha$ , und nimmt  $\sigma$  von  $\beta$  bis  $s - \alpha > \gamma$  ab. Es schiebt sich also genau wie bei IV. V. vom Hauptschnitt  $\mu = \beta$  aus ein unzugängliches Gebiet ein (IV), und wenn  $d$  den grössten Werth besitzt, so vereinigen sich die beiden auf dem Ellipsoid möglichen Bewegungsgebiete in ein einziges, indem sich im Hauptschnitt  $\nu = \alpha$  verschmelzen (VIII). In dem Grenzfall VII (wo das Niveau der Geschwindigkeit 0 gerade durch die Scheitel der kleinsten Achse hindurchgeht) hat das mittlere Intervall  $s - 2\beta \dots 2\alpha - s$  keine Ausdehnung. Wir haben dann statt des glockenförmigen Gebietes die ganze Oberfläche des Ellipsoids (IX). Jetzt trete  $d$  in das letzte Intervall, es wächst  $\rho$  von  $\alpha$  bis  $s - \gamma$  und fällt  $\sigma$  von  $s - \alpha \leq \beta$  bis  $\gamma$ . Das Bewegungsgebiet ist also ein zonenförmiges (II), das sich schliesslich soweit verkleinert, dass es in den Hauptschnitt  $\mu = \gamma$  zusammenschrumpft (XV).

Es sind jetzt noch die Fälle zu behandeln, in denen sich das Niveau der Geschwindigkeit 0 ganz innerhalb des Ellipsoids befindet  $\left(\gamma - \lambda_0 > -\frac{2h}{g}\right)$ . Wir unterscheiden  $s \leq 2\alpha$  und  $s > 2\alpha$ .

VIII. IX.  $s \leq 2\alpha$ . Dann ist

$$s - 2\gamma > d > 0 > s - 2\alpha > 2\beta - s.$$

Wir theilen das Intervall, welches  $d$  durchlaufen kann, in drei Theile:  $0 \dots 2\alpha - s$ ,  $2\alpha - s \dots s - 2\beta$ ,  $s - 2\beta \dots s - 2\gamma$ . Für den Grenzfall  $s = 2\alpha$  hat das erste Intervall keine Ausdehnung: es findet ein Umlauf im Hauptschnitt  $\nu = \alpha$  statt (XII). Durchläuft sonst  $d$  den ersten Abschnitt des Intervalls, so nimmt  $\rho$  von  $\frac{s}{2} > \beta$  bis  $\alpha$  zu und  $\sigma$  von  $\frac{s}{2} < \alpha$  bis  $s - \alpha > \beta$  ab. Beim kleinsten Werth von  $d$  findet also eine Bewegung auf der Krümmungslinie  $\nu = \frac{s}{2}$  statt (X), bei grösseren Werthen von  $d$  theilt sich diese, ein zonenförmiges Gebiet zwischen sich lassend (III), bis schliesslich  $\rho = \alpha$  wird, und damit eine Verschmelzung mit dem andern noch möglichen Gebiete stattfindet, welches symmetrisch zu diesem in Bezug auf den Hauptschnitt  $\nu = \alpha$  liegt (VII). Jetzt werde  $d$  im zweiten Intervall angenommen, bei dessen Durchlaufung  $\rho$  von  $\alpha$  bis  $s - \beta$  zu-,  $\sigma$  von  $s - \alpha \leq \alpha$  bis  $\beta$  abnimmt. Das Gebiet ist ein zonenförmiges (I) und geht beim grössten Werth von  $d$  in die ganze Oberfläche des Ellipsoids über (V). Gelangt endlich  $d$  in das letzte Theilintervall, so schiebt sich vom Hauptschnitt  $\mu = \beta$  aus ein der Bewegung unzugängliches Gebiet *beiderseits ein*, sodass wieder ein zonenförmiges entsteht (II) und schliess-





Bei dieser Schreibweise kann man die Zeit  $t$ , welche verfließt, wenn der materielle Punkt von der Lage  $(\mu_0 \nu_0)$  in die Lage  $(\mu \nu)$  gelangt, in folgender Form angeben. Es werde gesetzt

$$[\mu_0 \mu] = \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{(\mu - \lambda_0)^2 d\mu}{V(\alpha - \mu)(\beta - \mu)(\mu - \gamma)(\varrho - \mu)(\sigma - \mu)(\mu - \lambda_0)},$$

$$[\nu_0 \nu] = \int_{\nu_0}^{\nu} \frac{(\nu - \lambda_0)^2 d\nu}{V(\alpha - \nu)(\nu - \beta)(\nu - \gamma)(\varrho - \nu)(\nu - \sigma)(\nu - \lambda_0)}$$

und ebenfalls den Wurzeln der positive Werth beigelegt. Dann ist

$$2\sqrt{g}t = \operatorname{sgn}(\nu - \nu_0)[\nu_0 \nu] - \operatorname{sgn}(\mu - \mu_0)[\mu_0 \mu].$$

Hierbei ist dieselbe Voraussetzung gemacht wie bei der Herleitung der Curvengleichung, und um die Zeitdauer in anderen Gebieten zu untersuchen, hat man ganz ähnliche Betrachtungen anzustellen wie oben.

## § 5.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen gehen wir nun zu den vier speciellen Fällen über, die zu den regulären Bewegungsformen gehören.

I.  $\varrho > \alpha$ ,  $\alpha > \sigma > \beta$ . Es werde gesetzt  $\sigma = \nu_0$ .

Aus 14) schliesst man leicht, dass die Krümmungslinien  $\nu = \nu_0$  von der Bahncurve berührt, dagegen die Hauptschnitte  $\nu = \alpha$ ,  $\mu = \beta$ ,  $\mu = \gamma$  durchstossen werden. Es werden also abwechselnd die beiden Krümmungslinien  $\nu = \nu_0$  des ringförmigen Bewegungsgebietes berührt, während sich der materielle Punkt immer in demselben Sinne um die Zone  $(\nu_0 \nu_0)$  windet. Es kann vorkommen, dass die Bahn sich schliesst. Geschieht dies nach  $m$  Windungen und  $n$  Oscillationen, unter einer Oscillation eine je einmalige Berührung beider Krümmungslinien  $\nu = \nu_0$  verstanden, so kann man auf folgendem Wege die Bedingung dafür finden. Man zerlege die geschlossene Curve in eine bestimmte Anzahl von Theilen derart, dass die beiden Endpunkte entweder in den Hauptschnitten oder in einem Hauptschnitt und der Krümmungslinie  $\nu = \nu_0$  gelegen sind, alle übrigen Punkte eines Theiles aber im Innern desselben Octanten liegen. Die Coordinaten der Endpunkte seien der Reihe nach  $\mu_1, \nu_1; \mu_2, \nu_2, \dots, \mu_{r-1}, \nu_{r-1}$ ; und es sei  $\mu_r = \mu_1$ ,  $\nu_r = \nu_1$ . Dann hat man für jeden Theil

$$\operatorname{sgn}(\mu_{k+1} - \mu_k)(\mu_k \mu_{k+1}) = \operatorname{sgn}(\nu_{k+1} - \nu_k)(\nu_k \nu_{k+1}), \quad k=1 \dots r-1$$

und daher

$$\sum_k \operatorname{sgn}(\mu_{k+1} - \mu_k)(\mu_k \mu_{k+1}) = \sum_k \operatorname{sgn}(\nu_{k+1} - \nu_k)(\nu_k \nu_{k+1}).$$

Für die Summe auf der linken Seite der Gleichung erhält man nun  $4m(\gamma, \beta)$ , auf der rechten Seite  $4n(\nu_0 \alpha)$ , sodass die gesuchte Bedingung lautet\*:

$$m \int_{\gamma}^{\beta} \frac{(\mu - \lambda_0) d\mu}{V(\varrho - \mu)(\alpha - \mu)(\nu_0 - \mu)(\beta - \mu)(\mu - \gamma)(\mu - \lambda_0)} = n \int_{\nu_0}^{\alpha} \frac{(\nu - \lambda_0) d\nu}{V(\varrho - \nu)(\alpha - \nu)(\nu - \nu_0)(\nu - \beta)(\nu - \gamma)(\nu - \lambda_0)}$$

Sie ist völlig unabhängig von dem Ausgangspunkte des Körpers; wenn also überhaupt Schliessung der Bahn stattfindet, so tritt dieselbe ein, von welchem Punkte der Zone  $(\nu_0 \nu_0)$  der Körper auch seine Bewegung beginnt.

Aus der Theorie der hyperelliptischen Integrale kann man nun folgende Periodenrelation ableiten:

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma}^{\beta} \frac{(\mu - \lambda) d\mu}{V(\varrho - \mu)(\alpha - \mu)(\nu_0 - \mu)(\beta - \alpha)(\mu - \gamma)(\mu - \lambda_0)} - \int_{\nu_0}^{\alpha} \frac{(\nu - \lambda_0) d\nu}{V(\varrho - \nu)(\alpha - \nu)(\nu - \nu_0)(\nu - \beta)(\nu - \gamma)(\nu - \lambda_0)} \\ & - \int_{-\infty}^{\lambda_0} \frac{(\lambda_0 - \lambda) d\lambda}{V(\varrho - \lambda)(\alpha - \lambda)(\nu_0 - \lambda)(\beta - \lambda)(\gamma - \lambda)(\lambda_0 - \lambda)} - \int_{\varrho}^{\infty} \frac{(t - \lambda_0) dt}{V(t - \varrho)(t - \alpha)(t - \nu_0)(t - \beta)(t - \gamma)(t - \lambda_0)} \end{aligned}$$

Hieraus folgt nun leicht, dass  $m > n$  ist: Wenn also eine Schliessung der Bahn stattfindet, so geschieht sie stets mit mehr Windungen als Oscillationen. Für die Zeit  $T$ , innerhalb deren eine Schliessung erfolgt, erhält man

$$\begin{aligned} \sqrt{g}T &= 2n \int_{\nu_0}^{\alpha} \frac{(\nu - \lambda_0)^2 d\nu}{V(\varrho - \nu)(\alpha - \nu)(\nu - \nu_0)(\nu - \beta)(\nu - \gamma)(\nu - \lambda_0)} \\ &\quad - 2m \int_{\gamma}^{\beta} \frac{(\mu - \lambda_0)^2 d\mu}{V(\varrho - \mu)(\alpha - \mu)(\nu_0 - \mu)(\beta - \mu)(\mu - \gamma)(\mu - \lambda)}; \end{aligned}$$

diese ist also auch von dem Ausgangspunkte der Bewegung unabhängig.

II.  $\varrho > \alpha$ ,  $\beta > \sigma > \gamma$ . Die Bewegungsform unterscheidet sich dadurch von der vorigen, dass bei ihr die Krümmungslinie  $\mu = \sigma = \mu_0$  berührt wird, und dass, wenn sich die Bahn schliesst, die Anzahl der Oscillationen grösser ist, als die der Windungen.

III.  $\alpha > \varrho > \beta$ ,  $\alpha > \sigma > \beta$ . Hier findet die Bewegung auf einem von zwei gleichartigen Krümmungslinien  $\nu = \varrho = \nu_1$  und  $\nu = \sigma = \nu_1$  begrenzten ringförmigen Gebiete statt. Die Krümmungslinien  $\nu_0$  und  $\nu_1$  werden immer abwechselnd berührt. Unter einer Oscillation soll eine je zweimalige Be-

\* Vergl. Staude, Ueber geodätische Polygone auf Flächen zweiten Grades. Mathem. Ann. Bd. 21, S. 219—252.

rührung beider Krümmungslinien verstanden werden. Wenn sich dann die Bahn nach  $m$  Windungen und  $n$  Oscillationen schliesst, so ist

$$\int_{\mu_1}^{\mu_0} \frac{(\mu - \lambda_0) d\mu}{V(\alpha - \mu)(\nu_0 - \mu)(\nu_1 - \mu)(\beta - \mu)(\mu - \gamma)(\mu - \lambda_0)} = n \int_{\nu_1}^{\nu_0} \frac{(\nu - \lambda_0) d\nu}{V(\alpha - \nu)(\nu_0 - \nu)(\nu - \nu_1)(\nu - \beta)(\nu - \gamma)(\nu - \lambda_0)}.$$

Weil nun aber

$$\int_{\mu_1}^{\mu_0} \frac{(\mu - \lambda_0) d\mu}{V(\alpha - \mu)(\nu_0 - \mu)(\nu_1 - \mu)(\beta - \mu)(\mu - \gamma)(\mu - \lambda_0)} = \int_{\nu_1}^{\nu_0} \frac{(\nu - \lambda_0) d\nu}{V(\alpha - \nu)(\nu_0 - \nu)(\nu - \nu_1)(\nu - \beta)(\nu - \gamma)(\nu - \lambda_0)}$$

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_0} \frac{(\lambda_0 - \lambda) d\lambda}{V(\alpha - \lambda)(\nu_0 - \lambda)(\nu_1 - \lambda)(\beta - \lambda)(\gamma - \lambda)(\lambda_0 - \lambda)} = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{(t - \lambda_0) dt}{V(t - \alpha)(t - \nu_0)(t - \nu_1)(t - \beta)(t - \gamma)(t - \lambda_0)}$$

ist, so folgt  $n < m$ , d. h. es ist die Anzahl der Windungen grösser als die der Oscillationen.

IV.  $\alpha > \rho > \beta$ ,  $\beta > \sigma > \gamma$ . In diesem Falle findet die Bewegung auf einem viereckigen von den beiden Krümmungslinien  $\nu = \rho = \nu_0$  und  $\mu = \sigma = \mu_0$  gebildeten Gebiete statt, dessen Ecken sich auf dem Niveau der Geschwindigkeit 0 befinden und mit Beziehung auf die mechanischen

Constanten  $g, h, k$  als die Schnittpunkte der Oberflächen  $x^2 + y^2 + z^2 = -\frac{2h}{g}$ ,

$\frac{x^2}{(\alpha - \lambda_0)^2} + \frac{y^2}{(\beta - \lambda_0)^2} + \frac{z^2}{(\gamma - \lambda_0)^2} = \frac{k}{g}$  und des gegebenen Ellipsoids de-

finirt werden können. Geometrisch kann man also die Ecken des Gebietes auf folgende Weise erhalten. Man bestimme auf dem Ellipsoid diejenige Curve, welche die Eigenschaft hat, dass die in ihren Punkten an die Oberfläche des Ellipsoids errichteten Tangentialebenen vom Mittelpunkt die

constante Entfernung  $\sqrt{\frac{g}{k}}$  haben; construiren sodann um den Mittel-

punkt mit dem Radius  $\sqrt{-\frac{2h}{g}}$  eine Kugel und bestimme ihre Durch-

dringungscurve mit dem Ellipsoid. Dann sind die vier Punkte, in denen sich die Durchdringungscurve und die vorhin definirte schneiden, die Eckpunkte des Bewegungsgebietes. Um letzteres zu erhalten, braucht man die Eckpunkte nur durch Krümmungslinien zu verbinden und hat dann dasjenige Viereck auszuwählen, welches innerhalb des Niveaus der Geschwindigkeit 0 liegt und in dessen Punkten die an das Ellipsoid errich-

teten Tangentialebenen einen kleineren Abstand als  $\sqrt{\frac{g}{k}}$  haben. Es ist

leicht zu zeigen, dass die gegenüberliegenden Seiten des viereckigen Gebietes abwechselnd berührt werden. Wenn jedoch der materielle Punkt gerade in eine Ecke des Gebietes hineingelangt, so findet eine Ausnahme

statt, und wir wollen jetzt beweisen, dass seine Bahn dann keine der beiden in den Ecken zusammenstossenden Krümmungslinien berührt.

Wir erinnern an die Gleichung

$$\sin^2 i_1 : \sin^2 i_2 = (\alpha - \nu)(\nu - \beta)(\nu - \gamma)(\mu - \lambda_0) \mu'^2 : (\alpha - \mu)(\beta - \mu)(\mu - \gamma)(\nu - \lambda_0) \nu'^2$$

und bemerken zunächst, dass sich aus den Differentialgleichungen der Bewegung 12)  $\mu' = \nu' = 0$  ergibt. Wir können aber den Grenzwert  $\frac{\mu'}{\nu'}$  in dem genannten Punkte nach bekannten Methoden durch Differentiation der Bewegungsgleichungen bestimmen. Man erhält nämlich

$$\begin{aligned} 2(\mu - \lambda_0)(\nu - \mu)^2 \mu'' + \mu' \frac{d}{dt} \left\{ (\mu - \lambda_0)(\nu - \mu)^2 \right\} &= -4g(\alpha - \mu)(\nu_0 - \mu)(\beta - \mu)(\mu - \gamma) \\ &+ 4g(\mu_0 - \mu) \frac{d}{dt} \left\{ \alpha - \mu)(\nu_0 - \mu)(\beta - \mu)(\mu - \gamma) \right\}, \\ 2(\nu - \lambda_0)(\nu - \mu)^2 \nu'' + \nu' \frac{d}{dt} \left\{ (\nu - \lambda_0)(\nu - \mu)^2 \right\} &= -4g(\alpha - \nu)(\nu - \beta)(\nu - \mu_0)(\nu - \gamma) \\ &+ 4g(\nu_0 - \nu) \frac{d}{dt} \left\{ (\alpha - \nu)(\nu - \beta)(\nu - \mu_0)(\nu - \gamma) \right\} \end{aligned}$$

und daraus für  $\mu = \mu_0, \nu = \nu_0$

$$\lim_{\mu \rightarrow \mu_0} \frac{\mu'}{\nu'} = \frac{\mu''}{\nu''} = \frac{(\alpha - \mu_0)(\beta - \mu_0)(\mu_0 - \gamma)(\nu_0 - \lambda_0)}{(\alpha - \nu_0)(\nu_0 - \beta)(\nu_0 - \gamma)(\mu_0 - \lambda_0)}$$

und schliesslich

$$\sin^2 i_1 : \sin^2 i_2 = (\alpha - \mu_0)(\beta - \mu_0)(\mu_0 - \gamma)(\nu_0 - \lambda_0) : (\alpha - \nu_0)(\nu_0 - \beta)(\nu_0 - \gamma)(\mu_0 - \lambda_0).$$

Dieses Ergebniss kann man noch auf einem anderen Wege bestätigen. Wenn nämlich der Körper in die betrachtete Ecke angelangt ist, so besitzt er keine Geschwindigkeit; die anfängliche Richtung seiner Bewegung muss also in derjenigen durch den Punkt an das Ellipsoid gelegten Normalebene liegen, welche durch den Mittelpunkt hindurchgeht. Nennt man die Richtungscosinus der anfänglichen Bewegung  $\alpha, \beta, \gamma$ , die der Krümmungslinien  $\mu_0$  und  $\nu_0$  in dem betrachteten Punkte  $p_1, q_1, r_1$ , resp.  $p_2, q_2, r_2$ , die der Normale  $p_0, q_0, r_0$  und die der Richtung, welche zu der durch den Mittelpunkt gelegten Normalebene senkrecht steht,  $p', q', r'$ , so ist zunächst

$$\begin{aligned} pp_0 + qq_0 + rr_0 &= 0 \\ pp' + qq' + rr' &= 0 \\ p'p_0 + q'q_0 + r'r_0 &= 0 \\ p'x + q'y + r'z &= 0. \end{aligned}$$

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt

$$p : q : r = q_0 r' - r_0 q' : r_0 p' - p_0 r' : p_0 q' - q_0 p',$$

aus den beiden letzten

$$p' : q' : r' = q_0 z - r_0 y : r_0 x - p_0 z : p_0 y - q_0 x.$$



Berücksichtigt man die letztere Proportion, so kann man die erstere in der Form schreiben:

$$p:q:r = x - p_0(p_0x + q_0y + r_0z) : y - q_0(p_0x + q_0y + r_0z) : z - r_0(p_0x + q_0y + r_0z).$$

Nun ist ferner

$$\begin{aligned} \sin i_1 : \sin i_2 &= \cos i_2 : \cos i_1 = pp_2 + qq_2 + rr_2 : pp_1 + qq_1 + rr_1 \\ &= p_1x + q_1y + r_1z - (p_0p_1 + q_0q_1 + r_0r_1)(p_0x + q_0y + r_0z) \\ &\quad : p_2x + q_2y + r_2z - (p_0p_2 + q_0q_2 + r_0r_2)(p_0x + q_0y + r_0z) \end{aligned}$$

und da, wie leicht zu erkennen,

$$p_0p_1 + q_0q_1 + r_0r_1 = 0,$$

$$p_0p_2 + q_0q_2 + r_0r_2 = 0,$$

$$p_1 : q_1 : r_1 = \frac{x}{\alpha - \nu_0} : \frac{y}{\beta - \nu_0} : \frac{z}{\gamma - \nu_0},$$

$$p_2 : q_2 : r_2 = \frac{x}{\alpha - \mu_0} : \frac{y}{\beta - \mu_0} : \frac{z}{\gamma - \mu_0}$$

ist, so ergibt sich

$$\sin i_1 : \sin i_2 = p_2x + q_2y + r_2z : p_1x + q_1y + r_1z$$

$$= \sqrt{\frac{x^2}{(\alpha - \nu_0)^2} + \frac{y^2}{(\beta - \nu_0)^2} + \frac{z^2}{(\gamma - \nu_0)^2}} : \sqrt{\frac{x^2}{(\alpha - \mu_0)^2} + \frac{y^2}{(\beta - \mu_0)^2} + \frac{z^2}{(\gamma - \mu_0)^2}}$$

$$\sin^2 i_1 : \sin^2 i_2 = (\alpha - \mu_0)(\beta - \mu_0)(\mu_0 - \gamma)(\nu_0 - \lambda_0) : (\alpha - \nu_0)(\nu_0 - \beta)(\nu_0 - \gamma)(\mu_0 - \lambda_0),$$

also genau wieder das oben erhaltene Resultat. Es wird also, wenn der Körper die Ecke des Gebietes trifft, keine Seite tangirt. Den Weg, den er genommen hat, schlägt er dann in umgekehrter Reihenfolge wieder ein.

Schliesst sich die Bahn nach  $2m$  Berührungen mit der Krümmungslinie  $\mu_0$ , und  $2n$  Berührungen mit  $\nu_0$ , so ist

$$\int_{\nu_0}^{\nu_0} \frac{(\nu - \lambda_0) d\nu}{V(\alpha - \nu)(\nu_0 - \nu)(\nu - \beta)(\nu - \mu_0)(\nu - \gamma)(\nu - \lambda_0)} = m \int_{\mu_0}^{\mu_0} \frac{(\mu - \lambda_0) d\mu}{V(\alpha - \mu)(\nu_0 - \mu)(\beta - \mu)(\mu - \gamma)(\mu - \lambda_0)}$$

Nun ist

$$\int_{\mu_0}^{\mu_0} \frac{(\mu - \lambda_0) d\mu}{V(\alpha - \mu)(\nu_0 - \mu)(\beta - \mu)(\mu_0 - \mu)(\mu - \gamma)(\mu - \lambda_0)} = \int_{\beta}^{\nu_0} \frac{(\nu - \lambda_0) d\nu}{V(\alpha - \nu)(\nu_0 - \nu)(\nu - \beta)(\nu - \mu_0)(\nu - \gamma)(\nu - \lambda_0)}$$

$$= \int_{\lambda_0}^{\lambda_0} \frac{(\lambda_0 - \lambda) d\lambda}{V(\alpha - \lambda)(\nu_0 - \lambda)(\beta - \lambda)(\mu_0 - \lambda)(\gamma - \lambda)(\lambda_0 - \lambda)} = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{(t - \lambda_0) dt}{V(t - \alpha)(t - \nu_0)(t - \beta)(t - \mu_0)(t - \gamma)(t - \lambda_0)}$$

Daraus folgt, dass  $m > n$  ist, dass also die Krümmungslinien  $\mu_0$  öfter als die Krümmungslinien  $\nu_0$  berührt werden.

## § 6.

B. Die regulär-singulären Bewegungsformen sind durch zwei Fälle vertreten:

$$\text{V. } \varrho > \alpha, \quad \sigma = \beta.$$

$$\text{VI. } \alpha > \varrho > \beta, \quad \sigma = \beta.$$

Die separirten Bewegungsgleichungen sind:

$$\frac{(\mu - \lambda_0) d\mu}{(\beta - \mu) \sqrt{(\varrho - \mu)(\alpha - \mu)(\mu - \gamma)(\mu - \lambda_0)}} + \frac{(\nu - \lambda_0) d\nu}{(\beta - \nu) \sqrt{(\varrho - \nu)(\alpha - \nu)(\nu - \gamma)(\nu - \lambda_0)}} = 0,$$

$$\frac{1}{2} \frac{(\mu - \lambda_0) d\mu}{\sqrt{g(\varrho - \mu)(\alpha - \mu)(\mu - \gamma)(\mu - \lambda_0)}} + \frac{1}{2} \frac{(\nu - \lambda_0) d\nu}{\sqrt{g(\varrho - \nu)(\alpha - \nu)(\nu - \gamma)(\nu - \lambda_0)}} = dt.$$

Die Bewegung geht stets durch die Kreispunkte des Ellipsoids hindurch. Bei V ist die ganze Oberfläche des Ellipsoids der Bewegung zugänglich, und durchläuft der Körper immer zwei diametral gegenüberliegende Kreispunkte; dagegen wird bei VI noch die Krümmungslinie  $\nu = \varrho = \nu_0$  berührt, welche aus der Oberfläche einen glockenförmigen Theil herauschneidet; durch die beiden hierin befindlichen Kreispunkte findet in diesem Falle der Durchgang statt. Wenn jedoch sich der Körper zu Anfang in der Y-Ebene befindet (nur den Fall ausgeschlossen, dass die Anfangslage ein Kreispunkt ist), so bleibt er fortwährend in ihr, circulirend im Falle V, oscillirend im Falle VI.

Um die Bewegung zwischen den Kreispunkten einer genauen Untersuchung zu unterwerfen, ist es zweckmässig, die erste Bewegungsgleichung noch etwas umzuformen, was im Folgenden nur für den Fall V genauer durchgeführt wird, da sich der Fall VI in durchaus analoger Weise behandeln lässt.

Geht die Bahncurve durch den Punkt  $(\mu_0, \nu_0)$  hindurch, so kann man ihrer Gleichung für den ganzen zugehörigen Octanten die Form geben:

$$\int_{\mu_0}^{\mu} \frac{(\mu - \lambda_0) d\mu}{(\beta - \mu) \sqrt{(\varrho - \mu)(\alpha - \mu)(\mu - \gamma)(\mu - \lambda_0)}} \mp \int_{\nu_0}^{\nu} \frac{(\nu - \lambda_0) d\nu}{(\nu - \beta) \sqrt{(\varrho - \nu)(\alpha - \nu)(\nu - \gamma)(\nu - \lambda_0)}} = 0,$$

wo unter Annahme des positiven Werthes der Wurzeln das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem vom Punkte  $(\mu_0, \nu_0)$  aus die Coordinaten  $\mu, \nu$  beide zugleich an Werth entweder zu- oder abnehmen oder aber die eine zu-, die andere abnimmt. Setzt man nun, für die Wurzeln überall den positiven Werth annehmend:

$$M = \frac{\mu - \lambda_0}{\beta - \mu} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\varrho - \mu)(\alpha - \mu)(\mu - \gamma)(\mu - \lambda_0)}} - \frac{\beta - \lambda_0}{\beta - \mu} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\varrho - \beta)(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\beta - \lambda_0)}},$$

$$N = \frac{\nu - \lambda_0}{\nu - \beta} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\varrho - \nu)(\alpha - \nu)(\nu - \gamma)(\nu - \lambda_0)}} - \frac{\beta - \lambda_0}{\nu - \beta} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\varrho - \beta)(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\beta - \lambda_0)}},$$

so sind M und N für  $\mu = \beta, \nu = \beta$  endlich, und man erhält nach einfachen Umformungen als Gleichung der Bahncurve für den ersten Fall:

$$\frac{(\beta - \mu)(\nu - \beta)}{(\beta - \mu_0)(\nu_0 - \beta)} = e^{\sqrt{\frac{(\varrho - \alpha)(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)}{\beta - \lambda_0}}} \left\{ \int_{\mu_0}^{\mu} M d\mu - \int_{\nu_0}^{\nu} N d\nu \right\},$$

für den zweiten Fall:

$$\frac{\beta - \mu}{\nu - \beta} : \frac{\beta - \mu_0}{\nu_0 - \beta} = e^{\sqrt{\frac{(\varrho - \alpha)(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)}{\beta - \lambda_0}}} \left\{ \int_{\mu_0}^{\mu} M d\mu + \int_{\nu_0}^{\nu} N d\nu \right\}.$$

Nehmen wir nun  $(\mu_0 \nu_0)$  im Innern des Octanten gegeben an und verfolgen die Curve bis zum Kreispunkte, welcher in demselben Octanten liegt, so ist die zweite Formel anzuwenden: sie lehrt, dass  $\frac{\beta - \mu}{\nu - \beta}$  sich einer endlichen Grenze  $k$  nähert, wenn  $\nu = \mu = \beta$  wird, nämlich:

$$k = \frac{\beta - \mu_0}{\nu_0 - \beta} e^{\sqrt{\frac{(\varrho - \alpha)(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)}{\beta - \lambda_0}}} \left\{ \int_{\mu_0}^{\beta} M d\mu + \int_{\nu_0}^{\beta} N d\nu \right\},$$

denn die Integrale besitzen, wie leicht zu ersehen ist, endliche Werthe. Mit Hilfe dieses Werthes  $k$  kann die Curvengleichung für die betrachteten Octanten auch in der Form geschrieben werden:

$$k = \frac{\beta - \mu}{\nu - \beta} e^{\sqrt{\frac{(\varrho - \alpha)(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)}{\beta - \lambda_0}}} \left\{ \int_{\mu}^{\beta} M d\mu + \int_{\nu}^{\beta} N d\nu \right\}.$$

Nun geht aber die Bahn durch den diametral gegenüberliegenden Kreispunkt hindurch und muss die Hauptschnitte  $\mu = \gamma$  und  $\nu = \alpha$  einmal durchschneiden. Ohne der Allgemeinheit Abbruch zu thun, kann man annehmen, dass sie zuerst den Hauptschnitt  $\mu = \gamma$  im Punkte  $\nu = \nu'$  und dann den Hauptschnitt  $\nu = \alpha$  im Punkte  $\mu = \mu'$  schneidet; dann andernfalls könnte man die Kreispunkte mit einander so vertauschen, dass die Annahme zutreffend ist. Unsere Bahncurve zerfällt daher in drei Theile. Für den ersteren haben wir

$$k = \frac{\beta - \gamma}{\nu' - \beta} e^{\sqrt{\frac{(\varrho - \alpha)(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)}{\beta - \lambda_0}}} \left\{ \int_{\gamma}^{\beta} M d\mu + \int_{\nu'}^{\beta} N d\nu \right\},$$

für den letzten, wenn der Grenzwert von  $\frac{\beta - \mu}{\nu - \beta}$  im andern Kreispunkt mit  $k'$  bezeichnet wird:

$$k' = \frac{\beta - \mu'}{\alpha - \beta} e^{\sqrt{\frac{(\varrho - \alpha)(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)}{\beta - \lambda_0}}} \left\{ \int_{\mu'}^{\beta} M d\mu + \int_{\alpha}^{\beta} N d\nu \right\}.$$

Bei dem mittleren Theil der Curve, für welchen die für den ersten der oben unterschiedenen beiden Fälle geltende Gleichung angewandt werden muss, ergibt sich

$$\frac{(\beta - \mu')(\alpha - \beta)}{(\beta - \gamma)(\nu' - \beta)} = e^{\sqrt{\frac{(\varrho - \alpha)(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)}{\beta - \lambda_0}}} \left\{ \int_{\gamma}^{\mu'} M d\mu - \int_{\nu'}^{\alpha} N d\nu \right\}.$$

Aus den letzten drei Formeln ergibt sich durch Multiplication

$$kk' = \frac{(\beta - \gamma)^2}{(\alpha - \beta)^2} e^2 \sqrt{\frac{(\varrho - \alpha)(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)}{\beta - \lambda_0}} \left\{ \int_{\gamma}^{\beta} M d\mu + \int_{\alpha}^{\beta} N dv \right\}.$$

Es ist also  $kk'$  eine Constante, die durch  $A^2$  bezeichnet werden möge, so dass

$$kk' = A^2$$

$$A = \frac{\beta - \gamma}{\alpha - \beta} e \sqrt{\frac{(\varrho - \alpha)(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)}{\beta - \lambda_0}} \int_{\gamma}^{\alpha} T dt,$$

wo

$$T = \frac{t - t_0}{\beta - t} \frac{1}{\sqrt{(\varrho - t)(\alpha - t)(t - \gamma)(t - \lambda_0)}} - \frac{\beta - t_0}{\beta - t} \frac{1}{\sqrt{(\varrho - \beta)(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\beta - \lambda_0)}}$$

gesetzt, und den Wurzeln der positive Werth beizulegen ist.

Nun soll die Curve auch über die Kreispunkte hinaus verfolgt werden.

Es muss dazu untersucht werden, welchen Grenzwert  $\frac{\beta - \mu}{\nu - \beta}$  auf der einen Seite des Kreispunktes hat, wenn dieser Quotient auf der andern die gegebene Grösse  $k$  als Grenze besitzt. Hierbei benutzen wir den Umstand, dass die Bahn ihre Richtung nur stetig ändern kann, und stellen die geometrische Bedeutung von  $k$  fest. Um den letzteren Punkt in aller Strenge zu erledigen, kann man sich folgender Betrachtung bedienen.

Wir nehmen auf der Oberfläche des Ellipsoids einen Punkt an, verbinden ihn mit dem Kreispunkt durch eine Gerade und wollen den Winkel  $\varphi$  zwischen dieser Linie und der im Kreispunkt in der  $Y$ -Ebene an das Ellipsoid gezogenen Tangente bestimmen. Nennt man die Richtungscosinus der ersteren  $l, m, n$ , der letzteren  $l', m', n'$ , so ist

$$\cos \varphi = ll' + mm' + nn'$$

und, wenn zur Abkürzung

$$a = \sqrt{(\alpha - \mu)(\alpha - \nu)} - (\alpha - \beta),$$

$$b = \sqrt{(\mu - \gamma)(\nu - \gamma)} - (\beta - \gamma)$$

gesetzt wird,

$$l : m : n = \sqrt{(\alpha - \lambda_0)(\beta - \gamma)} a : \sqrt{(\beta - \lambda_0)(\alpha - \gamma)(\nu - \beta)(\mu - \gamma)} : \sqrt{(\gamma - \lambda_0)(\alpha - \beta)} b,$$

ausserdem

$$l' : m' : n' = \sqrt{(\alpha - \lambda_0)(\beta - \gamma)} : 0 : -\sqrt{(\gamma - \lambda_0)(\alpha - \beta)}.$$

Setzt man die hieraus sich ergebenden Werthe in den Ausdruck für  $\cos \varphi$  ein und beachtet  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ ,  $l'^2 + m'^2 + n'^2 = 1$ , so erhält man nach einigen Umformungen:

$$\cos \varphi = \frac{(\alpha - \lambda_0)(\beta - \gamma) a - (\gamma - \lambda_0)(\alpha - \beta) b}{\sqrt{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\beta - \lambda_0)} (-a - b) [2(\beta - \lambda_0) - a + b]}.$$

Schreibt man dieses Resultat in der Form

$$\cos \varphi = \frac{(\beta - \gamma)a - (\alpha - \beta)b}{\sqrt{2(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(-a - b) \left(1 - \frac{a - b}{2\beta - 2\lambda_0}\right)}} + \sqrt{\frac{(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)}{2(\alpha - \gamma)(\beta - \lambda_0)}} \sqrt{\frac{-a - b}{1 - \frac{a - b}{2\beta - 2\lambda_0}}},$$

so lässt sich erkennen, dass  $\cos \varphi$  sich für  $\mu = \nu = \beta$ , also für  $a = b = 0$  derselben Grenze nähert wie der Ausdruck

$$\Phi = \frac{(\beta - \gamma)a - (\alpha - \beta)b}{\sqrt{2(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(-a - b)}}.$$

Letzterer lässt sich in die Gestalt setzen:

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)}} \frac{u}{\sqrt{v}},$$

wo

$$u = (\beta - \gamma) \sqrt{(\alpha - \mu)(\alpha - \nu)} - (\alpha - \beta) \sqrt{(\mu - \gamma)(\nu - \gamma)},$$

$$v = \alpha - \gamma - \sqrt{(\alpha - \mu)(\alpha - \nu)} - \sqrt{(\mu - \gamma)(\nu - \gamma)}$$

ist, und die Grenze, der er sich nähert, kann bestimmt werden, wenn er in folgender Weise umgeformt wird. Zur Abkürzung sei

$$u' = (\beta - \gamma) \sqrt{(\alpha - \mu)(\alpha - \nu)} + (\alpha - \beta) \sqrt{(\mu - \gamma)(\nu - \gamma)},$$

$$v' = \alpha - \gamma + \sqrt{(\alpha - \mu)(\alpha - \nu)} - \sqrt{(\mu - \gamma)(\nu - \gamma)},$$

$$v'' = \alpha - \gamma - \sqrt{(\alpha - \mu)(\alpha - \nu)} + \sqrt{(\mu - \gamma)(\nu - \gamma)},$$

$$v''' = \alpha - \gamma + \sqrt{(\alpha - \mu)(\alpha - \nu)} + \sqrt{(\mu - \gamma)(\nu - \gamma)},$$

so nähert sich  $u'$  dem Werthe  $2(\beta - \gamma)(\alpha - \gamma)$ , das Product  $v'v''v'''$  dem Werthe  $8(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)$ , und man kann schreiben:

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)}} \cdot \frac{uu'}{\sqrt{vv'v''v'''}} \cdot \frac{\sqrt{v'v''v'''}}{u'} = \frac{\sqrt{v'v''v'''}}{u' \sqrt{2(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)}} \frac{U}{V},$$

wo

$$U = uu' = (\alpha - \gamma) \{ (\alpha - \beta)(\beta - \gamma)([\beta - \mu] - [\nu - \beta]) + (\alpha - 2\beta + \gamma)(\beta - \mu)(\nu - \beta) \},$$

$$V^2 = v'v''v''' = (\alpha - \gamma)^4 + (\alpha - \mu)^2(\alpha - \nu)^2 + (\nu - \gamma)^2(\mu - \gamma)^2 - 2(\alpha - \gamma)^2(\nu - \gamma)(\mu - \gamma),$$

$$- 2(\alpha - \gamma)^2(\alpha - \mu)(\alpha - \nu) - 2(\alpha - \mu)(\alpha - \nu)(\mu - \gamma)(\nu - \gamma) = (\alpha - \gamma)^2(\nu - \mu)^2,$$

also

$$V = (\alpha - \gamma)(\nu - \mu)$$

ist. Setzt man jetzt  $k = \frac{\beta - \mu}{\nu - \beta}$ , so erkennt man leicht, dass  $\Phi$  und daher

$\cos \varphi$  sich der Grenze  $\frac{1 - k}{1 + k}$  nähert; man hat daher für die Kreispunkte

$$k = \cot^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Da die Bahn sich beim Durchgang durch den Kreispunkt nur stetig in ihrer Richtung ändern kann, so muss aus dem Winkel  $\varphi$  nachher  $\pi - \varphi$ , also aus  $\cot^2 \frac{\varphi}{2}$   $\tan^2 \frac{\varphi}{2}$  werden. Die Grösse  $k$  nimmt daher beim Durchgang durch den Nabelpunkt den reciproken Werth an; bezeichnet man ihren Werth vorher durch  $k'$ , nachher durch  $k_1$ , so ist also

$$k' k_1 = 1.$$

Nun verfolgen wir unsere Bahncurve weiter und nennen die Grenzwerte von  $\frac{\beta - \mu}{\nu - \beta}$ , wenn die Curve wieder zum ursprünglichen Kreispunkt zurückkehrt, vor ihm  $k_1'$ , nachher  $k_2$  und verstehen unter  $k_2'$ ,  $k_3$ ,  $k_3'$ ... die analogen Grenzwerte vor und nach den Kreispunkten, in der Reihenfolge, in welcher sie durchlaufen werden, so haben wir

$$\begin{array}{ll} k k' = A^2 & k' k_1 = 1 \\ k_1 k_1' = A^2 & k_1' k_2 = 1 \\ \cdot & \cdot \\ k_{\alpha-1} k_{\alpha-1}' = A^2 & k_{\alpha-1}' k_{\alpha} = 1. \end{array}$$

Daraus folgt

$$k_{\alpha} = k \cdot A^{-2\alpha},$$

und es ergibt sich also, dass, wenn  $\alpha$  immer grösser wird,  $k_{\alpha}$  sich der Grenze 0 oder  $\infty$  nähert, je nachdem  $A > 1$  oder  $< 1$  ist; d. h. es nähert sich  $\varphi$  der Grenze 0 oder  $\pi$ . Die Bewegung nähert sich also in ihrer Richtung immer mehr der  $Y$ -Ebene, ohne dass jedoch die Richtung jemals mit ihr zusammenfallen kann.

Berechnet man mit Hilfe der zweiten Bewegungsgleichung die Zeitdauer eines Umlaufes, so ergibt sich

$$\begin{aligned} T &= 2 \int_{\gamma}^{\beta} \frac{(\mu - \lambda_0) d\mu}{V g(\varphi - \mu)(\alpha - \mu)(\mu - \gamma)(\mu - \lambda_0)} + 2 \int_{\gamma}^{\alpha} \frac{(\nu - \lambda_0) d\nu}{V g(\varphi - \nu)(\alpha - \nu)(\nu - \gamma)(\nu - \lambda_0)} \\ &= 2 \int_{\gamma}^{\alpha} \frac{(t - \lambda_0) dt}{V g(\varphi - t)(\alpha - t)(t - \gamma)(t - \lambda_0)}. \end{aligned}$$

Erst daraus, dass diese Zeitdauer endlich ist, sind wir berechtigt zu schliessen, dass die soeben untersuchte Curve auch wirklich vom materiellen Punkte durchlaufen werden kann. Alle Umläufe vollziehen sich in derselben Zeit, und zwar ist diese Zeitdauer auch gleich derjenigen, welche bei der oben angegebenen singulären Bewegung in der  $Y$ -Ebene erforderlich ist. In diesem Falle lautet nämlich die Differentialgleichung der Bewegung auf der Strecke  $\nu = \beta$ :

$$(\mu - \lambda_0) \mu'^2 = 4g(\varphi - \mu)(\alpha - \mu)(\mu - \gamma),$$

auf der Strecke  $\mu = \beta$ :

$$(\nu - \lambda_0) \nu'^2 = 4g(\varrho - \nu)(\alpha - \nu)(\nu - \gamma),$$

und daraus leitet man das Behauptete ohne Schwierigkeit her.

Die hier entwickelte Methode lässt sich natürlich auch auf die geodätischen Linien auf dem Ellipsoid in Anwendung bringen, welche durch die Kreispunkte hindurchgehen, da sie ja als Grenzfälle der soeben untersuchten Curven angesehen werden können. Der Satz, dass die geodätischen Linien die Kreispunkte immer unter anderen Winkeln gegen die Y-Ebene schneiden und zwar unter Winkeln von der Beschaffenheit, dass die trigonometrischen Tangenten der Hälfte derselben eine geometrische Progression bilden, rührt von Hart\* her und ist nach ihm von Michael Roberts\*\* bewiesen worden und zwar mit Hilfe der elliptischen Functionen.\*\*\* Dem Satz von der Gleichheit der Umlaufzeiten entspricht der Satz über die Gleichheit der Länge der unendlich vielen zwei diametral gegenüberliegende Kreispunkte verbindenden geodätischen Linien.

## § 7.

C. Regulär-asymptotisch-singuläre Bewegungsformen treten in folgenden beiden Fällen auf:

$$\text{VII. } \varrho = \alpha, \quad \alpha > \sigma > \beta.$$

$$\text{VIII. } \varrho = \alpha, \quad \beta > \sigma > \gamma..$$

Die separirten Bewegungsgleichungen lauten:

$$\frac{(\mu - \lambda_0) d\mu}{(\alpha - \mu) \sqrt{(\beta - \mu)(\sigma - \mu)(\mu - \gamma)(\mu - \lambda_0)}} + \frac{(\nu - \lambda_0) d\nu}{(\alpha - \nu) \sqrt{(\nu - \beta)(\nu - \gamma)(\nu - \sigma)(\nu - \lambda_0)}} = 0,$$

$$\frac{(\mu - \lambda_0)^2 d\mu}{(\alpha - \mu) \sqrt{(\beta - \mu)(\sigma - \mu)(\mu - \gamma)(\mu - \lambda_0)}} + \frac{(\nu - \lambda_0)^2 d\nu}{(\alpha - \nu) \sqrt{(\nu - \beta)(\nu - \gamma)(\nu - \sigma)(\nu - \lambda_0)}} = 2\sqrt{g} dt.$$

Bei diesen beiden Bewegungsformen findet eine asymptotische Annäherung an den Hauptschnitt  $\nu = \alpha$  statt; er wird niemals erreicht, denn aus der zweiten Bewegungsgleichung ergibt sich dafür eine unendlich grosse Zeit. Die asymptotische Annäherung geschieht bei VII in fortwährenden Umläufen um das Ellipsoid herum, bei VIII in einer fortwährenden Oscillation zwischen den beiden Krümmungslinien  $\mu = \sigma = \mu_0$ . Wenn der Körper bei VII eine geeignete Bewegungsrichtung hat, kann er erst noch die Krümmungslinie  $\nu = \sigma = \nu_0$  berühren, bevor er sich dem Hauptschnitt  $\nu = \alpha$  nähert.

\* Cambridge and Dublin mathematical Journal Bd. 4, S. 82.

\*\* Journal de Mathématiques 1. série, tome 15, S. 213.

\*\*\* Vergl. auch Langenbeck, Ueber diejenigen geodätischen Linien auf dem dreiachsigen Ellipsoid, welche durch einen Nabelpunkt gehen. Dissertation Göttingen. 1877.

Alles dies gilt für den Fall, dass sich der Körper zu Anfang seiner Bewegung nicht im Hauptschnitt  $\nu = \alpha$  befindet. Befindet er sich aber hier, so bleibt er auch fortwährend in dem Hauptschnitt, und zwar circulirt er bei VII und oscillirt zwischen den Punkten  $\mu = \sigma = \mu_0$  bei VIII. Die Bewegungsgleichungen werden in diesem Falle  $\nu = \alpha$  und

$$(\mu - \lambda_0)\mu'^2 = 4g(\beta - \mu)(\mu - \gamma)(\sigma - \mu).$$

Für die Zeit des Umlaufes bei VII ergibt sich:

$$2 \int_{\gamma}^{\beta} \frac{(\mu - \lambda_0) d\mu}{\sqrt{g(\sigma - \mu)(\beta - \mu)(\mu - \gamma)(\mu - \lambda_0)}},$$

für die Oscillationsdauer bei VIII:

$$2 \int_{\gamma}^{\mu_0} \frac{(\mu - \lambda_0) d\mu}{\sqrt{g(\beta - \mu)(\mu_0 - \mu)(\mu - \gamma)(\mu - \lambda_0)}} \quad (\sigma = \mu_0).$$

## § 8.

D. Regulär - asymptotisch - singulär - asymptotische Bewegungsform:

$$\text{IX. } \varrho = \alpha, \quad \sigma = \beta.$$

Aus der Differentialgleichung der Bahncurve

$$\frac{(\mu - \lambda_0) d\mu}{(\alpha - \mu)(\beta - \mu) \sqrt{(\mu - \gamma)(\nu - \gamma)}} + \frac{(\nu - \lambda_0) d\nu}{(\alpha - \nu)(\nu - \beta) \sqrt{(\nu - \gamma)(\nu - \lambda_0)}} = 0$$

ergibt sich, dass entweder der Quotient oder das Product der beiden Ausdrücke:

$$\begin{aligned} & \frac{(\alpha - \mu) \sqrt{\frac{\alpha - \lambda_0}{\alpha - \gamma}}}{(\beta - \mu) \sqrt{\frac{\beta - \lambda_0}{\beta - \gamma}}} \cdot \frac{[V(\mu - \lambda_0)(\beta - \gamma) + V(\beta - \lambda_0)(\mu - \gamma)]^{\frac{2}{\beta - \gamma}}}{[V(\mu - \lambda_0)(\alpha - \gamma) + V(\alpha - \lambda_0)(\mu - \gamma)]^{\frac{2}{\alpha - \gamma}}}, \\ & \frac{(\alpha - \nu) \sqrt{\frac{\alpha - \lambda_0}{\beta - \gamma}}}{(\nu - \beta) \sqrt{\frac{\beta - \lambda_0}{\beta - \gamma}}} \cdot \frac{[V(\nu - \lambda_0)(\beta - \gamma) + V(\beta - \lambda_0)(\nu - \gamma)]^{\frac{2}{\beta - \gamma}}}{[V(\nu - \lambda_0)(\alpha - \gamma) + V(\alpha - \lambda_0)(\nu - \gamma)]^{\frac{2}{\beta - \gamma}}} \end{aligned}$$

constant ist, und zwar der Quotient in dem Octanten, in welchem von den beiden Coordinaten  $\mu, \nu$  beim Durchlaufen der Curve in dem einen oder dem anderen Sinne die eine wächst und die andere an Werth abnimmt, das Product in demjenigen, in welchem beide entweder zugleich wachsen oder abnehmen. Die Bewegung geht nun durch einen Kreispunkt hindurch; in dem anliegenden Octanten hat man den ersten, in dem aber, in welchen der Punkt nach Ueberschreitung des Hauptschnittes  $\mu = \gamma$  gelangt, den zweiten Fall vor sich. Nennt man den constanten Werth



des Quotienten in ersterem Octanten  $k$ , den constanten Werth des Productes in letzterem  $k'$  und nimmt an, dass der Hauptschnitt  $\mu = \gamma$  im Punkte  $\nu = \nu'$  getroffen wird, so erhält man, da dieser Punkt beiden Gleichungen genügen muss:

$$\begin{aligned} \frac{[V(\nu' - \lambda_0)(\alpha - \gamma) + V(\alpha - \lambda_0)(\nu' - \gamma)]^{\frac{2}{\alpha - \gamma}} \cdot (\nu' - \beta)^{\frac{V(\beta - \lambda_0)}{\beta - \gamma}}}{[V(\nu' - \lambda_0)(\beta - \gamma) + V(\beta - \lambda_0)(\nu' - \gamma)]^{\frac{2}{\beta - \gamma}} \cdot (\alpha - \nu')^{\frac{V(\alpha - \lambda_0)}{\alpha - \gamma}}} &= k, \\ \frac{[V(\nu' - \lambda_0)(\beta - \gamma) + V(\beta - \lambda_0)(\nu' - \gamma)]^{\frac{2}{\beta - \gamma}} \cdot (\alpha - \nu')^{\frac{V(\alpha - \lambda_0)}{\alpha - \gamma}}}{[V(\nu' - \lambda_0)(\alpha - \gamma) + V(\alpha - \lambda_0)(\nu' - \gamma)]^{\frac{2}{\alpha - \gamma}} \cdot (\nu' - \beta)^{\frac{V(\beta - \lambda_0)}{\beta - \gamma}}} &= k', \end{aligned}$$

also

$$kk' = 1.$$

Die zweite Differentialgleichung der Bewegung, in welcher die Zeit vorkommt, lässt sich durch Logarithmen integrieren. Man braucht jedoch diese Operation nicht auszuführen, da man auch ohne die Form der Integralgleichung im Stande ist, auf die Endlichkeit oder Unendlichkeit der Zeit einen Schluss zu ziehen. Man kann nämlich die Differentialgleichung in zwei Formen bringen, nämlich

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{(\mu - \lambda_0) d\mu}{(\alpha - \mu) \sqrt{g(\mu - \gamma)(\mu - \lambda_0)}} + \frac{1}{2} \frac{(\nu - \lambda_0) d\nu}{(\alpha - \nu) \sqrt{g(\nu - \gamma)(\nu - \lambda_0)}} &= dt, \\ \frac{1}{2} \frac{(\mu - \lambda_0) d\mu}{(\beta - \mu) \sqrt{g(\mu - \gamma)(\mu - \lambda_0)}} + \frac{1}{2} \frac{(\nu - \lambda_0) d\nu}{(\beta - \nu) \sqrt{g(\nu - \gamma)(\nu - \lambda_0)}} &= dt. \end{aligned}$$

Die erste Form lehrt sofort, dass ein Kreispunkt vom anliegenden Octanten aus in endlicher Zeit, die zweite, dass der Punkt  $\mu = \beta$ ,  $\nu = \alpha$  aber niemals erreicht wird.

Mit Hilfe der soeben angedeuteten Betrachtungen gelangt man nun zu folgender Charakteristik unserer Bewegungsform. Der materielle Punkt kann sich, je nach seiner anfänglichen Lage und Bewegungsrichtung auf vier verschiedene Weisen verhalten.

Befindet er sich zu Anfang seiner Bewegung im Innern eines Octanten, die  $Z$ -Ebene mit eingeschlossen, so richtet sich seine Bewegung nach dem Scheitel der kleinsten Achse hin, oder er geht zunächst noch durch den Kreispunkt hindurch, um sich dann dem Scheitel der kleinsten Achse zu nähern, der mit diesem nicht in demselben Octanten liegt. Dieser Scheitel wird aber niemals von dem materiellen Punkt erreicht, sondern es findet nur eine asymptotische Annäherung statt. Die vorher definirten Constanten  $k$  und  $k'$  sind in diesem Falle endlich und von 0 verschieden.

Befindet sich der materielle Punkt anfänglich in der  $Y$ -Ebene, und wenn im Kreispunkt, fällt auch seine anfängliche Bewegungsrichtung in

dieselbe hinein — sonst hat man den vorhergehenden Fall — so bleibt er fortwährend in ihr und nähert sich dem Scheitel der kleinsten Achse asymptotisch. Die Bewegungsgleichung lautet auf der Strecke  $\nu = \beta$ :

$$(\mu - \lambda_0)\mu'^2 = 4g(\alpha - \mu)^2(\mu - \gamma),$$

auf der Strecke  $\mu = \beta$ :

$$(\nu - \lambda_0)\nu'^2 = 4g(\alpha - \nu)^2(\nu - \gamma).$$

Ist der materielle Punkt zu Anfang in der X-Ebene, so verhält er sich ganz analog wie beim vorigen Fall: er bleibt in ihr und nähert sich dem Scheitel der kleinsten Achse, ohne ihn in endlicher Zeit zu erreichen. Es ist dann  $\nu = \alpha$  und

$$(\mu - \lambda_0)\mu'^2 = 4g(\beta - \mu)^2(\mu - \gamma).$$

Befindet sich endlich der Punkt im Scheitel der kleinsten Achse, in welchen er von aussen niemals hineinkommen kann, so verbleibt er dort in Ruhe.

### § 9.

E. Singuläre Bewegungsformen. Die Bewegungen finden in einer Krümmungslinie statt, die Hauptschnitte mit eingeschlossen; der materielle Punkt gelangt zu allen erreichbaren Lagen in endlicher Zeit und kann niemals ruhen, wo er sich auch auf der Krümmungslinie zu Anfang befindet.

Das Bewegungsgebiet ist eine von einem Hauptschnitt verschiedene Krümmungslinie in dem Falle

$$\text{X. } \varrho = \sigma, \quad \alpha > \varrho > \beta$$

und zwar ist es die Krümmungslinie  $\nu = \varrho = \sigma = \nu_0$ . Für die Umlaufzeit erhält man

$$T = 2 \int_{\gamma}^{\beta} \frac{(\mu - \lambda_0) d\mu}{\sqrt{g(\alpha - \mu)(\beta - \mu)(\mu - \gamma)(\mu - \lambda_0)}}.$$

In allen anderen Fällen ist das Bewegungsgebiet ein Hauptschnitt:

$$\text{XI. XII. } \varrho \geq \alpha, \quad \sigma = \alpha.$$

Es findet ein Umlauf im Hauptschnitt  $\nu = \alpha$  statt, dessen Zeitdauer ausgedrückt wird durch

$$T = 2 \int_{\gamma}^{\beta} \frac{(\mu - \lambda_0) d\mu}{\sqrt{g(\varrho - \mu)(\beta - \mu)(\mu - \gamma)(\mu - \lambda_0)}}.$$

$$\text{XIII. XIV. } \varrho = \beta, \quad \beta > \sigma > \gamma.$$

Es findet eine Oscillation im Hauptschnitt  $\nu = \beta$  statt; wenn  $\sigma = \beta$  ist, zwischen den Kreispunkten. Die Zeitdauer eines Hin- und Herganges ist

$$T = 2 \int_{\gamma}^{\sigma} \frac{(\mu - \lambda_0) d\mu}{\sqrt{g(\alpha - \mu)(\sigma - \mu)(\mu - \gamma)(\mu - \lambda_0)}}.$$

XV. XVI.  $\sigma = \gamma$ .  $\varrho > \alpha$  oder  $\alpha > \varrho > \beta$ .

Bei XV findet eine Circulation, bei XVI eine Oscillation im Hauptschnitt  $\mu = \gamma$  statt. Die Circulations- resp. Oscillationsdauer beträgt

$$T = 2 \int_{\gamma}^{\varrho, \alpha} \frac{(\nu - \lambda_0) d\nu}{Vg(\varrho - \nu)(\alpha - \nu)(\nu - \beta)(\nu - \lambda_0)}.$$

F. Singulär-asymptotische Bewegungsform:

XVII.  $\varrho = \alpha$ ,  $\sigma = \gamma$ .

Die beiden letzten Fälle (XV, XVI) bilden den Uebergang zu dieser Bewegungsform. Es wird  $T = \infty$ , und rückt also der materielle Punkt niemals in den Scheitel der mittleren Achse hinein. Wenn er aber in diesen Scheitel hineingesetzt wird, so verharret er dort in Ruhe.

G. Ruhelage des materiellen Punktes.

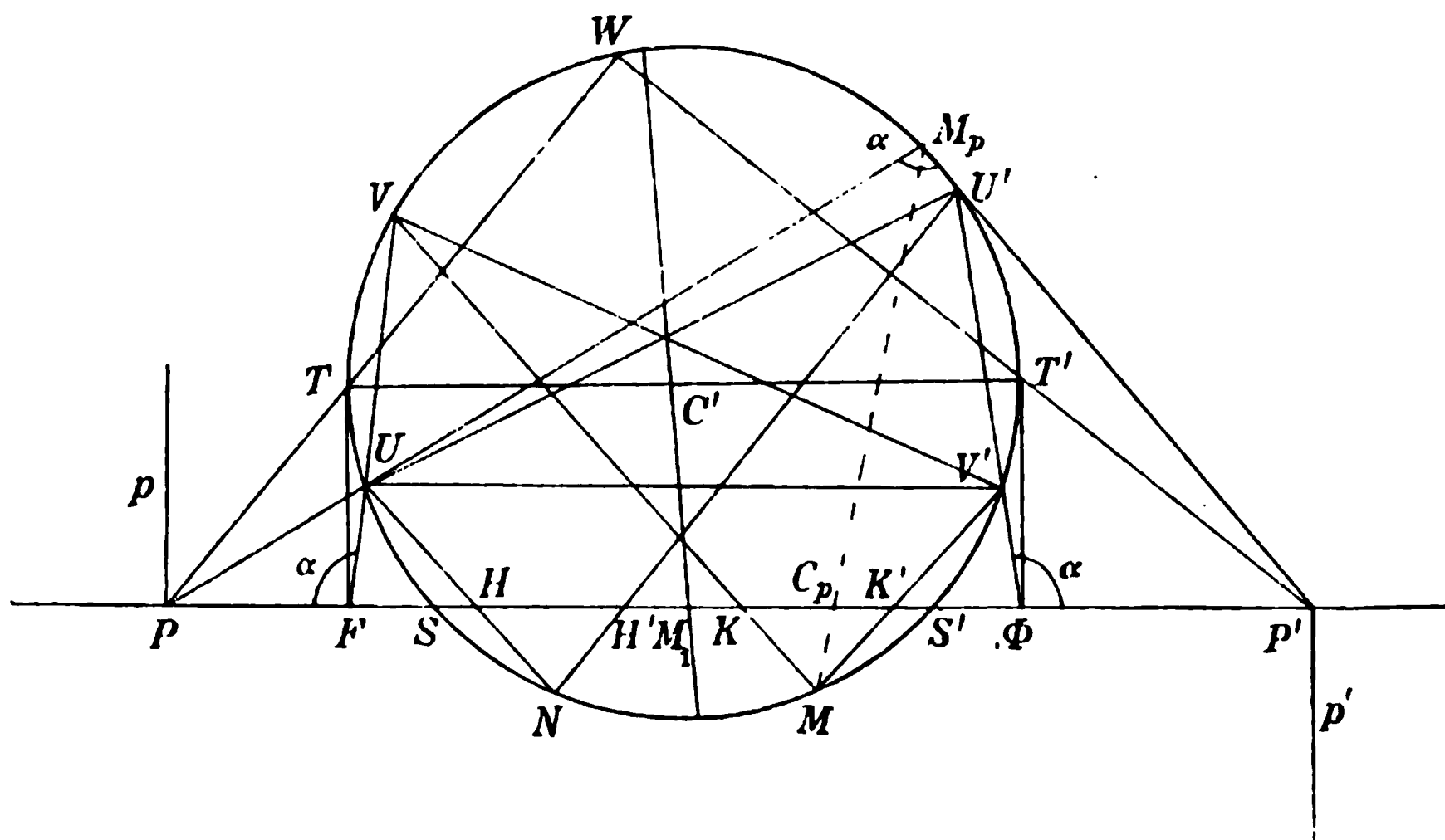
XVIII.  $\varrho = \beta$ ,  $\sigma = \gamma$ .

Das Niveau der Geschwindigkeit 0 geht durch die Scheitel der grossen Achse hindurch, und es kann sich der Punkt nur in einem derselben und nur in Ruhe befinden.

## Kleinere Mittheilungen.

### VI. Construction des Collineationscentrums eines dioptrischen Systems.

In einer „Bemerkung zu einer dioptrischen Construction“ im zweiten Hefte des XXXVII. Jahrgangs dieser Zeitschrift, S. 123, giebt Professor Helm eine einfache Construction des Collineationscentrums der conjugirten Object- und Bildebenen centrirter dioptrischer Systeme an durch eine Verallgemeinerung des Möbius'schen Symptosenkreises für Linsensysteme in Luft. Dieselbe ist noch einer weiteren Verallgemeinerung fähig, wenn man von dem bekannten Lippich'schen oder Hüllsten'schen Symptosenkreise\* für allgemeine centrirte, dioptrische Systeme ausgeht.



Es seien  $F$  und  $\Phi$  die Brennpunkte,  $H$  und  $H'$  die Hauptpunkte,  $K$  und  $K'$  die Knotenpunkte,  $P$  axialer Objectpunkt und  $P'$  sein Bildpunkt,  $p$  und  $p'$  die zur Achse senkrechten conjugirten Object- und Bildebenen. Lippich construirt nun um einen in der senkrechten Mediane der Focaldistanz  $F\Phi$  gelegenen Punkt  $C$  einen Kreis von dem Durchmesser  $F\Phi$  in der Höhe  $CM_1$  gleich dem geometrischen Mittel  $\sqrt{-f\phi}$  der Brennweiten  $f$

\* Lippich in den Mittheilungen des naturw. Vereins für Steyermark II. Bd., 3. Heft, S. 449. Graz 1871. — Hüllsten im Archiv. f. Anat. u. Physiol. Physiol. Abthl. 1880. S. 115. -- Vergl. auch Hederich, Recherches dioptriques sur les systemes centrés. Inaug.-Diss. Rostock 1892. Remarques historiques p. 5.

und  $\varphi$ . Da die vordere Brennweite  $f$  in Berücksichtigung des Vorzeichens der Richtung der Lichtbewegung wesentlich negativ ist, so sind die Senkrechten  $FT$  und  $\Phi T'$  gleich  $\sqrt{-f\varphi}$ . Zieht man die Transversale  $PT$  bis  $W$  und die Gerade  $WT'P'$ , so ist  $P'$  der gesuchte Bildpunkt von  $P$ . Es ist nämlich

$$FP \cdot \Phi P' = FT \cdot \Phi T', \quad \xi_0 \xi_1 = f\varphi.$$

Um nun das Collineationscentrum  $C_p$  der Ebenen  $p$  und  $p'$  zu finden, mache  $FU = FH = f$ ,  $\Phi V' = \Phi K' = \varphi$  und ziehe die Transversalen  $FUV$  und  $\Phi V'U'$ . Weiter ziehe man die Transversalen  $PUM_p$  und  $M_pUP'$ , ausserdem die Winkelhalbirende  $M_pM$ ; dann sind  $P'$  und  $C_p$  die gesuchten Punkte. Es lässt sich nämlich beweisen, dass die Hauptpunktsstrahlen  $UH$  und  $U'H'$  sich in einem Kreispunkte  $N$ , die Knotenpunktsstrahlen  $VK$  und  $V'K'$  in einem Kreispunkte  $M$  schneiden, dessen Verbindungslinie  $MM_p$  den Winkel  $PM_pP'$  halbt. Es ist  $V'K'$  parallel  $U'H'$  und  $UH$  parallel  $VK$ . Der Winkel  $PFV$  sei gleich  $\alpha$ ; dann ist auch  $P'\Phi V' = \alpha$  und  $UV'U' = 180^\circ - \alpha$ . Ferner sind die Winkel  $FHU$  und  $\Phi H'U'$  gleich  $\frac{1}{2}\alpha$ ,  $UNU'$  gleich  $180^\circ - \alpha = UV'U'$ . Folglich ist  $N$  ein Kreispunkt, was auch aus gleichen Gründen für  $M$  gilt. Nun ist der Bogen  $U'M = MU$ , weil  $U'V' = MN = NU$  ist; folglich der Peripheriewinkel  $U'M_pM$  gleich  $UM_pM$ , also  $MM_p$  Winkelhalbirende.

Um noch zu beweisen, dass  $P$  und  $P'$  conjugirte Punkte und  $C_p$  Collineationscentrum zu  $p$  und  $p'$  ist, geht man aus von der Aehnlichkeit der Dreiecke  $PFU$  und  $U'\Phi P'$ . Der Winkel  $P'\Phi U' = PFU = \alpha$ , der Winkel  $PM_pP'$  ebenfalls gleich  $\alpha$ , da er das Supplement von  $UV'U'$  ist. Die Schenkel  $PP'$  und  $PM_p$  des Winkels  $P'PM_p$  bilden also mit den Schenkeln  $U'\Phi$  und  $U'P'$  des Winkels  $P'U'\Phi$  die gleichen Winkel  $\alpha$ ; folglich sind sie einander gleich und die Dreiecke  $PFU$  und  $\Phi U'P'$  ähnlich. Daraus folgt

$$FP \cdot \Phi P' = FU \cdot \Phi U',$$

oder, wenn man wiederum  $FP = \xi_0$ ,  $\Phi P' = \xi_1$  setzt,  $\xi_0 \xi_1 = f\varphi$ . Deswegen sind  $P$  und  $P'$  conjugirte Punkte. Da aber auch  $PM_pP'$  denselben Dreiecken ähnlich ist, so wird durch die Winkelhalbirende  $M_pM$

$$\frac{FP}{FU} = \frac{M_pP}{M_pP'} = \frac{C_pP}{C_pP'},$$

und, wenn man die Object- und Bildgrössen mit  $p$  und  $p'$  bezeichnet, mit Rücksicht auf das Vorzeichen der Richtung

$$\frac{\xi_0}{-f} = \frac{p}{p'} = \frac{C_pP}{C_pP'}.$$

Demnach ist  $C_p$  das Collineationscentrum und in gleicher Weise lässt sich der Achsenpunkt  $E_p$  finden, in welchem die Collineationsebene der

Bündel  $P$  und  $P'$  normal zur Achse steht. Der Kreis trifft, wie sich ebenfalls leicht nachweisen lässt, die Achse in den Listing'schen Symptosen  $S$  und  $S'$ .

Die Construction lässt sich nun offenbar dahin erweitern, dass alle Kreisschaaren, deren Centra in der senkrechten Mediane von  $F\Phi$  liegen und deren Potenzen bezüglich der Brennpunkte  $F$  und  $\Phi$  den Werth  $-f\varphi$  haben, Symptosenkreise sind und in gleicher Weise die Achsenpunkte  $C_p$  und  $E_p$  finden lassen. Von diesen Kreisschaaren sind dann die Kreise von Möbius, Lippich, Hällsten und Helm specielle Fälle.

Rostock, im November 1892.

MATTHIESSEN.

## XI.

### Die Brennpunktmechanismen.

Von

Dr. L. BURMESTER,

Professor an der Königl. Technischen Hochschule in München.

---

Hierzu Tafel III, IV und V.

---

#### I. Die Constructionen und Eigenschaften der Brennpunktmechanismen.

1. Ein Mechanismus, bei dem die Punkte eines jeden Gliedes in Bezug auf jedes andere Glied sich in bestimmten Bahnen bewegen, wird ein zwangläufiger genannt; und wenn mehr Bedingungen erfüllt werden, als zur Zwangläufigkeit im Allgemeinen erforderlich sind, dann heisst der Mechanismus ein zwangläufiger übergeschlossener, oder kurz ein übergeschlossener Mechanismus. Die Auffindung und Untersuchung der übergeschlossenen Mechanismen bereichert die Geometrie mit vielen neuen invarianten Beziehungen; deshalb wollen wir die übergeschlossenen Mechanismen behandeln, auf welche Hart\*, Kempe\*\*, Darboux\*\*\* hingewiesen haben, und die wegen ihrer interessanten Eigenschaften besondere Beachtung verdienen. Denn wir werden dadurch zu merkwürdigen Brennpunkt-Beziehungen veränderlicher Kegelschnittschaaren und zu vielen neuen übergeschlossenen Mechanismen gelangen.

In Fig. 4 und 5, Taf. III sind die vier Glieder eines Gelenkvierecks  $TUVW$  durch die auf den Vierecksseiten ausserhalb oder innerhalb befindlichen Gelenkachsen  $A, B, C, D$  mit den vier Gliedern  $AF, BF, CF, DF$ , die in  $F$  eine gemeinsame Gelenkachse haben, so verbunden, dass die beiden Vierecke  $TAFD, FCVB$  und die beiden Vierecke  $UAFB, FCWD$  entgegengesetzt ähnlich sind. Wir werden erkennen, dass der durch diese Verbindung erhaltene ebene Gelenkmechanismus, dessen Achsen zur Zeichnungsebene senkrecht und durch Punkte dargestellt sind, ein über-

---

\* Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. VIII p. 288. 1877.

\*\* Dasselbst, Vol. IX p. 138. 1877.

\*\*\* Bulletin des Sciences mathematiques et astronomiques. 2<sup>ème</sup> sér. T. III, p. 144. 1879.

geschlossen ist, und dass es bei einem Gelenkviereck  $TUVW$  unendlich viele derartig angeschlossene Gelenkpunkte  $F$  gibt, von denen je zwei als zusammengehörig die Brennpunkte eines veränderlichen Kegelschnittes sind, der die vier Seiten des Gelenkvierecks während der Bewegung beständig berührt; deshalb wollen wir einen solchen übergeschlossenen Mechanismus einen Brennpunktmechanismus nennen.

2. In Fig. 1 ist ein Kreis  $k$  gegeben, und auf einer durch den Mittelpunkt  $A$  gehenden Geraden nehmen wir zwei beliebige feste Punkte  $T, U$  an; ferner setzen wir die Abstände  $TA = a_1$ ,  $UA = a_2$ ,  $TU = a$ . Bezeichnen wir nun den Radius  $AF$  mit  $\alpha$  und verbinden wir einen beliebigen Kreispunkt  $F$  mit den Punkten  $T, U$ , so ist:

$$\frac{\alpha^2 + a_1^2 - TF^2}{\alpha a_1} = \frac{\alpha^2 + a_2^2 - UF^2}{\alpha a_2},$$

oder

$$a_1 UF^2 - a_2 TF^2 = a_1(\alpha^2 + a_2^2) - a_2(\alpha^2 + a_1^2),$$

und weil  $a_1 - a_2 = a$  ist, ergibt sich

$$a_1 UF^2 - a_2 TF^2 = a(\alpha^2 - a_1 a_2).$$

Ist nun eine Gleichung in der Form

$$n_1 UF^2 - n_2 TF^2 = 1$$

gegeben, so repräsentiert diese Gleichung einen Kreis, dessen Mittelpunkt  $A$  auf der Geraden  $TU$  liegt; denn die Lage des Mittelpunktes  $A$  und der Radius  $\alpha$  sind durch die Gleichungen

$$\frac{a_1}{a(\alpha^2 - a_1 a_2)} = n_1, \quad \frac{a_2}{a(\alpha^2 - a_1 a_2)} = n_2, \quad a_1 - a_2 = a$$

bestimmt.

3. Betrachten wir den in Fig. 2 gezeichneten fünfgliedrigen Gelenkmechanismus  $TUBFD$ , dessen Gliedlängen

$$TU = a, \quad UB = b_1, \quad BF = \beta, \quad TD = d_1, \quad DF = \delta$$

gegeben sind, und denken wir uns den Gelenkpunkt  $F$  gegen das als fest angenommene Glied  $TU$  so bewegt, dass die Winkel  $FBU$ ,  $FDT$  entweder gleich sind, wie in Fig. 2, oder sich zu zwei Rechten ergänzen, wie in Fig. 3, dann wird dieser Mechanismus zwangsläufig geführt. Um die Bahn des unter dieser Bedingung bewegten Gelenkpunktes  $F$  in Bezug auf das feste Glied  $TU$  abzuleiten, beachten wir, dass der Bedingung gemäss

$$\pm \cos FBU = \cos FDT$$

ist, und das positive Vorzeichen dem ersten, das negative dem zweiten Fall entspricht. Hiernach erhalten wir die Gleichung:



$$\frac{b_1^2 + \beta^2 - UF^2}{b_1 \beta} = \frac{d_2^2 + \delta^2 - TF^2}{d_2 \delta},$$

welche den ersten und den zweiten Fall enthält; denn je nachdem der Punkt  $F$  bezüglich der Strecken  $UB$ ,  $TD$  nach gleichen oder entgegengesetzten Seiten gelegen ist, erhalten die Strecken  $\beta$ ,  $\delta$  gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen.

Durch Umformung ergibt sich

$$1) \quad d_2 \delta \cdot UF^2 - b_1 \beta \cdot TF^2 = d_2 \delta (b_1^2 + \beta^2) - b_1 \beta (d_2^2 + \delta^2).$$

Da diese Gleichung einen Kreis repräsentirt, dessen Mittelpunkt  $A$  auf der Geraden  $TU$  liegt, so bewegt sich der Gelenkpunkt  $F$  auf diesem Kreise.

Durch Einfügung eines Gliedes  $AF$ , welches in  $A$  und  $F$  drehbar an den Mechanismus angeschlossen ist, erhalten wir einen sechsgliedrigen zwangsläufigen Mechanismus, bei dem in Fig. 2 die Winkel  $FBU$ ,  $FDT$  beständig gleich sind und in Fig. 3 sich zu zwei Rechten ergänzen.

Bezeichnen wir wie vorhin die Strecken  $TA$ ,  $UA$  resp. mit  $a_1$ ,  $a_2$ , den Radius mit  $a$ , dann ist

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{a(\alpha^2 - a_1 a_2)} &= \frac{d_2 \delta}{d_2 \delta (b_1^2 + \beta^2) - b_1 \beta (d_2^2 + \delta^2)}, \\ \frac{a_2}{a(\alpha^2 - a_1 a_2)} &= \frac{b_1 \beta}{d_2 \delta (b_1^2 + \beta^2) - b_1 \beta (d_2^2 + \delta^2)}, \\ a_1 - a_2 &= a. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich

$$2) \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{d_2 \delta}{b_1 \beta},$$

$$3) \quad a_1 = a \frac{d_2 \delta}{d_2 \delta - b_1 \beta}, \quad a_2 = a \frac{b_1 \beta}{d_2 \delta - b_1 \beta},$$

$$4) \quad \begin{cases} \alpha^2 = \frac{d_2 \delta (b_1^2 + \beta^2) - b_1 \beta (d_2^2 + \delta^2)}{d_2 \delta - b_1 \beta} + a_1 a_2 \\ \quad = \frac{a_1}{a} (b_1^2 + \beta^2) - \frac{a_2}{a} (d_2^2 + \delta^2) + a_1 a_2. \end{cases}$$

Durch das Verhältniss  $a_1 : a_2$  ist die Lage des Kreismittelpunktes  $A$  auf der Geraden  $TU$  bestimmt, und derselbe liegt ausserhalb oder innerhalb der Strecke  $TU$ , je nachdem  $\beta$ ,  $\delta$  gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Machen wir in Fig. 4 und 5, wo die Winkel  $FBU$ ,  $FDT$  resp. gleich sind oder sich zu zwei Rechten ergänzen, die Winkel

$$BFV = DTF, \quad DFW = BUF,$$

so erhalten wir auf  $UB$ ,  $TD$  die Punkte  $V$ ,  $W$  und es ist das Dreieck  $FBV \sim TDF$ , das Dreieck  $FDW \sim UBF$ .

Setzen wir  $UV = b$ ,  $UB = b_2$ ,  $VW = c$ ,  $WD = d_1$ ,  $WT = d$ , dann ist in Folge dieser entgegengesetzt ähnlichen Dreiecke

$$5) \quad UF : \beta : b_1 = FW : d_1 : \delta, \quad TF : \delta : d_2 = FV : b_2 : \beta,$$

und hiernach:

$$6) \quad b_1 d_1 = b_2 d_2 = \beta \delta,$$

$$7) \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{d_2}{d_1}.$$

In Fig. 4 ist Winkel  $UFV = TFW$ , also auch Winkel  $TFU = W F V$ ; in Fig. 5 dagegen ergänzen sich diese Winkelpaare zu zwei Rechten.

Es ist demnach

$$\pm \frac{TF^2 + UF^2 - a^2}{TF \cdot UF} = \frac{WF^2 + VF^2 - c^2}{WF \cdot VF}$$

und

$$c^2 = \pm \frac{WF \cdot VF}{TF \cdot UF} (-TF^2 - UF^2 + a^2) + WF^2 + VF^2.$$

Aus den Proportionen in 5) folgt:

$$\frac{WF}{UF} = \frac{d_1}{\beta} = \frac{\delta}{b_1}, \quad \frac{VF}{TF} = \frac{b_2}{\delta} = \frac{\beta}{d_2},$$

und durch Einsetzung ergibt sich

$$c^2 = \frac{\beta \delta}{b_1 d_2} (-TF^2 - UF^2 + a^2) + \left(\frac{\beta}{d_2}\right)^2 TF^2 + \left(\frac{\delta}{b_1}\right)^2 UF^2.$$

Der Factor  $\frac{\beta \delta}{b_1 d_2}$  erhält das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem  $\beta$ ,  $\delta$  entsprechend dem ersten und zweiten Fall gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen besitzen.

Durch Umformung erhalten wir

$$c^2 = \frac{b_1 \beta - d_2 \delta}{b_1^2 d_2^2} (b_1 \beta \cdot TF^2 - d_2 \delta \cdot UF^2) + \frac{b_2}{b_1} a^2$$

und in Hinsicht auf 1)

$$8) \quad c^2 = \frac{b_1 \beta - d_2 \delta}{b_1^2 d_2^2} [b_1 \beta (d_2^2 + \delta^2) - d_2 \delta (b_1^2 + \beta^2)] + \frac{b_2}{b_1} a^2.$$

Dieser für  $c^2$  erhaltene constante Werth vereinfacht sich durch Einführung von  $a_1$ ,  $a_2$  und  $\alpha$  aus 3), 4); denn dann ergibt sich

$$9) \quad c^2 = \frac{a^2 \alpha^2 b_2}{a_1 a_2 b_1}.$$

Die Seite  $VW = c$  des Vierecks  $TUVW$  ist also während der Bewegung constant, und wir können demnach dieses Viereck in Fig. 4 und 5 als ein Gelenkviereck betrachten.

In Folge der symmetrischen Beziehungen beschreibt auch der Gelenk-  
in Bezug auf das Glied  $VW$  einen Kreis, dessen Mittelpunkt  $C$

auf der Geraden  $VW$  liegt. Es können also die vier Glieder  $FA$ ,  $FB$ ,  $FC$ ,  $FD$ , welche in  $F$  durch eine gemeinsame Achse verbunden sind, auch in den Punkten  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  an die vier Seiten des Gelenkvierecks  $TUVW$  drehbar angeschlossen werden, und wir erhalten somit einen achtgliederigen übergeschlossenen Mechanismus.

Setzen wir die Strecke  $VC = c_1$ ,  $WC = c_2$ , so ergibt sich nach Analogie aus der Formel 2):

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{b_2 \beta}{d_1 \delta},$$

und weil nach 7)

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{d_2}{d_1}$$

ist, folgt auch

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{c_2}{c_1}.$$

Demnach erhalten wir den Satz:

Die gegenüber liegenden Seiten  $TU$ ,  $WV$  und  $UV$ ,  $TW$  des Gelenkvierecks  $TUVW$  werden von den Punkten  $A$ ,  $C$  und  $B$ ,  $D$  in gleiche Verhältnisse getheilt.

Es ist also

$$\frac{a}{c} = \frac{a_2}{c_1} = \frac{a_1}{c_2};$$

demnach erhalten wir durch Einsetzung in 9)

$$\alpha^2 = c_1 c_2 \frac{b_1}{b_2},$$

und wegen der symmetrischen Beziehungen ist, wenn wir den Radius  $FC$  mit  $\gamma$  bezeichnen,

$$\gamma^2 = a_1 a_2 \frac{b_2}{b_1}.$$

Folglich ergeben sich die Verhältnisse

$$\frac{\alpha^2}{c_2^2} = \frac{b_1 c_1}{b_2 c_2} = \frac{a_2 b_1}{a_1 b_2}, \quad \frac{a_2^2}{\gamma^2} = \frac{a_2 b_1}{a_1 b_2}.$$

Ferner ist nach 5), 2), 6):

$$\frac{UF^2}{WF^2} = \frac{b_1^2}{\delta^2} = \frac{b_1^2}{\delta^2} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{d_2 \delta}{b_1 \beta} = \frac{a_2 b_1}{a_1 b_2}.$$

Hiernach stehen die betreffenden Seiten der beiden Dreiecke  $UAF$ ,  $FCW$  in gleichem Verhältnisse und folglich sind diese beiden Dreiecke entgegengesetzt ähnlich. Wegen der symmetrischen Beziehung gilt das selbe auch von den beiden Dreiecken  $TAF$ ,  $FCV$ .

Da nach der obigen Bestimmung der Punkte  $V$ ,  $W$

$$TDF \sim FBV, \quad UBF \sim FDW$$

ist, so ergibt sich die entgegengesetzte Aehnlichkeit der Vierecke

$$T DFA \sim FBVC, \quad UBFA \sim FDWC.$$

Damit ist bewiesen, dass der betrachtete übergeschlossene Gelenkmechanismus in Fig. 4 und 5 gemäss unserer Definition ein Brennpunktmechanismus ist.

Das Gelenkviereck  $TUVW$  wollen wir das Stammviereck und jene Vierecke mit der gemeinsamen Ecke  $F$  die Fachvierecke nennen, die Gelenkpunkte  $F$ , in welchem die vier Glieder durch eine gemeinsame Achse verbunden sind, die Viergliedpunkte und die Gelenkpunkte  $A, B, C, D$  die Anschlusspunkte nennen. Zu jedem Viergliedpunkte  $F$  gehören vier bestimmte Anschlusspunkte  $A, B, C, D$ , die entweder wie in Fig. 5, alle auf den Seiten des Stammvierecks oder, wie in Fig. 4, alle auf den Verlängerungen dieser Seiten liegen.

4. Da in Fig. 4 und 5 wegen jener entgegengesetzt ähnlichen Vierecke der Winkel

$$FDA = VBC, \quad FDC = UBA$$

ist, so folgt, je nachdem die Anschlusspunkte  $A, B, C, D$  ausserhalb oder innerhalb auf den Seiten des Stammvierecks liegen, dass

$$ADC = ABC \text{ oder } ADC = 180^\circ - ABC$$

ist und die vier Anschlusspunkte auf einem Kreise liegen. Demnach erhalten wir den Satz:

Bei dem Brennpunktmechanismus liegen die vier Anschlusspunkte, welche einem Viergliedpunkt angehören, auf je einem Kreise.

Es ist nach 6)

$$b_1 d_1 = b_2 d_2 = \beta \delta,$$

und wegen der symmetrischen Beziehung also auch

$$a_1 c_1 = a_2 c_2 = \alpha \gamma;$$

folglich

$$13) \quad a_1 b_1 c_1 d_1 = a_2 b_2 c_2 d_2 = \alpha \beta \gamma \delta.$$

Nach dem Satze von Menelaus ist in Fig. 6, wenn  $\Phi_1$  den Schnittpunkt der Geraden  $AB$  und der Diagonale  $TV$  bezeichnet,

$$\frac{TA \cdot UB \cdot V\Phi_1}{AU \cdot BV \cdot \Phi_1 T} = -1,$$

also

$$\frac{a_1 b_1}{a_2 b_2} = \frac{T\Phi_1}{V\Phi_1} = \frac{c_2 d_2}{c_1 d_1}.$$

Demnach schneiden sich die Geraden  $AB, CD$  in einem Punkt  $\Phi_1$  der Diagonale  $TV$  des Stammvierecks, und ebenso auch die Geraden  $BC, DA$  in einem Punkt  $\Phi_2$  der Diagonale  $UW$ .

Da die Anschlusspunkte  $A, B, C, D$  auf einem Kreise liegen, so sind die Dreiecke  $\Phi_1 BC, \Phi_1 DA$  ähnlich, und es ist demnach  $\Phi_1$  der selbstentsprechende Punkt für die entgegengesetzt ähnlichen Vierecke  $T D F A$ ,

Ebenso ergibt sich, dass  $\Phi_2$  der selbstentsprechende Punkt für entgegengesetzt ähnlichen Vierecke  $U A F B, F C W D$  ist.



zu bestimmen. Wir beschreiben die Kreise  $PXF$ ,  $PYF$ , welche die gegenüberliegenden Seiten des Stammvierecks resp. in den Punkten  $B$ ,  $D$  und  $A$ ,  $C$  schneiden. Die Verbindungsgeraden  $BD$ ,  $AC$  sind Tangenten an der nicht gezeichneten Parabel  $\pi$ , weil die Punkte  $B$ ,  $D$  die Strecken  $UV$ ,  $TW$  und die Punkte  $A$ ,  $C$  die Strecken  $TU$ ,  $WV$  in gleiche Verhältnisse theilen. Die Winkel  $FBU$ ,  $FDT$  und ebenso  $FAU$ ,  $FCV$  ergänzen sich zu zwei Rechten.

Beschreiben wir ferner die Kreise  $FUV$ ,  $FTW$ , die wir mit  $k$ ,  $k'$  bezeichnen, so ergänzen sich die Peripheriewinkel  $UFV$ ,  $TEW$  im betrachteten Falle zu zwei Rechten, und die Gebilde  $PUBVk$ ,  $PTDWk'$  sind ähnlich. Wenn wir nun zu dem Punkt  $F$  des Kreises  $k$  den entsprechenden Punkt  $F'$  auf dem Kreise  $k'$  bestimmen, dann liegen die Punkte  $FDF'$  in einer Geraden, und es ist hiernach der Winkel

$$FUB = F'TD = DFW.$$

Da ausserdem der Winkel  $UBF = FDW$  ist, so sind die Dreiecke  $UBF$ ,  $FDW$  ähnlich. Ebenso ist der Winkel  $FVB = F'WD = DFT$  und folglich sind auch die Dreiecke  $TDF$ ,  $FBV$  ähnlich. In gleicher Weise ergibt sich, dass die Dreiecke  $UAF$ ,  $FCW$  sowie  $TAF$ ,  $FCV$  ähnlich sind. Demnach folgt die entgegengesetzte Aehnlichkeit der Vierecke:

$$TDF A \sim FBV C \text{ und } UBF A \sim FDW C.$$

Die vermitteltst jener Kreise  $PXF$ ,  $PYF$  auf den Seiten des Stammvierecks erhaltenen Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  sind also die vier Anschlusspunkte, welche dem Viergliedpunkt  $F$  entsprechen. So erhalten wir zu jedem auf der Focale  $\varphi$  angenommenen Viergliedpunkt  $F$  die entsprechenden vier Anschlusspunkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , die entweder alle vier innerhalb auf den vier Seiten des Stammvierecks oder auf deren Verlängerungen liegen. Verlegen wir den Viergelenkpunkt  $F$  auf der Focale in einen Eckpunkt des Stammvierecks, z. B. in den Eckpunkt  $V$ , so fallen die beiden Anschlusspunkte  $B$ ,  $C$  in  $V$  zusammen; der Anschlusspunkt  $A$  fällt in  $U$  und der Anschlusspunkt  $D$  in  $W$ . Es ergibt sich:

Die Gesammtheit aller an das Stammviereck angeschlossenen Viergliedpunkte bilden während der Bewegung die veränderliche Focale, welche dem Stammviereck angehört.

6. Sind  $F$ ,  $G$  in Fig. 8 die beiden Brennpunkte eines dem Stammviereck  $TUVW$  eingeschriebenen Kegelschnitts, denen resp. die Anschlusspunkte  $A_f$ ,  $B_f$ ,  $C_f$ ,  $D_f$  und  $A_g$ ,  $B_g$ ,  $C_g$ ,  $D_g$  entsprechen, dann gilt bekanntlich die Gleichheit der Winkel:

$$FTA_f = D_g TG, \quad FUA_f = B_g UG, \quad FVB_f = C_g VG, \quad FWC_f = D_g WG.$$

Ferner ist der Winkel

$$FTA_f = VFC_f, \quad D_g TG = B_g GV, \text{ also } VFC_f = B_g GV,$$

und hiernach sind die Dreiecke  $FVC_f$ ,  $GV B_g$  entgegengesetzt ähnlich.



Seiten des Stammvierecks und die Geraden  $\overline{HFY}$ ,  $\overline{GJY}$  bilden gleiche entgegengesetzte Winkel mit den durch  $Y$  gehenden Seiten desselben.

Den beiden Viergliedpunkten  $F, H$  entsprechen auf den Seiten  $UV, TW$  dieselben Anschlusspunkte  $B_{fh}, D_{fh}$ . Wegen der gleichen Winkel  $B_{fh}XF, D_{fh}XH$  sind die Kreissehnen  $FH, B_{fh}D_{fh}$  parallel und es ist

$$FB_{fh} = HD_{fh}, \quad FD_{fh} = HB_{fh}.$$

Diese vier Strecken bilden demnach ein gelenkiges Antiparallelogramm  $B_{fh}FD_{fh}H$ . Dasselbe gilt von den übrigen drei Punktpaaren  $HG, GJ, FJ$  mit den zugehörigen Anschlusspunkten, und wir erhalten somit die in Fig. 10 dargestellten vier gelenkige Antiparallelogramme, welche gelenkig an das Stammviereck  $TUVW$  angeschlossen sind.

Von diesem Brennpunktmechanismus mit vier angeschlossenen Brennpunkten ist in Fig. 11 ein Theil besonders gezeichnet, wo das gelenkige Antiparallelogramm  $B_{fh}FD_{fh}H$  durch die Glieder  $B_{fh}U, FA_{fi}, D_{fh}T, HA_{hi}$  mit dem Gliede  $UT$  gelenkig verbunden sind, und dieser Theil bildet auch einen übergeschlossenen Mechanismus.

Die beiden an das Stammviereck  $TUVW$  angeschlossenen Brennpunktpaare  $FG$  und  $HJ$ , welche in der dargelegten Beziehung stehen, wollen wir stammverwandte Brennpunktpaare nennen.

Demnach sind auch die gegenüber liegenden Eckpunkte  $TV, UW$  des Stammvierecks stammverwandte Brennpunktpaare.

8. Die in Fig. 9 gezeichneten Verbindungsgeraden der Punkte  $B_{fh}D_{fh}$  und  $A_{fi}C_{fi}$ , welche Tangenten an der dem Stammviereck  $TUVW$  eingeschriebenen Parabel sind, schneiden sich in einem Punkt  $\Xi$ , der mit dem Brennpunkt  $F$  und dem Brennpunkt  $P$  dieser Parabel in einer Geraden liegt; denn die Geraden  $B_{fh}D_{fh}, A_{fi}C_{fi}, FP$  sind gemeinsame Sehnen je zweier der drei Kreise, die resp. durch die vier Punkte  $PB_{fh}FD_{fh}, PA_{fi}FC_{fi}, A_{fi}B_{fh}C_{fi}D_{fh}$  gehen. Ferner ist, wie schon erwähnt,  $B_{fh}D_{fh}$  parallel  $FY$ , ebenso  $A_{fi}C_{fi}$  parallel  $FX$ . Dieselben Beziehungen gelten wegen der Gleichartigkeit der Anordnung für die übrigen Paare der Anschlusspunkte.

Zu einem gegebenen Anschlusspunkt, z. B. zu  $A_{fi}$ , können wir die entsprechenden Viergliedpunkte und die zugehörigen übrigen Anschlusspunkte ohne die Focale  $\varphi$  construiren, wenn wir annehmen, dass der Parabelbrennpunkt  $P$  gezeichnet ist. Wir beschreiben den Kreis  $PYA_{fi}$ , der die Seite  $VW$  in  $C_{fi}$  trifft, ziehen ferner durch  $X$  zu  $A_{fi}C_{fi}$  die Parallele  $\overline{XJF}$ , die den Kreis in den beiden entsprechenden Viergliedpunkten  $F, J$  schneidet. Die Kreise  $PXF, PXJ$  liefern dann resp. die Anschlusspunkte  $B_{fh}D_{fh}, B_{gi}D_{gi}$ .

Nehmen wir also auf der Seite  $TU$  einen beliebigen Anschlusspunkt, so entsprechen diesem auf der Focale zwei Viergliedpunkte  $F, J$ , imaginär sein können, und ferner entsprechen dem Anschluss-









punkt  $\mu$  ist, fällen wir von  $\Omega$  und  $B_{pq}$  auf  $P\mu$  die Senkrechten  $\Omega\Pi$  und  $B_{pq}\Theta$ , dann ist  $\Omega\Pi$  die Polare für  $P$  in Bezug auf den Kreis  $\kappa_0$  und  $\Theta$  die Mitte der Strecke  $P\Pi$ . Die Punkte  $P, \Pi$  können wir demnach als Grenzpunkte eines Kreisbüschels betrachten, zu denen der Kreis  $\kappa_0$  und die Gerade  $B_{pq}\Theta$  als Chordale gehört. Wegen der symmetrischen Beziehungen folgt, wenn wir von dem auf  $TU$  befindlichen Anschlusspunkt  $A_{pr}$ , der zu  $P$  gehört, auf  $P\mu$  die Senkrechte fällen, dass deren Fusspunkt mit  $\Theta$  identisch ist. Die drei Punkte  $A_{pr}, \Theta, B_{pq}$  liegen also in einer auf  $P\mu$  senkrechten Geraden, die als unendlich grosser Kreis betrachtet auch die auf  $TU, UV$  im Unendlichen liegenden Anschlusspunkte  $A_{oq}^\infty, B_{or}^\infty$  enthält und demnach die Chordale des Kreisbüschels  $K_{tuv}$  ist. Demzufolge sind  $P, \Pi$  die Grenzpunkte des Kreisbüschels  $K_{tuv}$ , welches durch den Parabelbrennpunkt  $P$  als den einen Grenzpunkt und Kreis  $\mathcal{TUV}$  bestimmt ist. Aus diesen Beziehungen folgt der Satz:

Die entsprechenden Anschlusspunktfolgen auf zwei benachbarten Seiten des Stammvierecks sind die entsprechenden involutorischen Punktfolgen, welche diese beiden Seiten mit einem Kreisbüschel bilden, zu dem der Parabelbrennpunkt als der eine Grenzpunkt und der durch die drei betreffenden Ecken des Stammvierecks gehende Kreis gehört.

Da es vier Paare benachbarter Seiten des Stammvierecks giebt, so treten vier solche Kreisbüschel  $K_{tuv}, K_{uvw}, K_{vwt}, K_{wtu}$  auf, für die der Parabelbrennpunkt  $P$  ein Grenzpunkt ist. Diese Kreisbüschel haben also stets zwei im Endlichen liegende imaginäre Grundpunkte und die Seiten des Vierecks, welches von den vier zu dem Parabelbrennpunkt  $P$  gehörenden Anschlusspunkte  $A_{pr}, B_{pq}, C_{pr}, D_{pq}$  gebildet wird, sind die Chordalen.

Bei jedem Gelenkviereck giebt es eine Stellung, in welcher dasselbe ein Kreisviereck ist, die vier Ecken also auf einem Kreise liegen. Wenn diese Stellung eines Stammvierecks in bekannter Weise\* construiert wird, dann vereinen sich jene Kreisbüschel zu einem einzigen, zu welchen der Parabelbrennpunkt  $P$  als der eine Grenzpunkt und der dem Stammviereck umschriebene Kreis gehört. Die entsprechenden Anschlusspunktpaare aller vier Seiten des Stammvierecks liegen dann auf je einem Kreise dieses Kreisbüschels, und jeder dieser Kreise enthält demzufolge die acht Anschlusspunkte, die zu je zwei stammverwandten Brennpunktpaaren gehören.

12. Wir wollen noch einige besondere Fälle betrachten, bei denen die Seiten des Stammvierecks in angenommener Längenbeziehung stehen,

\* Apollonius, Ebene Oerter. Wiederhergestellt von R. Simson. 1796.















Anschlusspunkte auf den Seiten  $TA$ ,  $FD$  dieses Fachvierecks. In analoger Weise ergibt sich, wenn wir auf  $TW$  den Anschlusspunkt  $D_p$  bestimmen und durch  $PD_pX_t$  einen Kreis beschreiben, dass derselbe durch den Parabelbrennpunkt  $P_t$  geht und die Seite  $AF$  des Fachvierecks  $TAFD$  in dem zu  $P$  gehörenden Anschlusspunkt  $A$  schneidet, wobei  $D_pA$  parallel  $PY_t$  ist. Sind also die Anschlusspunkte  $A_p$ ,  $D_p$  construiert und ziehen wir  $A_p\Delta$  parallel  $PX_t$ ,  $D_pA$  parallel  $PY_t$ , so sind  $A_p$ ,  $A$ ,  $\Delta$ ,  $D_p$  die zum Punkte  $P$  gehörenden vier Anschlusspunkte auf den Seiten des Fachvierecks  $TAFD$ . In Fig. 25 sind ferner die zum Punkte  $P$  gehörenden vier Anschlusspunkte  $B_p$ ,  $B$ ,  $\Gamma$ ,  $C_p$  auf den Seiten des Fachvierecks  $VBE C$  construiert und dadurch ist der Punkt  $P$  zugleich auch an die beiden anderen Fachvierecke  $UAFB$ ,  $WCFD$  angeschlossen und wir erhalten den Satz:

Bei einem Brennpunktmechanismus kann der Parabelbrennpunkt  $P$ , welcher in den Anschlusspunkten  $A_p$ ,  $B_p$ ,  $C_p$ ,  $D_p$  mit den Seiten  $TU$ ,  $UV$ ,  $VW$ ,  $WT$  des Stammvierecks  $TUVW$  gelenkig verbunden ist, auch in den Punkten  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$ ,  $\Delta$  mit den zu einem beliebigen Brennpunkt  $F$  gehörenden Gliedern  $AF$ ,  $BF$ ,  $CF$ ,  $DF$  gelenkig verbunden werden.

Der so erhaltene übergeschlossene Mechanismus in Fig. 25, bei dem acht Glieder im Punkte  $P$  ein gemeinsames Gelenk besitzen, enthält vier Brennpunktmechanismen, bei denen die vier zu  $F$  gehörenden Fachvierecke  $FAUB$ ,  $FBVC$ ,  $FCWD$ ,  $FDTA$  als Stammvierecke auftreten; und in jedem dieser Brennpunktmechanismen befinden sich zwei Paare ähnlicher Fachvierecke. Die vier Gruppen von den vier zugehörigen Anschlusspunkten  $AA_pB_pB$ ,  $BB_pC_p\Gamma$ ,  $\Gamma C_pD_p\Delta$ ,  $\Delta D_pA_pA$  liegen auf je einem Kreise.

In dem Brennpunktmechanismus mit dem Stammviereck  $FDTA$  und Viergliedpunkt  $P$  ist

$$PA_pTD_p \sim F\Delta PA.$$

In dem Brennpunktmechanismus mit dem Stammviereck  $FBVC$  und Viergliedpunkt  $P$  ist

$$VC_pPB_p \sim PBF\Gamma.$$

Es ist ferner in dem Brennpunktmechanismus mit dem ursprünglichen Stammviereck  $TUVW$  und dem Viergliedpunkt  $P$

$$PA_pTD_p \sim VC_pPB_p;$$

also sind die Vierecke  $F\Delta PA$ ,  $PBF\Gamma$ , welche die gemeinsame Diagonale  $PF$  besitzen, symmetrisch congruent, und dem zu Folge ist

$$F\Delta = PB, FB = P\Delta, FA = P\Gamma, F\Gamma = PA.$$

Hiernach sind in dem betrachteten übergeschlossenen Mechanismus die Vierecke  $F\Delta PB$ ,  $FAP\Gamma$  gelenkige Antiparallelogramme, und es können

aus demselben die in Fig. 26 und 27 dargestellten übergeschlossenen Mechanismen entnommen werden, in denen nur noch ein überzähliges Glied enthalten ist.

21. Da die Focale  $\varphi$  des Fachvierecks  $TAFD$  in Fig. 28 durch den Parabelbrennpunkt  $P$  des Stammvierecks  $TUVW$  geht, so folgt, wenn wir das Viereck  $TAFD$  als ein Stammviereck betrachten, an dessen Seiten  $TA$ ,  $TD$  der Punkt  $P$  angeschlossen ist, dass auch die Focale des Fachvierecks  $TA_pPD_p$  durch den Parabelbrennpunkt  $P_i$  dieses Stammvierecks  $TAFD$  geht; und wir erhalten den Satz:

Bei einem Brennpunktmechanismus erfüllen die Parabelbrennpunkte  $P_i$  aller Fachvierecke  $TAFD$ , welche die gemeinsame Ecke  $T$  besitzen, die Focale des Vierecks  $TA_pPD_p$ .

Das Analoge gilt für die anderen Fachvierecke, welche resp. die gemeinsame Ecke  $U$ ,  $V$ ,  $W$  besitzen.

Bezeichnen wir den Schnittpunkt der Geraden  $PD_p$ ,  $FD$  mit  $\delta$  und beschreiben wir den durch  $P$ ,  $F$ ,  $\delta$  gehenden Kreis  $\mathfrak{f}$ , so folgt nach dem Satze in Art. 16, dass dieser Kreis die Focale  $\varphi$  des Stammvierecks  $TUVW$  im Punkte  $P$  berührt und auch die Schnittpunkte  $a$ ,  $b$ ,  $c$  der Geradenpaare  $PA_p|FA$ ,  $PB_p|FB$ ,  $PC_p|FC$  enthält.

Sind in Fig. 29 auf den Seiten eines Dreiecks  $DD_p\delta$  die Punkte  $X_i$ ,  $P$ ,  $F$  beliebig angenommen, und beschreiben wir die Kreise  $X_iD_pP$ ,  $P\delta F$ ,  $FDX_i$ , so schneiden sich diese drei Kreise nach einem bekannten Satze in einem Punkte  $P_i$ . In Fig. 28 schneiden sich die nicht gezeichneten Kreise  $X_iD_pP$ ,  $FDX_i$  in dem Brennpunkt  $P_i$  der Parabel des Fachvierecks  $TAFD$ ; folglich geht auch der mit  $\mathfrak{f}$  bezeichnete Kreis  $P\delta F$  durch diesen Parabelbrennpunkt  $P_i$  und es ergibt sich:

Der durch die Punkte  $P$ ,  $F$  gehende Kreis  $\mathfrak{f}$ , welcher die Focale  $\varphi$  des Stammvierecks  $TUVW$  im Parabelbrennpunkt  $P$  berührt, geht durch den Parabelbrennpunkt  $P_i$  des Fachvierecks  $TAFD$  und somit auch durch die drei Parabelbrennpunkte der drei anderen Fachvierecke.

Da der Kreis  $\mathfrak{f}$  die Focale  $\varphi$  aber noch in einem zweiten nicht angezeichneten Punkt  $F'$  schneidet, zu dem auch vier Fachvierecke gehören, so enthält dieser Kreis auch die vier Parabelbrennpunkte dieser vier Fachvierecke. Der Kreis  $\mathfrak{f}$  schneidet demnach die Focale  $\pi_i$  des Fachvierecks  $TA_pPD_p$ , welche alle Parabelbrennpunkte der an der Ecke  $T$  befindlichen Fachvierecke  $TAFD$  enthält, nur in den beiden Parabelbrennpunkten, die den Punkten  $F$ ,  $F'$  entsprechen; folglich muss dieser Kreis auch die Focale  $\pi_i$  des Vierecks  $TA_pPD_p$  im Punkte  $P$  berühren, der Führungspunkt der beiden Focalen  $\varphi$ ,  $\pi_i$  ist. Dasselbe



$B, C, D$  mit dem Stammviereck  $TUVW$  verbunden ist. Wir ziehen die von  $F_1$  ausgehenden vier Diagonalen  $F_1T, F_1U, F_1V, F_1W$  der vier Fachvierecke. Auf der einen Diagonale  $FT$  nehmen wir einen beliebigen Punkt  $T_1$  an, ziehen zu  $F_1A$  die Parallele  $T_1\mathfrak{A}$ , welche  $TU$  in  $\mathfrak{A}$ ,  $F_1U$  in  $U_1$  schneidet, zu  $F_1D$  die Parallele  $T_1\mathfrak{D}$ , welche  $TW$  in  $\mathfrak{D}$ ,  $F_1W$  in  $W_1$  trifft. Ferner ziehen wir zu  $F_1B$  die Parallele  $U_1\mathfrak{B}$ , die auf  $UV$  den Punkt  $\mathfrak{B}$  bestimmt, zu  $F_1C$  die Parallele  $W_1\mathfrak{C}$ , welche  $U_1\mathfrak{B}$  in  $V_1$  und  $VW$  in  $\mathfrak{C}$  schneidet; dann liegt der Punkt  $V_1$  auf der Diagonale  $F_1V$ . Denn es ist

$$\frac{TA}{\mathfrak{A}A} = \frac{TD}{\mathfrak{D}D}, \quad \frac{UA}{\mathfrak{A}A} = \frac{UB}{\mathfrak{B}B}, \quad \frac{WD}{\mathfrak{D}D} = \frac{WC}{\mathfrak{C}C}$$

und bei dem Brennpunktmechanismus

$$\frac{TA}{UA} = \frac{WC}{VC}, \quad \frac{UB}{VB} = \frac{TD}{WD},$$

also

$$\frac{VB}{\mathfrak{B}B} = \frac{VC}{\mathfrak{C}C}.$$

Dieser Construction zufolge ist

$$T\mathfrak{A}T_1\mathfrak{D} \sim TAF_1D, \quad U\mathfrak{A}U_1\mathfrak{B} \sim UAF_1B$$

$$V\mathfrak{B}V_1\mathfrak{C} \sim VBF_1C, \quad W\mathfrak{C}W_1\mathfrak{D} \sim WCF_1D,$$

und ferner

$$T\mathfrak{A}T_1\mathfrak{D} \sim V_1\mathfrak{C}V\mathfrak{B}, \quad U\mathfrak{A}U_1\mathfrak{B} \sim W_1\mathfrak{C}W\mathfrak{D}.$$

Demnach ergibt sich die Aehnlichkeit der folgenden Dreiecke:

$$F_1TU \sim F_1V_1W_1, \quad F_1UV \sim F_1W_1T_1,$$

$$F_1VW \sim F_1T_1U_1, \quad F_1WT \sim F_1U_1V_1;$$

folglich sind die Vierecke  $TUVW, V_1W_1T_1U_1$  entgegengesetzt ähnlich und der Punkt  $F_1$  ist der selbstentsprechende Punkt für diese entgegengesetzt ähnlichen Vierecke.

Hiernach können wir die eingefügten Vierecke  $T\mathfrak{D}T_1\mathfrak{A}, U\mathfrak{A}U_1\mathfrak{B}, V\mathfrak{B}V_1\mathfrak{C}, W\mathfrak{C}W_1\mathfrak{D}$  als Gelenkvierecke betrachten, und es ist  $T_1U_1V_1W_1$  ein Gelenkviereck, dessen Seiten in den Punkten  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$  mit den entsprechend bezeichneten Seiten des Gelenkviereckes  $TUVW$  drehbar verbunden sind. Lassen wir die Glieder  $AF_1, BF_1, CF_1, DF_1$  weg, so erhalten wir den in Fig. 31 gezeichneten übergeschlossenen Mechanismus, der auch von Kempe\* angegeben wurde. Bei diesem Mechanismus schneiden sich die vier Diagonalen  $TT_1, UU_1, VV_1, WW_1$  während der Bewegung beständig in einem Punkt  $F_1$ , der ein Brennpunkt eines dem Gelenkviereck  $TUVW$  eingeschriebenen Kegelschnittes und zugleich ein Brennpunkt eines dem Gelenkviereck  $T_1U_1V_1W_1$  eingeschriebenen Kegel-













Wir erhalten hiernach einen Mechanismus, bei welchem ein Achtgliedpunkt  $F_1$  in anderer Art als in Fig. 32 durch acht Glieder an die Seiten der verbundenen Gelenkvierecke  $TUVW$ ,  $T_2U_2V_2W_2$  angeschlossen ist, und dieser geht also aus dem Vierungsmechanismus in Fig. 39 hervor, wenn die beiden benachbarten Gelenkvierecke  $T_1U_1V_1W_1$  und  $T'U'V'W'$  in je einen Punkt übergehen.

29. In Fig. 41 ist der specielle Fall dargestellt, in welchem nach Fig. 39 die gegenüberliegenden Gelenkvierecke  $T_1U_1V_1W_1$  und  $T_2U_2V_2W_2$  durch die nicht conjugirten Brennpunkte  $F_1$ ,  $F_2$  ersetzt sind. Fig. 42 zeigt eine weitere Specialisirung dieses Falles, wo die Brennpunkte  $F_1$ ,  $F_2$  auf den Seiten  $TW$ ,  $UV$  gemeinsame Anschlusspunkte resp.  $B_{12}$ ,  $D_{12}$  besitzen. Es wird dann auch das Gelenkviereck  $B_1B_2B'_2B'_1$  und  $D_1D_2D'_2D'_1$  resp. durch den Punkt  $B_{12}$ ,  $D_{12}$  vertreten.

Nehmen wir bei diesem speciellen Mechanismus in Fig. 43 noch einen beliebigen dritten Brennpunkt  $F_3$  eines dem Gelenkviereck  $TUVW$  eingeschriebenen Kegelschnittes an, mit den Anschlussgliedern  $F_3A_3$ ,  $F_3B_3$ ,  $F_3C_3$ ,  $F_3D_3$ , so giebt es auf dem Gliede  $F_3A_3$  einen Brennpunkt  $f_a$  eines das Gelenkviereck  $A_1A'_1A'_2A_2$  berührenden Kegelschnittes und es kann  $f_a$  an die Seiten dieses Gelenkviereckes angeschlossen werden. Dasselbe gilt von einem auf dem Gliede  $F_3C_3$  liegenden Brennpunkt  $f_c$  für das Gelenkviereck  $C_1C'_1C'_2C_2$ . Um dies zu beweisen, verbinden wir in Fig. 44 den Parabelbrennpunkt  $P$  des Gelenkviereckes  $TUVW$  mit  $A_1F_1$ ,  $A_2F_2$ ,  $A_3F_3$  in den Punkten  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ , wie in Art. 20 angegeben wurde, dann sind die Winkel  $PA_1A_1$ ,  $PA_2A_2$ ,  $PA_3A_3$  gleich und es können die Glieder  $A_1F_1$ ,  $F_2A_2$ ,  $F_3A_3$  unter sich durch zwei eingefügte Glieder  $f_aa_1$ ,  $f_aa_2$  verbunden werden. Es sind ferner die Winkel  $PA_1F_1$ ,  $PA_2F_2$  gleich, weil die Punkte  $Y$ ,  $F_1$ ,  $F_2$  auf einer Geraden, die Punkte  $P$ ,  $F_1$ ,  $A_1$ ,  $Y$ , und  $P$ ,  $F_2$ ,  $A_2$ ,  $Y$  auf je einem Kreise liegen. Wir erhalten dann, indem wir den Winkel  $A_3Pf_a$  gleich  $PA_1F_1$  oder gleich  $PA_2F_2$  machen, auf  $A_3F_3$  denselben Gelenkpunkt  $f_a$  für die beiden Glieder  $fa_1$ ,  $fa_2$ .\*

Andere besondere Fälle ergeben sich, wenn wir in Fig. 38 für das Gelenkviereck ein gleichschenkeliges, oder ein Antiparallelogramm nehmen und ferner wie oben einige Gelenkvierecke durch Punkte ersetzen.

Lassen wir in Fig. 38 die Gelenke  $T_1U_1V_1W_1$  und  $T_2U_2V_2W_2$  weg, dann erhalten wir den in Fig. 45 dargestellten übergeschlossenen. Dieser Mechanismus bleibt noch übergeschlossen, wenn wir ferner drei Glieder, die je zwei Gelenke besitzen, herausnehmen; wir erhalten dann die in Fig. 45a, 45b, 45c um die Hälfte verkleinert gezeichneten Mechanismen. Werden aber vier solche Glieder weggenommen, dann erhalten wir zwangsläufige,

\* Die Brennpunktmechanismen in Fig. 8, 10, 25, 38, 41, 42, 43 wurden aus Aluminium angefertigt in dem mathem.-physik. Institut von Dr. Th. Edelmann in München. Siehe Katalog mathem. und mathem.-physik. Instrumente. Herausgegeben von W. Dyck. 1892. S. 331 und „Nachtrag“ 1893 zu demselben.

---

aber nicht mehr übergeschlossene Mechanismen; denn für diese sind die Bedingungen der Zwangläufigkeit erfüllt.\*

Wir haben in Fig. 36 einen Mechanismus gezeichnet, bei dem der Viergliedpunkt  $F_1$  an das Gelenkviereck  $TUVW$  in den Punkten  $A, B, C, D$  angeschlossen ist, die nicht auf den Seiten des Gelenkviereckes liegen. Die Specialisirung dieses übergeschlossenen Mechanismus führt aber nicht zu den Brennpunktmechanismen. Es ist nun zu vermuthen, dass es eine andere Art der Anschliessung von Punkten  $F_1$  giebt, wo die Anschlusspunkte nicht auf den Vierecksseiten liegen, aus der die Brennpunktmechanismen als specielle Fälle hervorgehen, und die Auffindung dieser Mechanismen würde zu einer weiteren interessanten Verallgemeinerung der Brennpunktmechanismen führen.

---

\* Vergl. L. Burmester, Lehrbuch der Kinematik. 1888. Bd. I, S. 426.

## XII.

### Zur Theorie der Ausdehnung von Hohlkörpern.

Von

Dr. A. KURZ

in Augsburg.

§ 1. Im ersten Bande der physikalischen Revue\* sind die „Untersuchungen von Amagat über die Elasticität fester Körper und die Compressibilität des Quecksilbers“ aus den französischen Annalen vom Jahre 1891 übertragen, in welchen der Verfasser als Ausgangspunkt die Formel für „die Aenderung des Volumens eines Kreiscylinders mit ebenen Grundflächen“ nimmt:

$$\frac{dV}{V} = \frac{1}{E} \cdot \frac{3(1-2\mu)(P_1 R_1^2 - P_0 R_0^2) + 2(1+\mu)(P_1 - P_0) \cdot \frac{R_1^2 R_0^2}{R^2}}{R_0^2 - R_1^2} \dots **$$

Dabei ist  $P_1$  der äussere und  $P_0$  der innere Druck,  $E$  der Elasticitätsmodul (wie z. B. 20 000 Kilogramm für den Quadratmillimeter Eisen) und  $\mu$  die zweite Elasticitätsconstante, welche Poisson als gleich  $\frac{1}{4}$  in allen isotropen Körpern annahm.  $R_1$  ist der äussere,  $R_0$  der innere Radius und  $R_1 > R > R_0$ .

Indem ich dem Ursprung dieser Formel nachforschte, der nicht angegeben ist, fand ich kürzlich in den Vorlesungen über Elasticität von F. Neumann, welche sein Schüler, Professor O. E. Meyer, im Jahre 1885 bei B. G. Teubner herausgegeben hat, das Nothwendige, wenn auch nicht diese Formel selbst. Lamé handelt in seiner *Théorie mathem. de l'Elasticité* über den Hohlcylinder viel kürzer im § 67 bis 69 des vorgenannten Buches, und die beiden anderen Schüler F. Neumann's, Clebsch und Kirchhoff, behandeln, der Erstere in seiner *Theorie der Elasticität*\*\*\* vom Jahre 1862, der Letztere in seiner *Mechanik* vom Jahre 1876 nur die Hohlkugel. Diese folgt bei Neumann in den §§ 70 bis 74.

---

\* Herausgegeben vom Privatdocent Graetz in München. 1892. (Diese Revue hat mit demselben Jahre zu erscheinen aufgehört.)

\*\* Zwei Versehen im Zähler kann man leicht an den Dimensionen und mittelst der von Amagat hernach vorgenommenen Discussion erkennen; sie wurden oben berichtet.

\*\*\* Im VIII. Bande dieser Zeitschrift wurde dieses Buch ausführlich besprochen.



nach dem Flächenmaasse) hinzu, den man mit geringer Mühe im Gedächtniss behält.

Und so könnte man schliesslich, da  $Da^3$  von  $D_1 a_1^3$  in Abzug kommt, die ganze Formel für  $\Delta$  auswendig hinschreiben. Dies ist hinsichtlich des  $\rho$  aber nicht wohl möglich.

§ 3. Clebsch berechnet auch noch die inneren Zug- oder Druckspannungen, sowie die etwaigen Schubspannungen in der Kesselwandung. Man denkt sich dazu den betreffenden Elementarquader\* nach einem Kugelradius gerichtet. Dann ist vorauszusehen (ohne Rechnung), dass  $t_{11}$  für  $r$  dieselbe Formel liefert, wie vorhin ( $-D$ ) für  $a$ . Letzteres Minuszeichen kommt herein, weil  $D$  selbst einen Druck bedeutet, und wir die drei Grössen  $t_{11}$ ,  $t_{22}$ ,  $t_{33}$  zunächst als Zugspannungen denken. Ferner ist a priori klar, dass  $t_{22} = t_{33}$  sein muss.

In diesen beiden Formeln enthält das Buch wiederum Fehler, die theils mit den im § 1 angegebenen zusammenhängen, theils auch äusserlich (an den nicht klappenden Klammern z. B.) erkenntlich sind. Es muss heissen:

$$t_{11} = \frac{D_1 a_1^3 \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) - D a^3 \left(1 - \frac{a_1^3}{r^3}\right)}{a^3 - a_1^3}.$$

Wegen der Berechnung von  $t_{22}$  muss man zu den Grundgleichungen, welche die Spannungen durch die Verschiebungen ausdrücken, zurückgreifen und findet:

$$t_{22} = \frac{D_1 a_1^3 \left(1 + \frac{a^3}{2r^3}\right) - D a^3 \left(1 + \frac{a_1^3}{2r^3}\right)}{a^3 - a_1^3}.$$

Dass die drei Schubspannungen  $t_{23} = t_{31} = t_{12} = 0$  sind, ist entweder ohne Weiteres, oder auch schnell aus den genannten Grundgleichungen zu entnehmen.

Zur Discussion setze man wiederum  $D=0$ . Dann erweist sich  $t_{11}$  als Druck (weil  $a > r$ ) und  $t_{22}$  als Zug. Beide sind an der inneren Kesselfläche (wo  $r = a_1$ ) am stärksten. Da beginnt das Zerreißen. — Neumann führt bei der Hohlkugel wie beim Hohlcyylinder die äussere „Wirkung“  $P$  als Zug ein (als in der Verlängerung des Radius thätig) und die innere  $p$  als Druck; die entsprechenden Radien sind  $R$  und  $r$ , der variable  $s$ , wo  $R > s > r$  sein muss. Deshalb bilden bei Neumann diese Kräfte Summen, wo in den §§ 1 und 2 Differenzen stehen. Bei Clebsch gilt der Zug als positiv, der Druck als negativ. Bei Kirchhoff entgegengesetzt. Im Nachfolgenden sollen die Bezeichnungen von Clebsch beibehalten, Neumann's Formeln demnach entsprechend umgesetzt werden.

\* In meinem Taschenbuche der Festigkeitslehre, Berlin Ernst & Korn 1877, habe ich auch jene Bezeichnung von Clebsch adoptirt.



§ 4. Der Hohlcylinder. Die lineare Dilatation im Querschnitte der Kesselwandung

$$\varrho = \alpha + \frac{\beta}{r^2}$$

hat die Constanten

$$\alpha = \frac{1}{E} \left[ (1 - \mu) \cdot \frac{D_1 a_1^2 - D a^2}{a^2 - a_1^2} - \mu \Pi \right],$$

wo  $\Pi$  den längs der Cylinderachse wirksamen Zug bezeichnet, und

$$\beta = \frac{1 + \mu}{E} \cdot (D_1 - D) \cdot \frac{a^2 a_1^2}{a^2 - a_1^2};$$

dazu kommt noch als lineare Veränderung längs dem Cylinder:

$$\gamma = \frac{1}{E} \left[ \Pi - 2\mu \cdot \frac{D_1 a_1^2 - D a^2}{a^2 - a_1^2} \right].$$

Ist somit  $\varrho$ , wie im § 2, mit  $r$  veränderlich, so erweist sich gleichfalls, wie im § 2, die cubische Dilatation der Cylinderwandung

$$\Delta = \frac{1 - 2\mu}{E} \left[ 2 \cdot \frac{D_1 a_1^2 - D a^2}{a^2 - a_1^2} + \Pi \right]$$

constant. Bei der Berechnung von  $\Delta$  nämlich fallen die zwei, das  $\beta$  enthaltenden, Glieder hinaus und es erweist sich

$$\Delta = 2\alpha + \gamma$$

und nicht etwa gleich  $(2\varrho + \gamma)$ .

Wohl ist aber

$$\Delta' = 2\varrho + \gamma \text{ für } r = a_1$$

die cubische Dilatation des vom Cylinder umschlossenen Hohlraumes. Neumann macht auf diesen Unterschied am Schlusse des § 67 aufmerksam, ohne indessen  $\Delta'$  anzugeben. Ich setze deshalb dasselbe hier her:

$$\Delta' = \Delta + 2 \cdot \frac{1 + \mu}{E} (D_1 - D) \cdot \frac{a^2}{a^2 - a_1^2},$$

worin für  $\Delta$  gemäss der drittvorhergehenden Gleichung eingesetzt werden kann. Ich unterlasse dies, weil sogleich auch noch für  $\Pi$  daselbst eingesetzt werden wird.

§ 5. Neumann macht nämlich im § 68 als erstes Beispiel zum Vorigen

$$D = D_1 = 0.$$

In diesem einfachen Beispiele einer gezogenen Röhre ergeben sich die beiden Elasticitätsconstanten  $E$  und  $\mu$  der Isotropie experimentell beziehungsweise aus  $\gamma$  und  $\alpha^*$ ;  $\beta$  ist hier Null, und deshalb  $\Delta = \Delta'$ .

\* Auch Hans Götze und ich haben sich mit solchen Messungen von  $\mu$  befasst; siehe Repert. d. Phys. v. J. 1886 und 1887.

Im § 69 „der Hohlcyylinder unter innerem Drucke“ kommt als zweites Beispiel  $D = 0$  und „der Hohlcyylinder soll an seinen beiden Enden durch zwei ebene Platten, deren Elasticität nicht in Betracht komme, geschlossen sein.“ Das Buch setzt dann vermöge

$$\pi(R^2 - r^2)\Pi = \pi r^2 p,$$

oder nach der Bezeichnung im § 4

$$(a^2 - a_1^2)\Pi = a_1^2 D_1$$

und spricht „von der räumlichen Dilatation des Cylinders  $\pi r^2 2a$

$$\Delta' = 2\left(\alpha + \frac{\beta}{r^2}\right) + \gamma$$

für irgend eine Stelle der Cylinderwand“.

Dies ist eine ideale Auffassung, welche in dem gleich darauf folgenden Satze an Realität gewinnt: „Hieraus ergibt sich die Erweiterung des inneren Hohlraumes, indem wir für die variable Grösse  $r$  den Werth  $a_1$  einsetzen.“

Letzteres habe ich am Schlusse des § 4 gethan.

Ohne die Beschränkung  $D = 0$  bei Neumann habe ich die Rechnung alsdann noch durchgeführt und setze demgemäss im § 4:

$$\Pi = \frac{D_1 a_1^2 - D a^2}{a^2 - a_1^2};$$

es wird dann:

$$\alpha = \gamma = \frac{1 - 2\mu}{E} \cdot \frac{D_1 a_1^2 - D a^2}{a^2 - a_1^2},$$

folglich

$$\Delta = 3\alpha = 3 \cdot \frac{1 - 2\mu}{E} \cdot \frac{D_1 a_1^2 - D a^2}{a^2 - a_1^2}$$

die cubische Dilatation der Wandung. Ihre lineare im Querschnitte aber

$$\varrho = \frac{(1 - 2\mu)(D_1 a_1^2 - D a^2) + (1 + \mu)(D_1 - D) \frac{a^2 a_1^2}{r^2}}{E(a^2 - a_1^2)},$$

womit man die erste Formel des § 2 vergleichen möge.

Die cubische Dilatation des eingeschlossenen Cylinders ist nach der letzten Gleichung des § 4:

$$\Delta' = \frac{3(1 - 2\mu)(D_1 a_1^2 - D a^2) + 2(1 + \mu)(D_1 - D) a^2}{E(a^2 - a_1^2)}.$$

Dieses constante  $\Delta'$  (hinsichtlich  $r$ ) springt an der Grenze  $r = a_1$  zum constanten Werthe  $\Delta$  für die Wandung hinunter. Aber wenn man gemäss

der oben erwähnten idealen Auffassung einen Cylinder von  $r > a_1$  (bis  $r = a$ ) voll\* denkt, so ist dessen cubische Dilatation:

$$\Delta'' = \frac{3(1 - 2\mu)(D_1 a_1^2 - D a^2) + 2(1 + \mu)(D_1 - D) \frac{a^2 a_1^2}{r^2}}{E(a^2 - a_1^2)}.$$

Dies ist die Formel des § 1, wenn man daselbst die drei Differenzen, welche die beiderlei  $D$  und  $a$  enthalten, umkehrt.

So ist auch für die Hohlkugel im § 2 das dortige  $3\rho$ , wenn für  $r$  gesetzt wird  $a_1$ , die innere, und das dortige  $\Delta$  die für die Wandung allein geltende cubische Dilatation. In dem numerischen Beispiele der Thermometerkugel von Neumann (§ 72) springt der erstere Werth zum letzteren wie 9 auf 4. Aber  $3\rho$  ohne Substitution für  $r$ , welches von  $a_1$  bis  $a$  alle Werthe haben kann, ist auch die ideale cubische Dilatation aller entsprechenden (voll gedachten) Hohlkugeln.

§ 6. Amagat bespricht hernach von dieser „Gleichung“ folgende Fälle:

$$1) \quad P_0 = 0 \text{ und } R = R_0 \text{ liefert } \frac{dV}{V} = \Delta' = -\frac{1}{E} \cdot \frac{(5 - 4\mu) R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} P_1$$

als cubische Compression des Hohlraumes im Cylinder (das daselbst fehlende  $E$  kann der Leser unschwer ergänzen).

Ich füge bei

$$\Delta = -\frac{3(1 - 2\mu)}{E} \cdot \frac{R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} P_1$$

als cubische Compression der Wandung des Cylinders. Der im vorigen Paragraph erwähnte Sprung mit 9 auf 4 bei der Hohlkugel ist beim Hohlcylinder gegeben durch

$$\Delta' : \Delta = (5 - 4\mu) : 3(1 - 2\mu), \text{ das heisst für } \mu = \frac{1}{4} = 8 : 3.$$

$$2) \quad P_1 = P_0 = P \text{ und } R = R_0 \text{ liefert } \Delta' = \Delta = -\frac{3(1 - 2\mu)}{E} P.$$

$$3) \quad P_1 = 0 \text{ und } R = R_1.$$

Diese zweite Substitution für das allgemeine  $R$  liefert, gewissermassen als zweite reelle Anwendung der idealen Formel, die cubische Dilatation des äusseren Cylinders

$$\Delta' = +\frac{1}{E} \cdot \frac{(5 - 4\mu) R_0^2}{R_1^2 - R_0^2} P_0.$$

( $E$  wiederum wie bei 1) zu ergänzen.)

Nennt man mit Amagat das innere Volum  $V_0$ , das äussere  $V_1$ , so ist bei gleicher Höhe der Cylinder in 1) und 3) und bei gleichem Drucke (beziehungsweise aussen und innen) die absolute Raumminderung von  $V_0$  gleich der absoluten Raummehrung von  $V_1$ . (Mit dem Worte „absolut“ ist  $dV$  gemeint, statt des sonst gebrauchten  $dV : V$ .)

\* Wobei aber dennoch der innere Druck  $D_1$  an  $a_1$  wirksam bleibt.

Der Nutzen dieser Substitution  $R = R_1$  leuchtet aus der Probe ein, die ich machte mit der Benutzung von  $\Delta$  für die Wandung allein und von  $\Delta'$  für den Hohlraum  $V_0$ . Es muss „absolut“, wenn man das letztangegebene  $\Delta'$  für  $V_1$  mit  $x$  bezeichnet und die Cylinderhöhe, sowie  $\pi$  und die Druckkraft weglässt:

$$0 \cdot R_1^2 = \underbrace{\frac{3(1-2\mu)R_0^2 + 2(1+\mu)R_1^2}{E(R_1^2 - R_0^2)}}_{\text{(Meh rung des Hohlraumes)}} \cdot R_0^2 + \underbrace{\frac{3(1-2\mu)R_0^2}{E(R_1^2 - R_0^2)}(R_1^2 - R_0^2)}_{\text{(Meh rung der Wandung)}}$$

welche Probe natürlich zutrifft.

Andere Substitutionen für das allgemeine  $R$  als diejenige von  $R_0$  und  $R_1$  haben ersichtlich keine praktische Bedeutung.

§ 7. Ich fahre noch fort mit dem zweiten Beispiele von Neumann (§ 69), siehe § 5 oben, für welches ich auch ohne die Beschränkung, dass der äussere Druck  $D = 0$  sei, die Hauptspannungen  $t_{11}$ ,  $t_{22}$ ,  $t_{33}$  berechnete im Hohlcyylinder (vergl. § 3 mit der Hohlkugel).

Dass die eine derselben wiederum  $\Pi$  ist, oder

$$\frac{D_1 a_1^2 - D a^2}{a^2 - a_1^2},$$

leuchtet von selbst ein. Die beiden anderen ergeben sich

$$\left. \begin{matrix} t_{22} \\ t_{33} \end{matrix} \right\} = \frac{D_1 a_1^2 \left(1 \mp \frac{a^2}{r^2}\right) - D a^2 \left(1 \mp \frac{a_1^2}{r^2}\right)}{a^2 - a_1^2}.$$

Für  $r = a_1$  wird  $t_{22} = -D_1$  und für  $r = a$  muss  $t_{22} = -D$  werden, wie vorauszusehen. Aber  $t_{33}$  wird im ersteren Falle

$$\frac{D_1(a^2 + a_1^2) - 2Da^2}{a^2 - a_1^2},$$

und im letzteren

$$\frac{2D_1 a_1^2 - D(a^2 + a_1^2)}{a^2 - a_1^2}.$$

Für einen Hochdruckdampfkessel mag  $D$  vergleichsweise Null gelten, so ist die im Innern desselben längs einer Mantellinie ihn zur Explosion bringen wollende Spannkraft:

$$\frac{a^2 + a_1^2}{a^2 - a_1^2} \cdot D_1.$$

§ 8. Diesen Ausdruck hat auch Neumann (gemäss der von mir im Eingange des § 7 erwähnten Beschränkung) und discutirt ihn an dem Beispiel einer von ihm untersuchten Spiegelglastafel. Das Buch nennt als „Elasticitätsmodul dieses Glases 1 320 000 Atmosphären, das heisst, wenn auf dieses Glas ein allseitiger Druck von  $n$  Atmosphären ausgeübt wurde, so betrug die lineare Zusammendrückung:

$$\delta = - \frac{n}{1\,320\,000}."$$

Wenn man unter Elasticitätsmodul nur das obige  $E$  und unter der zweiten Elasticitätsconstanten das obige  $\mu$  versteht\*, so ergibt sich

$$\frac{E}{1 - 2\mu} = 1\,320\,000,$$

und, wenn wiederum  $\mu = \frac{1}{4}$  angenommen wird,

$$E = 660\,000 \text{ Kilogramm durch Quadratcentimeter.}$$

„Nun zerbrach diese Glasplatte, als die lineare Dilatation 1 : 1440 betrug bei einseitiger Zusammendrückung“ und Neumann berechnet aus

$$\frac{n}{660\,000} = \frac{1}{1440},$$

„dass ein Druck oder Zug von wenigstens 400 Atmosphären nöthig wäre, um eine Spiegelglastafel zu zerreißen.“ Aus letzter Gleichung würde  $n = 460$ ; mit der kleineren Zahl 400 ist vielleicht dem Abstände zwischen Elasticitätsgrenze und dem Zerbrechen oder überhaupt der Sicherheit einige Rechnung getragen worden.

Das Ende von § 7 und der Anfang von § 8 liefern jetzt

$$D_1 = \frac{a^2 - a_1^2}{a^2 + a_1^2} \cdot 400 \text{ Atmosphären}$$

als theoretische Grenze der Kesselspannung, welche für  $a_1 = 6$  und  $a = 7,4$  beinahe 83 Atmosphären ist. Thatsächlich sprang eine solche zugeschmolzene Glasröhre bei 66 Atmosphären.

§ 9. Endlich noch Einiges über § 70 bis 74 von Neumann (zuerst erwähnt im § 1 oben):

§ 71 handelt von Oersted's Piezometer; Neumann zeigt, dass sowohl bei Hohlkugel- als Hohlcylinderform dasselbe  $\rho$  und dasselbe  $\Delta$  als lineare und cubische Zusammendrückung hervorgehen; ferner, dass dies auch bei voller Kugel- oder Cylinderform der Fall ist.

Man kann dies ohne Formel-Apparat hinschreiben. Es ist:

$$\Delta = 3 \cdot \frac{1 - 2\mu}{E}$$

(und  $\rho$  davon der 3. Theil) für die Spannkraft 1, gemäss dem viertletzten Absatze des § 2; und liegt auf der Hand, dass mit dem Piezometer die Differenz der Flüssigkeit- und Glas-Compression gemessen wird.

Der oben mitgetheilten Theorie (Rechnung) wegen citire ich noch zum Vergleiche § 6 Nr. 2.

Auch § 72 von Neumann (schon erwähnt am Schlusse von § 5) ist interessant; es wird das Sinken des Quecksilbers in einem Thermometer

---

\* Den Wunsch einer so fixirten Benennungsweise habe ich im Repert. d. Phys. v. J. 1888 ausgesprochen.

berechnet, wenn dasselbe aus der horizontalen in die vertikale Lage gebracht wird. Da kommt wiederum  $3\rho$  zur Geltung. Mit obigen Bezeichnungen ist in der horizontalen Lage  $D_1 = 0$  und  $D = 1$  Atmosphäre; aber Neumann sieht mit Recht zur Abkürzung der Rechnungsarbeit von letzterem Drucke ab.

Im § 73 „Spannung in der sphärischen Schale“ wird berechnet, was oben § 3 enthält; aber wiederum unter der speciellen Annahme  $D = 0$ .

§ 74 ist die letzte Anwendung der hierher gehörigen Formeln und handelt von der Compression einer Kugel, die von einer Kugelschale unmittelbar umgeben ist. Auch hier ist, wie im § 71, ohne Rechnung das dort gezogene Resultat vorauszusagen, dass es auf die Vergleichung von

$$\frac{1 - 2\mu}{E} \text{ innen mit } \frac{1 - 2\mu}{E}$$

in der Schale ankommt. Wenn letzterer Werth kleiner ist als der erstere, so schützt die Schale den Kern einigermaßen, im entgegengesetzten Falle aber nicht.

Hierbei bemerke ich noch zur Nomenclatur, wie bei der Anmerkung 7, dass, wenn man immerhin den reciproken Werth  $\frac{E}{1 - 2\mu}$  auch einen Elasticitätsmodul nennen wollte, stets der grössere Modul eine kleinere Elasticität bedeuten sollte. Ich erinnere an Eisen und Kautschuk; auch der Analogie vom Krümmungsradius und Krümmung könnte gedacht werden; Ersterer gross, heisst soviel, als dass Letzterer klein ist.

§ 75 bis 77 sind Zusätze des Herausgebers (Meyer) der Vorlesungen von Neumann. Bei der Torsion spielt der Torsions- oder Schubelastizitätsmodul eine Rolle, der aber als gleich  $\frac{1}{2} \cdot \frac{E}{1 + \mu}$  auch aus den zwei Constanten  $E$  und  $\mu$  zusammengesetzt ist.

### Drei Nachträge.

#### I.

Nach der Einsendung des Obigen erschien im Bd. 47 von Wied. Ann. S. 706 die Abhandlung von G. de Metz über die Compressibilität des Quecksilbers, welche zu gleicher Zeit wie diejenige von Amagat entstanden sei. Da hierin auch obige Formeln verwendet werden, so verglich ich dieselben und bemerke hierüber Folgendes:

Auf S. 714, 716, 717 wird die unrichtige Vorstellung erweckt, als ob Lamé in seinen *Leçons sur l'élasticité des corps solides* 1866 (nicht 1867) die Poisson'sche Annahme gemacht habe, dass die seitliche Contraction  $\frac{1}{4}$  der *Längsdilatation* sei. Lamé hat aber in seinen §§ 29 und 30 diese

Beschränkung ausdrücklich bei Seite gelegt. Regnault, den Metz hierbei citirt, mochte sie (im Jahre 1847) festgehalten haben und Metz greift sie für das Glas wieder auf, da das Mittel  $\sigma = 0,247$  sehr nahe an 0,250 komme. Indessen weist seine Tabelle (S. 724) Werthe von 0,33 bis 0,21 (von verschiedenen Beobachtern) und 0,237 bis 0,235 von ihm selbst auf.

S. 712 sagt Metz: „Es ist leicht, die nöthigen Gleichungen für cylindrische und sphärische Umhüllungen herzustellen.“ Gilt für Erstere  $\Delta U_0$ , für Letztere  $\Delta V_0$  als Volumzunahme bei bloß innerem Drucke, oder als Volumabnahme bei bloß äusserem Drucke, oder als solche bei innen und aussen gleichem Drucke, so „muss man für die Volumänderung eines complicirten Piezometers (Cylinder mit halbsphärischer Endung) die Hypothese hinzufügen“ (S. 716):

$$\Delta W_0 = \Delta U_0 + \Delta V_0,$$

welche man meines Erachtens durch Wahl einer vorwiegend cylindrischen oder kugeligen Form lieber vermeiden möchte. Es ist alsdann auch die Rechnung einfacher, wenn dieses Moment auch nur ein secundäres ist.

Im drittgenannten Falle, innen und aussen der gleiche Druck  $P$ , ist aber allgemein, abgesehen von der Form des Piezometers, die verhältnissmässige Volumabnahme des Hohlraumes gleich dem cubischen Compressibilitätscoefficienten  $x$  des Glases (der Wandmasse), wie beim Glaswürfel, der an den sechs Flächen mit  $P$  gedrückt wird (pro Flächeneinheit). So reproducirt Metz als Formel N, S. 718 (und als erste der zwölf Nummern\* am „Schluss“):

$$X_a = X_v - x,$$

worin  $X_a$  die scheinbare und  $X_v$  die wahre Compressibilität der Flüssigkeit ist.

Dem Schlusse (S. 742) entnehme ich für Quecksilber

$$X_v = 3,75 \cdot 10^{-6}$$

zwischen 3,74 und 3,79, und von S. 740 als Mittelwerth für Glas

$$x = 2,5 \cdot 10^{-6}$$

zwischen den Werthen 2,2 und 2,8, so dass

$$X_a = 1,3 \cdot 10^{-6},$$

oder fast  $\frac{1}{3}$  des vorletzten und  $\frac{1}{2}$  des letzten Werthes ist.

Lässt man mit dem Piezometer ein Kapillarrohr communiciren, so beobachtet man im vorigen Falle ein Sinken des Quecksilbers vermöge des Druckes  $P$  um  $\Theta''$ ; mit  $\Theta$  bezeichnet Metz das Sinken, wenn  $P$ , jetzt mit  $P_0$  bezeichnet, nur innen wirkt; und mit  $\Theta'$  das Steigen, wenn  $P$  als  $P_1$  nur aussen wirkt.

\* Ebenso sind noch mehrere dieser Nummern selbstverständlich oder enthalten Wiederholungen.

Es ist sofort, als Uebereinanderlagerung kleiner Wirkungen, also ohne die Rechnung von Metz auf S. 718 zu erkennen, dass

$$\Theta'' = \Theta - \Theta'$$

(Gleichung VI daselbst; bei dieser Rechnung werden auch solche Senkungen mit Volumänderungen  $\Delta W_0$  verwechselt).

Weil bei dem mit  $\Theta'$  bezeichneten Steigen der Flüssigkeit nur das Gefäss und nicht auch die Flüssigkeit (die Ersteres nicht ganz füllt) comprimirt wird, eignet sich dieser Vorgang zur Bestimmung des  $x$  allein, während das Sinken  $\Theta$  sowohl als auch dasjenige  $\Theta''$  mit  $X_0$  und  $x$  zu thun haben (siehe oben  $N$ ). Ersteres hat Metz in der Gleichung V ausgedrückt, die aber in eben besagter Weise fehlerhaft ist.

Ist einmal  $x$  bestimmt, so dient die Beobachtung von  $\Theta$  oder  $\Theta''$  zur Bestimmung von der wahren Flüssigkeitscompressibilität  $X_0$ , und zwar sieht man schon aus VI, dass  $\Theta$  als der grössere Werth gegenüber  $\Theta''$  den Vorzug verdient. Zur Vergleichung will ich beide noch für  $P_0 = 1$  und beziehungsweise  $P = 1$  hersetzen: Es entspricht die Senkung  $\Theta$  der Abnahme des Flüssigkeitsvolums ( $X_0 \cdot W_0$ ) plus der Ausweitung des Hohlraumes

$$\left( x \cdot U_0 \cdot \frac{M(3\lambda + 5\mu) + 3\lambda + 2\mu}{3\mu} + x V_0 \frac{N(3\lambda + 6\mu) + 3\lambda + 2\mu}{4\mu} \right),$$

$\Theta''$  derselben Abnahme des Flüssigkeitsvolums minus der Abnahme des Hohlraums ( $x \cdot W_0$  oder  $x U_0 + x V_0$ ); da

$$M = R_0^2 : (R_1^2 - R_0^2) \text{ und } N = R_0^3 : (R_1^3 - R_0^3)$$

und die beiden Constanten  $\lambda$  und  $\mu$ , durch den geläufigeren Elasticitätsmodul  $E$  und das oben genannte  $\sigma$  ausgedrückt sind

$$\lambda = \frac{E}{1 + \sigma} \cdot \frac{\sigma}{1 - 2\sigma}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \sigma)}$$

(der Schub- oder Torsions-Elasticitätsmodul), so ist das genannte Plus bei  $\Theta$  beträchtlicher als das Minus bei  $\Theta''$ . Je kleiner das Letztere, um so besser für  $\Theta''$ , wenn man daraus  $X_0$  bestimmen soll, da sonst zur genauen Beobachtung resp. Messung im letzteren Falle zu wenig übrig bleibt.

## II.

Lamé lässt in seiner Vorlesung XIV der Elasticitätsbetrachtung für den Hohlcyylinder die Transformation der allgemeinen Elasticitätsgleichungen nach Cylindercoordinaten vorangehen, und in XV führt er das Gleiche für sphärische Coordinaten durch, um in XVII die Hohlkugel vornehmen zu können. Aus diesem mathematischen Grunde geht bei ihm der Cylinder vor der Kugel, welch' Letztere aber nicht nur physikalisch, sondern ohne jene Transformationen auch mathematisch einfacher erscheint als der Erstere.

Im § 80 schreibt Lamé die für den Cylinderkessel gefährliche Kraft, *welche tangential im Innern und in der Querschnittsebene wirkt*,



$$A = \frac{PR^3 - P_1 R_1^3 + (P - P_1) R_1^3}{R_1^3 - R^3},$$

und bestimmt,  $A$  als zulässige Spannung bekannt voraussetzend

$$\frac{R_1}{R} = \sqrt{\frac{A + P}{A + P_1 - 2P}},$$

das ist annähernd gleich

$$1 + \frac{P - P_1}{A + P},$$

somit

$$R \cdot \frac{P - P_1}{A + P}$$

als Wandstärke. In diesem Resultate sind seine Gleichungen 24) und 25) vereinigt.

Da  $P$  in praktischen Fällen klein ist gegen  $A$ , so stimmt dieses Resultat auch mit dem auf elementare Weise erhältlichen (siehe z. B. mein Taschenbuch der Festigkeitslehre § 48,3).

Desgleichen stimmt die halbe Wandstärke des kugelförmigen Kessels im § 87.

§ 88 handelt vom Gleichgewicht der Elasticität für eine „Planetenkruste“, wobei noch die Gravitation in Rechnung gezogen wird. Ich verificirte daselbst seine Gleichung 18), welche in Folge Druckversehens mit 28) bezeichnet ist,

$$F_0 - F_1 = \frac{P_0 - P_1}{2} - \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{\rho g \epsilon}{2},$$

worin  $\rho$  die Masse des Volums 1 und  $\epsilon$  die Dicke der Kruste vorstellt;  $P_0$  sei der Druck des „flüssigen Kerns“,  $P_1$  der Luftdruck.

Er findet dann „par une transformation facile“

$$20) \quad F_0 - F_1 = - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \cdot \rho g \epsilon;$$

dazu müsste

$$P_0 - P_1 = \rho g \epsilon,$$

was aber nur für eine wässerige Hülle zutreffen würde.

Weiterhin stimmt seine Gleichung 21); aber von den mit 22) zusammengefassten Gleichungen kann ich nur diejenige

$$\frac{U_0}{r_0} - \frac{U_1}{r_1} = \frac{1}{4\mu} (P_0 - P_1 - \rho g \epsilon)$$

bestätigen. Hierin ist  $r_0$  der innere,  $r_1$  der äussere Radius,  $U_0$  die radiale Verschiebung innen,  $U_1$  aussen.

Man sieht jetzt nochmals ein, dass 20) unzulässig; denn gemäss der vorletzten Gleichung müsste in der letzten Null resultiren. Seine „letzte“ Gleichung 23) fällt hiermit ebenfalls fort.

## III.

Der kürzlich erschienene 2. Theil des 1. Bandes von Violle's Lehrbuch der Physik (deutsche Ausgabe)\* beginnt gerade auch mit der Compressibilität. Er bespricht u. A. die in meinem Nachtrag I erwähnten Versuche von Regnault und verweist auf die Theorie der Elasticität, die im ersten Theil des Buches die Seiten 358 bis 394 umfasst. Hier wird vorwiegend Lamé benutzt (siehe meinen Nachtrag II) und im § 149 die Hohlkugel behandelt. Aber mit einer wesentlichen Lücke, indem es heisst: Nun lässt sich aber leicht nachweisen\*\*, dass " die lineare Dilatation

$$\frac{\varrho}{r} = a + \frac{b}{r^3};$$

dies hätte, meines Erachtens, bei dem grossen Raum, den das Buch der Sache widmet, auch wirklich nachgewiesen werden können und sollen; man hätte den Platz hierzu auch da oder dort einsparen können.

In Gleichung 30) ist die cubische Dilatation des Hohlraumes, nicht „des Körpers“ der Hohlkugel, gemeint.

Die Gleichung 38) muss heissen  $\Delta u = \Delta v - \Delta w$ ; sie entspricht derjenigen  $\Theta'' = \Theta - \Theta'$  im obigen Nachtrage II.

Hiernach folgen noch im § 150 die Torsion des Cylinders und im § 151 die Biegung eines Stabes, welche Probleme der Herausgeber O. E. Meyer im Neumann'schen Buche auch unmittelbar auf die Hohlkugel-Aufgabe hatte folgen lassen. Ich erwähne dies anhänglich und gelegentlich auch

deswegen, weil Violle im § 150 schreibt  $\vartheta = \frac{lC}{\mu \frac{\pi}{2} r^4}$  und im § 156 noch-

mals ohne Rückverweis die Torsion behandelt und schreibt  $\Theta = \frac{1}{A} \cdot \frac{l}{r^4} \cdot C$  und endlich im § 157 wiederum  $\Theta = \frac{1}{\mu} \frac{lC}{B^4}$ .

---

\* Die ersten drei Lieferungen sind in der Literaturbeilage dieser Zeitschrift S. 31 angezeigt.

\*\* Vergl. den Anfang des dritten Absatzes in I. oben und einen Ausdruck im fünften Absatze von II.



collinear gesetzt werden, indem irgend einer der sechs Contingenzpunkte als Centrum und eine der beiden mit demselben correspondirenden Chordalen als Achse der Collineation dient.

Die zwölf Doppelverhältnisse dieser Collineationen sind aber keineswegs unabhängig von einander. Ist  $A$  ein Contingenzpunkt,  $B$  und  $C$  die Berührungspunkte einer durch  $A$  gehenden gemeinsamen Tangente mit  $K$  und  $K_1$ ,  $D$  und  $E$  die Schnittpunkte dieser Tangente mit dem zu  $A$  correspondirenden Chordalenpaar: so werden die Punkte  $B$  und  $C$  als Doppelpunkte der vom Büschel von  $K$  und  $K_1$  auf der Tangente erzeugten Involution, von  $D$  und  $E$  harmonisch getrennt (cfr. Salmon, Analytische Geometrie der Kegelschnitte, 4. Aufl., S. 412). Daraus folgt:

$$\text{Doppelverhältniss } (ABDC) = - (ABEC).$$

Das Doppelverhältniss der Collineation wechselt daher sein Zeichen, wenn eine Chordale durch die mit ihr zusammengehörige ersetzt wird; dasselbe gilt für die Vertauschung zweier zusammengehöriger Contingenzpunkte und beide Operationen zusammen führen auf den ursprünglichen Werth des Doppelverhältnisses zurück.

Es mögen sich nun  $K$  und  $K_1$  im Punkte  $A$  mit Tangente  $v$  berühren. Die Verbindungslinie der beiden nicht in  $A$  fallenden Schnittpunkte von  $K$  und  $K_1$  nennen wir kurz Schnittpunktsgerade und den Schnittpunkt der nicht in  $v$  fallenden gemeinsamen Tangenten Tangentenschnittpunkt. Wir denken uns jetzt  $A$  als Centrum und die Schnittpunktsgerade als Achse einer perspectivischen Collineation. Ferner sei  $K_2$  ein dritter Kegelschnitt, welcher  $v$  in  $A$  berührt;  $C$  sei der Schnittpunkt der Schnittpunktsgeraden  $v_1$  von  $K$  und  $K_1$  mit derjenigen  $v_2$  von  $K_1$  und  $K_2$ . Ausser in  $A$  schneide die Gerade  $AC$  noch  $K$  in  $B_1$ ,  $K_1$  in  $D$ ,  $K_2$  in  $B_2$ . Dann ist  $(AB_1CD)$  das Doppelverhältniss der perspectivischen Collineation von  $K$  und  $K_1$ ,  $(AB_2CD)$  dasjenige von  $K_2$  und  $K_1$ . Es werde jetzt noch vorausgesetzt, dass  $K$  und  $K_2$  sich in  $A$  osculiren (von der zweiten Ordnung berühren) und ausserdem noch im Punkt  $B$  schneiden. Nun sind  $K$ ,  $K_1$  und  $K_2$  drei Kegelschnitte, welche eine Chordale, nämlich  $v$ , gemeinsam haben und deshalb gehen die drei Schnittpunktsgeraden  $AB$ ,  $v_1$  und  $v_2$  durch denselben Punkt  $C$  (cfr. Seeger a. a. O. S. 142); die Punkte  $B_1$  und  $B_2$  fallen mithin mit  $B$  zusammen. Das Doppelverhältniss der perspectivischen Collineation bleibt also ungeändert, wenn  $K$  durch  $K_2$  ersetzt wird; ebenso kann auch  $K_1$  durch einen in  $A$  osculirenden Kegelschnitt  $K_3$  ersetzt werden.

Man hat daher folgenden Hilfssatz:

Wenn sich zwei Kegelschnitte berühren, so bleibt das Doppelverhältniss der perspectivischen Collineation mit dem Berührungspunkt als Centrum und der Schnittpunktsgeraden als Achse unverändert, wenn jeder





die Schnittpunkte von  $AB$  resp. mit  $K_1$ , mit der Schnittpunktsgeraden und mit  $CC_1$ ;  $G$  der Schnittpunkt der Berührungstangente und der Schnittpunktsgeraden;  $H$  und  $J$  die Schnittpunkte von  $BC$  mit der Berührungstangente und der Schnittpunktsgeraden. Weil  $GA$  und  $GJ$  zusammengehörige Chordalen, so ist nach dem oben bewiesenen Satz (Salmon a. a. O. S. 412) harmonisch:

$$SB.G, CHBJ;$$

also auch:

$$\text{Doppelverhältniss } (BAFE) = -1;$$

ferner ist:

$$" \quad (ABED) = \delta$$

das Krümmungsradien-Verhältniss von  $K$  und  $K_1$ . Hieraus folgt:

$$\text{Doppelverhältniss } (ABFD) = \frac{1}{2}(\delta + 1).$$

Nun ist  $B$  ein Punkt von  $\Phi_{01}$ ,  $D$  ein Punkt von  $K_1$ ,  $CC_1$  Schnittpunktsgerade von  $\Phi_{01}$  und  $K_1$ ; also ist

$$\frac{1}{2}(\delta + 1)$$

das Krümmungsradien-Verhältniss von  $\Phi_{01}$  und  $K_1$  oder:

Sind  $r$  und  $r_1$  die Krümmungsradien von  $K$  und  $K_1$  in  $A$ , so ist daselbst der Krümmungsradius von  $\Phi_{01}$ :

$$2) \quad r_{01} = \frac{1}{2}(r + r_1),$$

das heisst das arithmetische Mittel.

Durch ähnliche Ueberlegungen findet man den Krümmungsradius von  $F_{01}$  in  $A$ :

$$3) \quad \rho_{01} = \frac{2rr_1}{r + r_1},$$

das heisst das harmonische Mittel.

Der Ort der Pole der Tangenten von  $K$  in Bezug auf  $K_1$ , die Polarcurve von  $K$  in Bezug auf  $K_1$ , ist (cfr. Steiner-Schröter, „Die Theorie der Kegelschnitte“ S. 145) ein Kegelschnitt  $P_{01}$ , welcher  $K_1$  in den Berührungspunkten mit den gemeinsamen Tangenten von  $K$  und  $K_1$  schneidet.

Berühren sich wieder  $K$  und  $K_1$  in  $A$  mit Tangente  $v$ , ist ferner  $B$  der Tangentenschnittpunkt,  $C$  und  $D$  die Schnittpunkte von  $AB$  mit  $K$  und  $K_1$ ,  $w$  die Tangente an  $K$  in  $C$ ,  $E$  ihr Pol in Bezug auf  $K_1$ ;  $F$  Schnitt von  $AB$  mit der Polare von  $B$  in Bezug auf  $K_1$ ;  $G$  Schnittpunkt der Schnittpunktsgeraden und der Berührungstangente. Alsdann ist  $G$  Pol von  $AB$  in Bezug auf  $K$  und in Bezug auf  $K_1$ ; daher geht  $w$  durch  $G$  und ihr Pol  $E$  in Bezug auf  $K_1$  liegt auf  $AB$ .

Nun ist: Doppelverhältniss  $(CAED) = -1$ ,  
 „  $(AFDB) = -1$ ,  
 ferner: „  $(BCAD) = \delta$

als Doppelverhältniss der Collineation mit dem Tangentenschnittpunkt als Centrum und der Berührungstangente als Achse.

Daraus folgt: Doppelverhältniss  $(AEFD) = \frac{1}{\delta}$ .

Nun ist aber  $E$  ein Punkt von  $P_{01}$  und die durch  $F$  gehende Polare von  $B$  in Bezug auf  $K_1$  ist Schnittpunktsgerade von  $P_{01}$  und  $K_1$ , daher ist  $(AEFD)$  das Krümmungsradien-Verhältniss von  $P_{01}$  und  $K_1$  oder:

Der Krümmungsradius von  $P_{01}$  in  $A$  ist:

$$4) \quad R_{01} = \frac{r_1^2}{r}$$

die dritte Proportionale.

Ebenso ist der Krümmungshalbmesser der Polarcurve  $P_{10}$  von  $K_1$  in Bezug auf  $K$

$$5) \quad R_{10} = \frac{r^2}{r_1}.$$

Weitere Untersuchungen führen auf merkwürdige projectivische Eigenschaften, welche an bestimmte Werthe des Krümmungsradien-Verhältnisses im Berührungspunkt zweier Kegelschnitte geknüpft sind.

3. Der Werth  $\delta = 1$  liefert natürlich die Osculation. Gleichung 1) giebt in diesem Fall wirklich die Relation

$$H_0 H_1 - D_{01} D_{10} = 0,$$

welche zusammen mit der Berührungsinvariante

$$6 H_0 D_{01} D_{10} H_1 - 4 D_{01}^3 H_1 - 4 H_0 D_{10}^3 + 3 D_{01}^2 D_{10}^2 - H_0^2 H_1^2 = 0$$

die bekannte Relation der Osculation

$$\frac{H_0}{D_{01}} = \frac{D_{01}}{D_{10}} = \frac{D_{10}}{H_1}$$

liefert.

4. Von besonderem Interesse ist der Fall  $\delta = -1$ , also Krümmungsradien gleich und entgegengesetzt gerichtet; wir nennen das kurz symmetrische Berührung.

Die perspectivische Collineation ist eine involutorische.

Verlegt man das Centrum der Collineation aus dem Berührungspunkt in den Tangentenschnittpunkt, so wird das Doppelverhältniss gleich  $+1$ , das Centrum fällt auf die Achse, das heisst:

Bei symmetrischer Berührung zweier Kegelschnitte liegen Tangentenschnittpunkt und Schnittpunktsgerade in vereinigter Lage.



Es mögen sich nun  $K$  und  $K_1$  in  $A$  symmetrisch berühren;  $B$  sei Tangentenschnittpunkt,  $C$  Schnittpunkt der Berührungstangente mit der Schnittpunktgeraden;  $u$  eine gemeinsame Tangente,  $D$  ihr Schnittpunkt mit  $AC$ ;  $E$  und  $F$  ihre Berührungspunkte mit  $K$  und  $K_1$ ; ferner  $D'$ ,  $E'$ ,  $F'$  dieselben Punkte in Bezug auf die andere gemeinsame Tangente  $u'$ ; endlich  $G$  Schnittpunkt von  $AB$  und  $EE'$ . Weil  $AB$  Polare von  $C$  in Bezug auf  $K$ , so ist  $PR(CEGE')$  harmonisch, daher auch harmonisch  $SB.B$ ,  $CDAD'$ . Nach dem schon mehrfach verwendeten Satz (Salmon a. a. O. S. 412) ist auch harmonisch  $SB.C$ ,  $BEDF$  und da beide Strahlenbüschel perspectivisch liegen, müssen die Punkte  $E$ ,  $A$ ,  $F'$  in einer Geraden sich befinden und dasselbe beweist man von den Punkten  $E'$ ,  $A$ ,  $F$ . Weil aber die Punkte  $A$ ,  $E$ ,  $E'$ ,  $F$ ,  $F'$  sämtlich dem Kegelschnitt  $\Phi_{01}$  angehören, folgt der Satz:

Bei symmetrischer Berührung zweier Kegelschnitte zerfällt der covariante Kegelschnitt  $\Phi_{01}$  in ein Geradenpaar mit Mittelpunkt im Berührungspunkt, harmonisch getrennt durch Berührungstangente und Tangentenschnittpunkt.

Dualistisch hierzu ergibt sich, dass der Kegelschnitt  $F_{01}$  zerfällt in ein Punktepaar auf der Berührungstangente, harmonisch getrennt durch Berührungspunkt und Schnittpunktgerade.

Die aus Gleichung 1) folgende Bedingung für  $\delta = -1$ :

$$9 D_{01} D_{10} = H_0 H_1$$

stimmt mit der bei Salmon (a. a. O., S. 531) angegebenen für das Zerfallen von  $\Phi_{01}$  und  $F_{01}$  überein.

5. Es sei  $\delta = 2$ .

Ist  $u$  ein Strahl durch den Berührungspunkt  $A$ ;  $B$ ,  $C$ ,  $D$  seine Schnittpunkte mit  $K$ ,  $K_1$  und der Schnittpunktgeraden, so ist:

$$\text{Doppelverhältniss } (ABDC) = 2,$$

daher

$$, \quad (ADBC) = -1,$$

somit: Hat ein Strahlenbüschel seinen Scheitel auf einem Kegelschnitt und bestimmt man auf jedem Strahl den zu seinem Schnittpunkt mit einer Geraden conjugirten Punkt, so liegen diese Punkte auf einem Kegelschnitt, welcher den gegebenen Kegelschnitt in seinen Schnittpunkten mit der Geraden trifft und im Scheitel jenes Strahlenbüschels berührt, wobei sein Krümmungsradius im Berührungspunkt die Hälfte desjenigen des gegebenen Kegelschnitts ist: eine Verallgemeinerung des bekannten, elementaren Satzes:

Der Ort der Halbirungspunkte aller durch den Endpunkt eines Kreisradius gehenden Sehnen ist der Kreis über dem Radius (vergl. Salmon a. a. O. S. 179).

6. Für  $\delta = -2$  folgt aus 2):

$$r_{01} = -\frac{r_1}{2},$$

und aus 4):

$$R_{01} = -\frac{r_1}{2},$$

also osculiren sich in  $A$  die covarianten Kegelschnitte  $\Phi_{01}$  und  $P_{01}$ ; sie haben aber auch noch die beiden Punkte gemeinsam, in welchen die gemeinsamen Tangenten an  $K$  und  $K_1$  letzteren berühren. Also fällt  $\Phi_{01}$  mit  $P_{01}$  zusammen. Ist nun  $v$  eine beliebige Tangente von  $K$ ,  $V$  ihr Pol in Bezug auf  $K_1$ , so ist  $V$  ein Punkt von  $P_{01}$ , gehört daher, wie eben gezeigt wurde, auch  $\Phi_{01}$  an; deshalb sind die beiden von  $V$  an  $K$  gehenden Tangenten  $v_1$  und  $v_2$  conjugirt in Bezug auf  $K_1$ ; also ist  $v, v_1, v_2$  ein  $K$  umschriebenes Polardreieck in Bezug auf  $K_1$ . Die Existenz eines solchen ist ein Kriterium dafür, dass  $K$  als Strahlencurve und  $K_1$  als Punktcurve sich in harmonischer Lage befinden (Salmon a. a. O. S. 514).

Berühren sich daher zwei Kegelschnitte so, dass das Krümmungsradien-Verhältniss im Berührungspunkt gleich  $-2$  ist, so befinden sie sich in harmonischer Lage. Die analytische Bedingung ist

$$D_{01} = 0.$$

7. In seiner Abhandlung: „Ueber die (cubisch-)involutorische Lage sich berührender Kegelschnitte“ (Wiener Akad. Ber. Bd. 83, 2. Abth., S. 63) hat Herr Professor E. Weyr den Satz bewiesen:

Wenn sich zwei Kegelschnitte berühren und es ist ein Dreieck dem einen ein-, dem anderen umbeschrieben, so verhalten sich die Krümmungen im Berührungspunkt wie 1 : 4.

Dieser Satz kann aus der Umkehrung des vorhin unter 6. bewiesenen unmittelbar gefolgert werden:

Es berühren sich  $K$  und  $K_1$  in  $A$  mit Tangente  $v$ , das Dreieck  $BCD$  sei  $K$  einbeschrieben und  $K_1$  umbeschrieben. Dann giebt es immer einen Kegelschnitt  $K_2$ , für welchen  $BCD$  Polardreieck ist, und welcher  $v$  in  $A$  berührt. Sind nun  $\varrho, \varrho', \varrho''$  die Krümmungsradien von  $K, K_1, K_2$  in  $A$ , so hat man:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varrho'' = -2\varrho \\ \varrho'' = -\frac{1}{2}\varrho' \end{array} \right\}$$

daher:

$$\frac{\varrho}{\varrho'} = \frac{1}{4}.$$

8. Haben drei Kegelschnitte  $K, K_1$ , und  $K_2$ , welche sich alle in  $A$  berühren, die Krümmungsradien  $r, r_1$  und  $r_2$  in der Art, dass

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 0 \text{ (Krümmungssumme Null),}$$

so folgt aus 3), dass

$$\frac{\varrho_{01}}{r_2} = -2,$$

das heisst,  $F_{01}$  und  $K_2$  liegen als Strahlencurve und Punktcurve harmonisch. Es verschwindet somit die Invariante, welche ich Mathem. Ann. 36, S. 113,  $L_{012}$  genannt habe und welche Salmon (a. a. O. S. 557) als  $\Theta_{123}$  erwähnt.

Besteht dagegen die Relation:

$$r + r_1 + r_2 = 0 \text{ (Krümmungsradien-Summe Null),}$$

so liegen nach 2)  $\Phi_{01}$  und  $K_2$  als Punkt- und Strahlencurve harmonisch, es verschwindet mithin die Invariante  $\Lambda_{012}$  meiner Abhandlung, von Salmon mit  $\Phi$  bezeichnet.

9. In der erwähnten Schrift von Herrn Cranz (S. 50) findet sich ein Satz, der meines Wissens zuerst von Umpfenbach („Ein Lehrsatz von Kegelschnitten“, Crelle's Journ. Bd. 30 S. 95) bewiesen wurde:

Gehen von einem Punkte  $C$  an einen Kegelschnitt  $K$  die Tangenten mit den Berührungspunkten  $A$  und  $B$ , so verhalten sich die Krümmungsradien in  $A$  und  $B$  wie  $AC^3 : BC^3$ .

Von diesem Satze kann folgende Anwendung gemacht werden:

Es berühre noch ein zweiter Kegelschnitt  $K_1$  den ersten  $K$ , sowohl in  $A$  als auch in  $B$ . Sind nun  $r$  und  $\varrho$  die Krümmungsradien von  $K$  in  $A$  und  $B$ ,  $r_1$  und  $\varrho_1$  diejenigen von  $K_1$  in denselben Punkten, so ist nach obigem Satz:

$$AC^3 : BC^3 = r : \varrho,$$

aber auch

$$= r_1 : \varrho_1,$$

somit

$$\frac{r}{r_1} = \frac{\varrho}{\varrho_1},$$

das heisst:

Das Krümmungsradien-Verhältniss ist bei zwei sich doppelt berührenden Kegelschnitten in beiden Berührungspunkten dasselbe.

Dieser Satz ist von Herrn Professor Weyr in der oben genannten Abhandlung, aber nur für das specielle Krümmungsradien-Verhältniss 1 : 4 bewiesen worden.

Für jedes Krümmungsradien-Verhältniss wäre er am einfachsten folgendermassen zu beweisen:

Berühren sich  $K$  und  $K_1$  in  $A$  und  $B$  mit den Tangenten  $v$  und  $w$ , so ist das Krümmungsradien-Verhältniss in  $A$  das Doppelverhältniss der Collineation mit  $A$  als Centrum und  $w$  als Achse, das Krümmungsradien-Verhältniss in  $B$  dasjenige der Collineation mit  $B$  als Centrum und  $v$  als

Achse. Diese Doppelverhältnisse sind gleich, weil  $A$  und  $B$  zusammengehörige Contingenzpunkte,  $v$  und  $w$  zusammengehörige Chordalen sind.

10. Die Veranlassung zu der vorliegenden Abhandlung gab die Entdeckung, dass die Hesse'sche Curve in einem Berührungsknoten (Selbstberührungspunkt) zwar gewöhnlich einen dreifachen Punkt hat, jedoch einen vierfachen bekommt, wenn das Krümmungsradien-Verhältniss der beiden Zweige des Berührungsknotens den Werth  $-1$  annimmt (Mathem. Ann. 36 S. 119). Ebenso hat die Hesse'sche Curve im dreifachen Selbstberührungspunkt im Allgemeinen einen sechsfachen, dann aber einen siebenfachen Punkt, wenn die Krümmungssumme in den Zweigen der Grundcurve Null ist.

11. Der Satz von der Invarianz des Krümmungsradien-Verhältnisses in der Ebene lässt folgende Anwendung auf die Geometrie des Raumes zu:

Wenn sich zwei Flächen zweiter Ordnung  $O$  und  $O_1$  in einem Punkt  $A$  mit Tangentialebene  $E$  berühren und man legt durch eine Tangente  $v$ , welche in  $E$  durch  $A$  geht, alle möglichen Ebenen, so schneiden diese  $O$  und  $O_1$  in Kegelschnittpaaren, welche sich in  $A$  berühren. Aus dem Satz von Meünier (Cranz a. a. O. S. 68) folgt, dass das Krümmungsradien-Verhältniss in  $A$  für alle diese Kegelschnittpaare constant  $= \delta$  sein muss. Die Schnittpunktsgersten der Kegelschnittpaare sind Sehnen der Durchschnittscurve von  $O$  und  $O_1$  und schneiden alle die Gerade  $v$ , welche als Tangente ebenfalls eine Sehne dieser Curve ist. Daher erzeugen (cfr. Reye Geom. der Lage II, S. 150) diese Schnittpunktsgersten eine Regelfläche zweiter Ordnung  $O_2$ , welche dem Büschel von  $O$  und  $O_1$  angehört. Nennt man Doppelverhältniss von vier Flächen zweiter Ordnung eines Büschels das Doppelverhältniss ihrer Schnittpunkte mit einer Geraden, welche durch einen Punkt der Grundcurve des Büschels gezogen ist — und zwar darf das (cfr. Reye a. a. O. II, S. 162) in beliebiger Richtung geschehen —, so ist das Doppelverhältniss, welches  $O_2$  und der doppelt zählende Kegel des Büschels mit  $O_1$  und  $O$  bilden, gerade gleich  $\delta$ . Eine andere Tangente  $v'$  führt auf eine andere Regelfläche  $O_3$  mit dem Doppelverhältniss  $\delta'$ . Weil aber im Büschel im Allgemeinen auch Nichtregelflächen vorkommen, welche nicht von reellen Schnittpunktsgersten erzeugt werden, so muss es auch Werthe von  $\delta$  geben, die nicht als Krümmungsradien-Verhältnisse von Kegelschnittpaaren auftreten können, welche von den Schnittebenen durch die Tangenten erzeugt werden. Als Maximum und Minimum von  $\delta$  sind die beiden Doppelverhältnisse zu betrachten, welche den beiden einfachen Kegeln des Büschels, die ihre Spitzen in  $E$  haben, zukommen. Die für das Krümmungsradien-Verhältniss möglichen Werthe liegen zwischen diesen Grenzen und zwar mit Einschluss oder mit Ausschluss des Unendlichen, je nachdem  $O$  Regelfläche oder Nichtregelfläche ist. Da ferner jede Regelfläche durch zwei Schaaren von Geraden erzeugt wird, so gehören zu jedem Werth von  $\delta$  zwischen diesen Grenzen zwei Tangenten in  $A$  derart, dass

die Schnitte durch sie das Krümmungsradien-Verhältniss  $\delta$  haben. Der doppelt zählende Kegel des Büschels entspricht dem Werth  $\delta = +1$ ; er wird erzeugt durch die Schnittpunktsgersten der Paare von sich osculirenden Kegelschnitten, welche von Ebenen durch die Tangenten der Durchschnittscurve von  $O$  und  $O_1$  in  $A$  ausgeschnitten werden.

Es erübrigt nun noch, den Einfluss der speciellen Fälle bei der Berührung von zwei Flächen zweiter Ordnung (cfr. Clebsch-Lindemann, Vorl. über Geometrie II, S. 219 fig.) auf das Krümmungsradien-Verhältniss im Berührungspunkt anzugeben. Für das Letztere kommen vier besondere Möglichkeiten in Betracht:

a) Der Werth  $+1$  ist Maximum oder Minimum von  $\delta$ ; alsdann hat die Durchschnittscurve eine Spitze (sie kann aber auch in zwei sich berührende Kegelschnitte oder in einen doppelt zählenden Kegelschnitt, längs dessen sich  $O$  und  $O_1$  berühren, zerfallen).

b) Wenn  $\delta$  jeden beliebigen Werth annehmen kann, in welchem Fall sich im Büschel nur Regelflächen vorfinden, so zerfällt die Schnittcurve in eine Raumcurve dritter Ordnung und in eine Gerade, welche Sehne oder Tangente dieser Raumcurve ist. Im ersteren Fall berühren sich  $O$  und  $O_1$  in zwei Punkten einer Erzeugenden. (Berühren sich dagegen  $O$  und  $O_1$  in zwei beliebigen Punkten, so hat  $\delta$  in beiden Punkten ein Maximum und ein Minimum und es giebt auch Nichtregelflächen im Büschel.)

c) Hat  $\delta$  für alle Schnitte einen constanten, von der positiven Einheit verschiedenen Werth, so schneiden sich  $O$  und  $O_1$  in einem Geradenpaar und einem Kegelschnitt, der ebenfalls in ein Geradenpaar zerfallen kann.

d) Hat endlich  $\delta$  für alle Schnitte den constanten Werth  $+1$ , so schneiden sich  $O$  und  $O_1$  in einem Geradenpaar und einem durch dessen Mittelpunkt gehenden Kegelschnitt oder in einer Doppelgeraden und zwei windschiefen dieselbe schneidenden Geraden oder in einem doppelt zählenden Geradenpaar.

Indem ich weitere Untersuchungen im Raum einer besonderen Darstellung vorbehalte, bemerke ich noch, dass der von Herrn Mehmke zuerst ohne Beweis mitgetheilte (Zeitschr. f. Mathem. u. Physik Bd. XXXVI S. 56) und später mittelst Infinitesimalrechnung bewiesene Satz (a. a. O. S. 206 fig.): „Osculiren sich zwei Raumcurven in einem Punkt, so ist das Verhältniss der Krümmungen in demselben eine projectivisch unzerstörbare Grösse“, eine unmittelbare Folge der Invarianz des Krümmungsradien-Verhältnisses in der Ebene ist.

12. Zum Schluss ist es nicht ohne Interesse, für zwei in beliebiger Lage befindliche Kegelschnitte die Gleichung für die bei den in 1. erwähnten zwölf perspectivischen Collineationen auftretenden Doppelverhältnisse aufzustellen. Wir bedienen uns hierzu der symbolischen Rechnungsmethode (Clebsch-Lindemann, Vorl. über Geometrie I, S. 187 fig.) und wissen

bereits, dass wir eine in den Quadraten der Doppelverhältnisse cubische Gleichung erhalten müssen.

Die Gleichungen der Kegelschnitte seien :

$$\alpha_x^2 = 0$$

$$\text{und} \quad \alpha'_x{}^2 = 0.$$

$$\text{Ist} \quad v_x = 0$$

eine gemeinsame Tangente, so sind die doppelt zählenden Berührungspunkte auf derselben resp.

$$(\alpha v u)^2 = 0$$

$$\text{und} \quad (\alpha' v u)^2 = 0.$$

$$\text{Dann ist} \quad (\alpha v u)^2 + \lambda (\alpha' v u)^2 = 0$$

die Gleichung der Spuren eines Chordalenpaaars, wenn  $\lambda$  eine Wurzel der Gleichung :

$$6) \quad H_1 \lambda^3 + 3 D_{10} \lambda^2 + 3 D_{01} \lambda + H_0 = 0,$$

wo  $H_1$ ,  $D_{10}$ ,  $D_{01}$ ,  $H_0$  dieselbe Bedeutung, wie in Gleichung 1) haben.

Nennt man (cfr. Seeger a. a. O. S. 4) Exponent eines Punktes in Bezug auf die Berührungspunkte sein Abstandsverhältniss von denselben, so sind:

$$\pm \sqrt{\lambda_1}, \quad \pm \sqrt{\lambda_2}, \quad \pm \sqrt{\lambda_3},$$

wo  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  die Wurzeln von 6) sind, die Exponenten der Spuren der drei Chordalenpaare. Ferner seien  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$  die Exponenten der zu denselben correspondirenden auf  $v$  liegenden Contingenzpunkte.

Weil aber zwei zusammengehörige Chordalen von zwei Contingenzpunkten, welche weder unter sich, noch mit jenen correspondiren, harmonisch getrennt werden, so ist:

$$\lambda_1 = \mu_2 \mu_3,$$

$$\lambda_2 = \mu_3 \mu_1,$$

$$\lambda_3 = \mu_1 \mu_2,$$

daher:

$$\mu_1^2 = \frac{\lambda_2 \lambda_3}{\lambda_1},$$

$$\mu_2^2 = \frac{\lambda_3 \lambda_1}{\lambda_2},$$

$$\mu_3^2 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_3}.$$

Daher sind die Quadrate der Doppelverhältnisse der Collineationen:

$$\delta_1^2 = \frac{\mu_1^2}{\lambda_1} = \frac{\lambda_2 \lambda_3}{\lambda_1^2},$$

$$\delta_2^2 = \frac{\mu_2^2}{\lambda_2} = \frac{\lambda_3 \lambda_1}{\lambda_2^2},$$

$$\delta_3^2 = \frac{\mu_3^2}{\lambda_3} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_3^2}.$$

Die Gleichung der Quadrate der Doppelverhältnisse hat also zu Wurzeln die Wurzeln der Gleichung 6) paarweise multiplicirt und durch das Quadrat der dritten dividirt.

Sie lautet daher:

$$7) \begin{cases} H_0^2 H_1^2 \delta^6 - 3(9 D_{01}^3 H_1 - 9 H_0 D_{01} D_{10} H_1 + H_0^2 H_1^2) \delta^4 \\ + 3(9 H_0 D_{10}^3 - 9 H_0 D_{01} D_{10} H_1 + H_0^2 H_1^2) \delta^2 - H_0^2 H_1^2 = 0. \end{cases}$$

Das Product der Quadrate der Doppelverhältnisse ist also Eins.

Eine Wurzel  $\delta^2$  ist gleich 1, das heisst, ein Chordalenpaar geht durch die correspondirenden Contingenzpunkte, wenn:

$$H_0 D_{10}^3 = D_{01}^3 H_1.$$

Alle Chordalen gehen durch correspondirende Contingenzpunkte, wenn:

$$\begin{cases} D_{01} = 0 \\ D_{10} = 0 \end{cases}.$$

Die Discriminante der cubischen Gleichung 7) in  $\delta^2$  ist:

$$8) \begin{cases} (6 H_0 D_{01} D_{10} H_1 - 4 D_{01}^3 H_1 - 4 H_0 D_{10}^3 + 3 D_{01}^2 D_{10}^2 - H_0^2 H_1^2) \\ \times (3 D_{01}^2 D_{10}^2 - D_{01}^3 H_1 - H_0 D_{10}^3)^2 = 0. \end{cases}$$

Aus

$$\delta_1^2 = \delta_2^2$$

folgt

$$\lambda_1^3 = \lambda_2^3,$$

daher auch:

$$\mu_1^3 = \mu_2^3.$$

Wenn also zwei Wurzeln von 7) einander gleich sind, so ist das Doppelverhältniss, welches auf einer gemeinsamen Tangente zwei bestimmte Contingenzpunkte mit den Berührungspunkten bilden, eine dritte Wurzel der positiven Einheit; eine der zum ersten correspondirenden Chordalen und eine der zum zweiten correspondirenden bilden mit den Berührungspunkten ein Doppelverhältniss gleich einer sechsten Wurzel der positiven Einheit. Hierin ist der Fall der Berührung [erster Factor von 8)] mit inbegriffen; der zweite Factor von 8) bezieht sich auf die complexen Einheitswurzeln. Wenn er verschwindet, liegt eine Chordale und eine bestimmte nicht correspondirende und alsdann ebenso die mit jener zusammengehörende und die mit dieser zusammengehörende äquianharmonisch zu den Berührungspunkten auf den gemeinsamen Tangenten.

# Kleinere Mittheilungen.

---

## VII. Eine einfache Berechnung des Siebzehnecks.

Im Folgenden werden nur zwei goniometrische Formeln benutzt, nämlich:

$$1) \quad \cos^2 \beta = \frac{1 + \cos 2\beta}{2} \quad \text{und} \quad \cos(\pi - \beta) = -\cos \beta.$$

Mittelst derselben lässt sich das reguläre Siebzehneck auf sehr einfache Weise folgendermassen berechnen.

Der ersten Formel gebe ich die Gestalt:

$$2) \quad (2 \cos \beta)^2 = 2 + (2 \cos 2\beta)$$

und wende sie auf die Ausdrücke

$$3) \quad \begin{cases} a_1 = 2 \cos \frac{1}{17} \pi, & a_2 = 2 \cos \frac{2}{17} \pi, \\ a_4 = 2 \cos \frac{4}{17} \pi, & a_8 = 2 \cos \frac{8}{17} \pi \end{cases}$$

an; so ist

$$a_1^2 = 2 + a_2, \quad a_2^2 = 2 + a_4, \quad a_4^2 = 2 + a_8,$$

und

$$a_8^2 = 2 + 2 \cos \frac{16}{17} \pi = 2 - \left( 2 \cos \frac{1}{17} \pi \right) = 2 - a_1,$$

es ergeben sich also zwischen diesen vier Grössen vier Gleichungen:

$$4) \quad \begin{cases} a_8^2 = 2 - a_1 \\ a_2^2 = 2 + a_4 \end{cases} \quad \left| \quad \begin{cases} a_4^2 = 2 + a_8 \\ a_1^2 = 2 + a_2 \end{cases} \right.$$

Man bemerkt sofort, dass die Unbekannten in zwei Gruppen zerfallen,  $a_1, a_4$  und  $a_2, a_8$ . Ich führe neue Unbekannte  $x$  und  $y$  ein, nämlich:

$$5) \quad \begin{cases} a_1 - a_4 = x_1 \\ a_1 \cdot a_4 = y_1 \end{cases} \quad \left| \quad \begin{cases} a_2 + a_8 = x_2 \\ a_2 \cdot a_8 = y_2 \end{cases} \right.$$

Aus Nr. 4 findet sich:

$$a_2^2 - a_8^2 = a_1 + a_4, \quad a_1^2 - a_4^2 = a_2 - a_8.$$

Dies wird multiplicirt und gehoben:

$$(a_1 - a_4)(a_2 + a_8) = 1,$$

das ist:

$$6) \quad x_1 \cdot x_2 = 1.$$



Aus Nr. 4 findet sich weiter

$$4 - a_8^2 = 2 + a_1, \quad 4 - a_4^2 = 2 - a_8, \quad 4 - a_2^2 = 4 - a_4, \quad 4 - a_1^2 = 2 - a_2.$$

Dies wird multiplicirt und gehoben:

$$(2 + a_8)(2 + a_4)(2 + a_2)(2 - a_1) = 1,$$

das ist nach Nr. 4:

$$a_1^2 \cdot a_4^2 \cdot a_2^2 a_8^2 = 1,$$

also, da alle  $a$  positiv,

$$a_1 a_4 \cdot a_2 a_8 = +1,$$

das ist

$$7) \quad y_1 \cdot y_2 = 1.$$

Nun bilden wir die Quadrate, immer Nr. 4 benutzend:

$$x_1^2 = a_1^2 + a_4^2 - 2a_1 a_4 = 4 + a_2 + a_8 - 2a_1 a_4,$$

also

$$x_1^2 = 4 + x_2 - 2y_1,$$

ebenso

$$x_2^2 = 4 - x_1 + 2y_2,$$

und nach Nr. 6:

$$2x_2 x_1 = 2$$

$$8) \quad (x_2 - x_1)^2 = 6 + (x_2 - x_1) - 2(y_1 - y_2).$$

also

$$y_1^2 = a_1^2 a_4^2 = (2 + a_2)(2 + a_8) = 4 + 2(a_2 + a_8) + a_2 a_8,$$

ebenso

$$y_1^2 = 4 + 2x_2 + y_2,$$

und nach Nr. 7

$$y_2^2 = 4 - 2x_1 - y_1,$$

$$2y_1 y_2 = 2$$

$$9) \quad (y_1 - y_2)^2 = 6 + 2(x_2 - x_1) - (y_1 - y_2).$$

Man überzeugt sich leicht, dass

$$y_1 - y_2 > x_2 - x_1 > 0.$$

Aus Nr. 9 und 8 folgt:

$$\text{also} \quad (y_1 - y_2)^2 - (x_2 - x_1)^2 = (y_1 - y_2) + (x_2 - x_1),$$

$$10) \quad (y_1 - y_2) - (x_2 - x_1) = 1.$$

Dies setzen wir in Nr. 8 und 9 ein:

$$11) \quad (x_2 - x_1)^2 = 4 - (x_2 - x_1).$$

$$12) \quad (y_1 - y_2)^2 = 4 + (y_1 - y_2).$$

Hieraus ergibt sich:

$$13) \quad x_2 - x_1 = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}, \quad y_1 - y_2 = \frac{\sqrt{17} + 1}{2}.$$

Der Kürze halber setzen wir:

$$x_2 - x_1 = \lambda, \quad y_1 - y_2 = \mu.$$

Zu den Gleichungen Nr. 13 nehmen wir Nr. 6 und 7 hinzu:

$$x_2 x_1 = 1, \quad y_1 y_2 = 1,$$

so lassen sich die  $x$  und  $y$  finden:

$$14) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{\lambda^2 + 4} - \lambda) \\ x_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{\lambda^2 + 4} + \lambda) \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{\mu^2 + 4} + \mu) \\ y_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{\mu^2 + 4} - \mu). \end{cases}$$

Hierauf ergeben sich die  $a$  aus:

$$\begin{array}{l} \begin{array}{c} a_1 - a_4 = x_1 \\ a_1 a_4 = y_1 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{c} a_2 + a_8 = x_2 \\ a_2 a_8 = y_2 \end{array} \right. \\ \text{als} \\ 15) \quad \begin{cases} a_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{x_1^2 + 4y_1} + x_1) \\ a_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{x_1^2 + 4y_1} - x_1) \end{cases} \quad \begin{cases} a_2 = \frac{1}{2}(x_2 + \sqrt{x_2^2 - 4y_2}) \\ a_8 = \frac{1}{2}(x_2 - \sqrt{x_2^2 - 4y_2}) \end{cases} \end{array}$$

$$a_1 \text{ ist } 2 \cos \frac{1}{17} \pi.$$

Der Centriwinkel der Seite  $s_{17}$  des regulären Siebzehnecks findet sich durch

$$16) \quad 2 \cos \frac{2}{17} \pi = 4 \cos^2 \frac{1}{17} \pi - 2 = a_1^2 - 2.$$

Diese Art der Auflösung dürfte kürzer sein, als die gewöhnlich benutzte, welche auf die Formeln

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

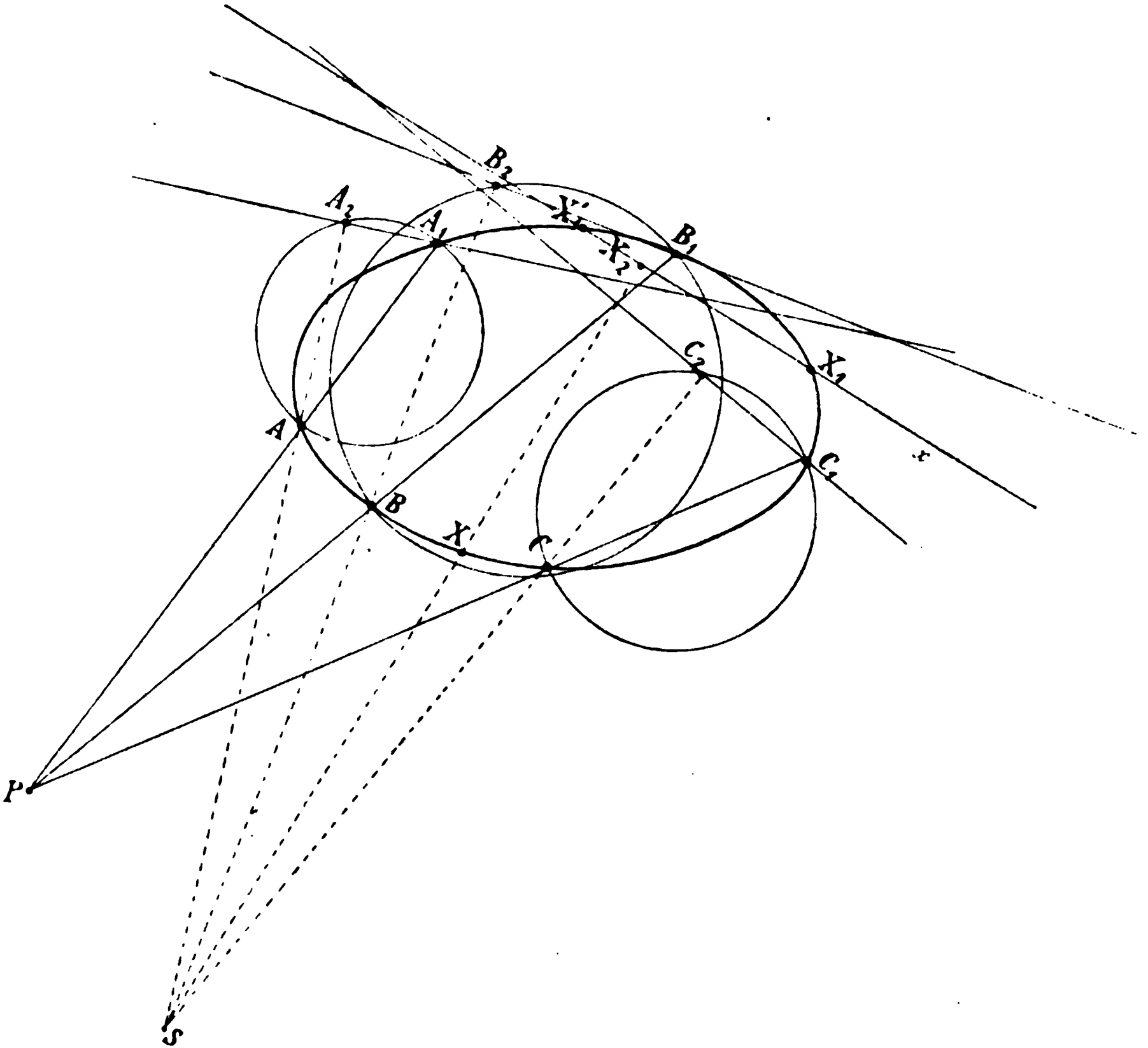
$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

zurückgeht, und die z. B. in Schlömilch's Geometrie angegeben ist. Auch zur geometrischen Herleitung werden gewöhnlich Zusammenhänge benutzt, welche diesen letztgenannten Formeln entsprechen, z. B. in Schraders Geometrie. Aber auch geometrisch ist mein Verfahren das einfachere. Ich hoffe, in nächster Zeit eine zusammenhängende und erschöpfende Darstellung des Problemes in neuem geometrischen Gewande zu geben, worin eben die Formeln Nr. 3 auf einfachste Weise geometrisch gewonnen und gedeutet werden sollen. Das Verfahren ist natürlich nicht auf den Fall  $\frac{1}{17}$  beschränkt, wie ich denn auch eine allgemeine Formel für die Seite  $s_{4n+2}$  des regulären Polygons von  $2(2n+1)$  Seiten geben werde.

## VIII. Ueber eine Potenzbeziehung bei den Curven zweiter Ordnung.

Von Faure rührt der Satz her, dass die Umkreise der Poldreiecke einer Curve zweiter Ordnung im Mittelpunkte dieser Curve denselben Potenzwerth besitzen. Diesem Satze können wir den folgenden zur Seite stellen, der eine ähnliche Potenzbeziehung enthält und der noch nicht bekannt sein dürfte.

Zu allen Kreisen, welche je eine der durch einen Punkt  $P$  gehenden Sehnen einer Curve zweiter Ordnung als Durch-



messer fassen, giebt es im Allgemeinen einen Punkt gleicher Potenz  $S$ . Dieser hat denselben Potenzwerth zu den Kreisen einer anderen Schaar, von denen jeder eine durch einen gewissen Punkt  $P'$  gehende Sehne derselben Curve als Durchmesser enthält.

Wir ziehen zum Beweise dieses Satzes durch  $P$  drei Gerade, die die Curve zweiter Ordnung  $\lambda$  in den Punktpaaren  $AA_1$ ,  $BB_1$  und  $CC_1$  treffen, und construiren die drei Kreise, die je eine der entstandenen Curvensehnen als Durchmesser fassen (Figur). Den gemeinsamen Schnittpunkt  $S$  der

Potenzlinien dieser Kreise verbinden wir mit  $A$ ,  $B$  und  $C$  durch drei Gerade, die die zugehörigen Kreise zum zweiten Male in  $A_2$ ,  $B_2$  und  $C_2$  schneiden, und ziehen ferner die Geraden  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$  und  $C_1C_2$ . Dann sind die Winkel bei  $A_2$ ,  $B_2$  und  $C_2$  rechte, und es haben die Producte  $SA \cdot SA_2$ ,  $SB \cdot SB_2$  und  $SC \cdot SC_2$  denselben Werth. Weisen wir nun jedem Punkte  $X$  von  $\lambda$  diejenige Gerade  $x$  zu, die senkrecht steht zu  $SX$  und diese Gerade in einem solchen Punkte  $X_2$  schneidet, dass das Product  $SX \cdot SX_2$  gleich jenem Werthe  $SA \cdot SA_2$  ist, dann sind  $X$  und  $x$  entsprechende Elemente in einem allgemeinen circulären Polarsystem, dessen Ordnungscurve ein reeller oder imaginärer Kreis  $\kappa$  ist, der  $S$  als Mittelpunkt und  $\sqrt{SA \cdot SA_2}$  als Radius hat. Nennen wir ferner  $X_1$  und  $X'_1$  die Schnittpunkte der Geraden  $x$  mit der Curve  $\lambda$ , dann sind  $X$  und  $X_1$  und ebenso  $X$  und  $X'_1$  conjugirte Punkte in dem circulären Polarsystem, und folglich schneiden die Geraden  $XX_1$  und  $XX'_1$  den Kreis  $\kappa$  und die Curve  $\lambda$  so in vier harmonischen Punkten, dass je zwei zugeordnete auf derselben Curve liegen. Nach einem bekannten Satze bilden solche Gerade einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung; weil aber in unserem Falle drei Strahlen des Büschels, nämlich  $AA_1$ ,  $BB_1$  und  $CC_1$  durch den Punkt  $P$  gehen, so zerfällt der Büschel zweiter Ordnung in zwei Büschel erster Ordnung. Der Mittelpunkt des einen, durch den die Geraden  $XX_1$  gehen, ist  $P$ , der Mittelpunkt des andern, in dem sich die Geraden  $XX'_1$  schneiden, möge mit  $P'$  bezeichnet werden. Denken wir uns nun schliesslich über irgend einer der Strecken  $XX_1$  oder  $XX'_1$  als Durchmesser den Kreis construirt, so geht dieser durch den zugehörigen Punkt  $X_2$ , so dass  $SX$  und  $SX_2$  Sehnen- oder Secantenabschnitte des Kreises sind, also das Product  $SX \cdot SX_2$  die Potenz des Punktes  $S$  zu jenem Kreise darstellt. Weil nun aber dieses Product constant ist, so ist  $S$  ein Punkt gleicher Potenz zu allen Kreisen, die je eine der Curvensehnen  $XX_1$  oder  $XX'_1$  als Durchmesser fassen.

Denken wir uns statt der Kreise die Kugeln, die die Sehnen  $XX_1$  und  $XX'_1$  als Durchmesser fassen, so gehen die Potenzebenen von je zweien dieser Kugeln durch den Punkt  $S$  und stehen senkrecht zu der Ebene der Curve  $\lambda$ . Folglich schneiden sich alle diese Potenzebenen in der Geraden, die in  $S$  normal zu jener Ebene steht. Die Kugeln der beiden Schaaren gehören also zu einem Kugelbündel und haben folglich auf der Potenzachse zwei gemeinschaftliche reelle oder imaginäre Schnittpunkte. Es gilt daher der Satz:

Alle Kugeln, welche je eine der durch einen Punkt  $P$  gehenden Sehnen einer Curve zweiter Ordnung als Durchmesser fassen, haben im Allgemeinen zwei Punkte gemeinsam. Durch diese geht noch eine zweite Schaar von Kugeln, von denen jede eine durch einen gewissen Punkt  $P'$  gehende *Sehne derselben Curve* als Durchmesser enthält.

Die Kegelflächen, die aus einem dieser beiden Punkte die Curve  $\lambda$  projeciren, sind von besonderer Art, da jede von beiden Kegelflächen von irgend einer durch ihren Mittelpunkt und einen der Punkte  $P$  und  $P'$  gehenden Ebene in normalen Strahlen geschnitten wird. Solche Kegel sind vom Verfasser dieser Arbeit in seiner Strassburger Inaugural-Dissertation „Kegel des Pappus“ genannt und dort näher untersucht worden.

Nach dieser Darlegung wollen wir hier noch die wichtigsten der Sätze anführen, die sich uns bei weiterer Untersuchung jener Kreisschaaren ergeben haben und die vielleicht einiges Interesse beanspruchen dürften. Wir behalten uns vor, sie bei einer andern Gelegenheit zu begründen.

1. Die Kreise, die parallele Sehnen einer gleichseitigen Hyperbel als Durchmesser fassen, bilden einen Büschel, dessen Potenzlinie ein Durchmesser der Curve ist. Der Büschel hat zwei reelle und zwar auf der Curve gelegene oder zwei imaginäre Grundpunkte, je nachdem die parallelen Sehnen Punkte auf den beiden oder auf einem Zweige der Hyperbel verbinden.

2. Bei einer gleichseitigen Hyperbel hat der zu einem Punkte  $P$  conjugirte und mit diesem auf einem Durchmesser gelegene Punkt  $S$  gleichen Potenzwerth zu allen Kreisen, die je eine Hyperbelsehne des Punktes  $P$  als Durchmesser fassen.

3. Zwischen den Punkten  $P$  und  $P'$  besteht eine involutorische Verwandtschaft zweiten Grades, deren Hauptpunkte der Mittelpunkt und die beiden unendlich fernen Punkte von  $\lambda$  sind.

4. Auf einer Achse einer Curve zweiter Ordnung giebt es zwei reelle oder imaginäre und bezüglich des Mittelpunktes symmetrisch gelegene Punktpaare  $RS$ , die durch folgende Eigenschaften ausgezeichnet sind: a) Verbindet man irgend einen Curvenpunkt  $X$  mit  $R$  durch eine Gerade, die die Curve zum zweiten Male in  $X_1$  trifft und zieht man die Gerade  $XS$ , so steht diese senkrecht zur Tangente des Punktes  $X_1$ ; b) Ist  $X_2$  der Schnittpunkt der Geraden  $XS$  mit der Tangente des Punktes  $X_1$ , dann hat das Product  $SX \cdot SX_2$  einen constanten Werth; c) Die Punkte  $R$  und  $S$  sind durch die Brennpunkte der Achse harmonisch getrennt.\*

5. Den Punkten  $P$  einer Geraden entsprechen die Punkte  $S$  einer Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt.

\* Vergl. die Verhandlungen der 64. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte, Leipzig 1892, 2. Theil S. 542 flg.

6. Bestimmt man zu einem Punkte  $P$  in der Ebene einer Curve zweiter Ordnung den zugehörigen Punkt  $S$ , sowie die Curve  $\mu$ , auf der die Mittelpunkte der Sehnen des Punktes  $P$  liegen, dann gehen durch die Fusspunkte der vier von  $S$  nach  $\mu$  gezogenen Normalen grösste und kleinste zur Curve  $\lambda$  gehörende Sehnen des Punktes  $P$ .\*

---

\* Vergl. die Bemerkung von Schlömilch in der Zeitschrift für mathem. und naturw. Unterricht. Jahrg. 1892, Heft 4, S. 280 und 281.

Saarbrücken.

Dr. THEODOR MEYER.

---

## XIV.

### Ueber die Stellen innigster Berührung einer ebenen Curve dritter Ordnung mit einer ebenen Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung.

Von

Dr. MARTIN DISTELI

in Zürich.

---

Hierzu Tafel VI, Fig. 1 — 5.

---

Bekanntlich können von den  $3n$  Schnittpunkten  $P$  einer ebenen Curve  $n^{\text{ter}}$  Ordnung  $C_n$  mit einer ebenen Curve dritter Ordnung  $C_3$  alle bis auf einen auf der  $C_3$  willkürlich fixirt werden. Denkt man sich nun die  $(3n - 1)$  willkürlichen Punkte  $P$  sämtlich unendlich benachbart, so kann durch zweckmässige Wahl der Berührungsstelle auch noch der letzte Schnittpunkt mit den übrigen vereinigt werden. Die vorliegende Frage möge also lauten:

Wie viele Punkte giebt es auf der allgemeinen und den singulären Curven dritter Ordnung, welche eine innigste, das heisst eine  $3n$ -punktige Berührung mit einer Curve  $n^{\text{ter}}$  Ordnung gestatten, und welche hauptsächlichsten geometrischen Eigenschaften kommen diesem Punktsysteme zu?

#### I. Anzahlbestimmung der Berührungsstellen.

Wir führen die Untersuchung im Folgenden synthetisch, indem wir die fraglichen Stellen zuerst für die einfachsten Fälle ermitteln, dann zur allgemeinen Primzahl und schliesslich zu den zusammengesetzten Zahlen  $n$  übergehen. Dabei wird durchweg nur von dem Satze Gebrauch gemacht:

Legt man durch  $(3n - 2)$  der Schnittpunkte  $P$  einer Curve  $C_3$  und einer Curve  $C_n$  sämtliche Curven  $C_n$ , so schneiden diese aus der  $C_3$  Punktepaare einer rationalen und quadratischen Involution, deren Verbindungslinie stets durch einen festen Punkt der  $C_3$  geht.

Dieser feste Punkt soll in der Folge als Drehpunkt  $D$  bezeichnet werden.

## 1. Die einfachsten Fälle.

$n = 1$ . Diejenigen Stellen, wo die  $C_3$  von einer Geraden dreipunktig berührt wird, sind unmittelbar ersichtlich: nämlich die neun Wendepunkte mit der bekannten Configuration ihrer zwölf dreifach zählenden Geraden. Wir können sie unter dem Gesichtspunkt vorliegender Betrachtung bezeichnen als Punkte  $P_1$ , wenn hier gleich angemerkt wird, dass die Bezeichnung  $P_n$  für den allgemeinen Fall gelten soll. Es ist bemerkenswerth, dass die Wendepunkte auch in der Folge eine wichtige Rolle spielen.

$n = 2$ . Sei in Fig. 1  $F_1$  ein beliebiger Punkt der  $C_3$ ,  $F_2$  sein erster und  $D_1$  sein zweiter Tangentialpunkt. Unter allen in  $F_1$  vierpunktig berührenden Kegelschnitten  $C_2$  figurirt auch die doppelt gelegte Tangente in  $F_1$ , welche zeigt, dass  $D_1$  der Drehpunkt des veränderlichen Punktepaares ist, welches zugleich den Individuen des Kegelschnittbüschels angehört. Die Gerade  $D_1 F_1$  begegnet somit der  $C_3$  in demjenigen Punkte 6, der dem in  $F_1$  fünfpunktig osculirenden Kegelschnitt angehört. Auf diese Weise kann zu jedem Punkte  $F_1$  linear ein Punkt 6 construiert werden. Wann und wie oft fallen  $F_1$  und 6 zusammen?

Wenn ein Zusammenfallen eintreten soll, muss  $D_1$  mit  $F_2$  coincidiren; dann aber ist  $F_2$  ein Wendepunkt.

Die Punkte  $P_2$  sechspunktiger Berührung zwischen der  $C_3$  und einem Kegelschnitt  $C_2$  sind also, wie bekannt, die 27 Berührungspunkte der aus den Wendepunkten an die  $C_3$  gelegten Tangenten.

$n = 3$ . Sei wieder in derselben Figur  $F_1$  ein willkürlicher Punkt der  $C_3$ . Um jetzt den Drehpunkt  $D_2$  der Sehnen anzugeben, welche die variablen Schnittpunktepaare aller Curven dritter Ordnung enthalten, von denen die Grundcurve  $C_3$  in  $F_1$  siebenpunktig berührt wird, betrachten wir diejenige zerfallende  $C_3$ , welche aus dem in  $F_1$  fünfpunktig osculirenden Kegelschnitt und seiner Tangente in diesem Punkte besteht.

Für diese Curve ist  $6 F_1$  das variable Punktepaar, welches somit durch seine Verbindungslinie den Drehpunkt  $D_2$  bestimmt. Durch den Strahl  $F_1 D_2$  wird aber jetzt der neunte Schnittpunkt aller Curven dritter Ordnung bestimmt, welche die Grundcurve in  $F_1$  achtpunktig berühren. Soll nun 9 auch nach  $F_1$  fallen, so muss  $D_2$  mit  $F_2$ , also auch 6 mit  $D_1$  identisch werden. Die Punkte  $F_1 F_2 D_1$  bilden in diesem Falle ein Dreieck von Punkten der  $C_3$ , dessen Seiten die Tangenten der Grundcurve in seinen Ecken sind. — Solcher Dreiecke giebt es auf der  $C_3$  aber 24.

Die fraglichen Punkte  $P_3$  sind also diejenigen 72 Punkte, welche mit jedem Wendepunkt Fundamentalpunkte für Steiner'sche Polygone von 18 Seiten bilden.

Auf die Configuration dieser Punkte kommen wir im Folgenden nochmals zurück.







Elementes zu Elementen der Involution des anderen vollzogen, indem man, mit Ausnahme des Wendepunktes, alle Punkte des einen Elementes mit allen des anderen durch gerade Linien verbindet und die dritten Schnittpunkte mit der Curve bestimmt.

Bezeichnet man mit  $A_n$  die Anzahl der Punkte  $P_n$ , das heisst also derjenigen, welche mit dem Wendepunkt nicht zerfallende Polygone ergeben, also mit  $A_{p^\alpha}$  die Anzahl der Punkte  $P_{p^\alpha}$ , mit  $A_{q^\beta}$  die Zahl der Punkte  $P_{q^\beta}$ , welche zu Polygonen von  $2\alpha$  Seiten führen, so setzen sich die  $n^2$  Punkte des Elementes der Zahl  $n$  zusammen aus der Anzahl aller Punkte  $P_{p^\alpha}$ , wenn  $\alpha$  alle ganzzahligen positiven Werthe von 0 bis  $a$  durchläuft, so dass, wenn  $A_{p^0} = 1$  und  $p$  von 3 verschieden gedacht wird,

$$\sum_{\alpha=0}^a A_{p^\alpha} = n^2$$

ist. Daraus folgt:

$$A_{p^\alpha} = (p^2 - 1)p^{2(\alpha-1)}.$$

Ebenso ist die Anzahl der Punkte  $P_n$ , die zur Primzahlpotenz  $n = q^\beta$  gehören, gegeben durch

$$A_{q^\beta} = (q^2 - 1)q^{2(\beta-1)}$$

und man findet endlich die zur Zahl  $p^a \cdot q^b$  gehörenden Punkte  $P$  durch Verbindung der Punkte  $P_{p^a}$  mit den Punkten  $P_{q^b}$ . Da aus geometrischen Gründen jeder nur einmal erhalten werden kann, so ist ihre Anzahl unter Berücksichtigung *bloß* eines Wendepunktes

$$A_{p^a \cdot q^b} = A_{p^a} \cdot A_{q^b} = (p^2 - 1)(q^2 - 1)p^{2(a-1)}q^{2(b-1)}.$$

Die Anzahl ist aber auch gleich der Anzahl aller Zahlenpaare  $\alpha, \beta (< n)$ , welche mit  $n$  keinen gemeinschaftlichen Divisor haben; das heisst gleich der Anzahl aller Punkte in der Ebene eines Cartesi'schen Coordinatensystems, deren Coordinaten ganze, positive Zahlen sind, welche zugleich kleiner als  $n$  und theilerfremd mit  $n$  sind.

Die Anzahl dieser Punkte stimmt aber bekanntlich mit obiger Anzahl überein, falls  $n$  die Form  $p^a \cdot q^b$  besitzt.

Damit ist auf's Neue gezeigt, dass durch die Verbindungslinien jeder der Punkte  $P_n$  nur einmal erhalten wird und ferner geht daraus hervor:

Gehören zwei Punkte  $P$  zu den Zahlen  $z_1$  und  $z_2$ , so ist der dritte Schnittpunkt ihrer Verbindungslinie allemal ein Punkt, dessen Zahl höchstens dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der Zahlen  $z_1$  und  $z_2$  oder aber einem Divisor  $d$  desselben gleich ist, je nachdem  $z_1$  und  $z_2$  relativ prim sind, oder gemeinschaftliche Primzahlpotenzen besitzen.

Ist also  $n$  eine Zahl von der Form

$$n = p^a \cdot q^b \cdot r^c \dots,$$

wo  $p, q, r \dots$  die verschiedenen Primfactoren sind, so ist die Anzahl der verlangten Punkte  $P_n$ :

$$A_n = 9 A_n = 9(p^2 - 1)(q^2 - 1)(r^2 - 1) \dots p^{2(a-1)} q^{2(b-1)} r^{2(c-1)} \dots$$

Nebst diesen Punkten umfasst aber das Steiner'sche Involutionselement alle Punkte  $P_d$ , die zu sämtlichen Divisoren  $d$  der Zahl  $n$  gehören, so dass man alle Punkte des Elementes erhalten muss, wenn  $d$  alle Divisoren von  $n$  (inclusive 1 und  $n$ ) durchläuft.

Die Grössen  $A$  befolgen also die beiden Gesetze:

$$\sum_d A_d = (3n)^2 \text{ und } A_d \cdot A_{d'} = A_{dd'},$$

sobald  $d$  und  $d'$  zwei zu einander relative Primzahlen sind.

Die Betrachtung dieses Abschnittes hat somit bis jetzt ergeben, dass die in Rede stehenden Punkte  $P_n$  unter den Punkten der von Clebsch aufgestellten „Merkwürdigen Punktsystemen“ der Curve  $C_3$  zu suchen sind. Als Zweck des folgenden Abschnittes möge es betrachtet werden, über die Vertheilung der Geraden der Punkte  $P_n$ , wenn diese allein unter sich verbunden werden, genauere Kenntniss zu erlangen, mit Berücksichtigung der Resultate, die über diese Configuration speciell schon bekannt sind.

## II. Vertheilung und Configuration des Systems der Verbindungslinien der Punkte $P_n$ .

Jeder Punkt der Curve  $C_3$  kann als bestimmender oder Ausgangspunkt eines Involutionselementes einer bestimmten Zahl angesehen werden. Erfüllen dann diese Ausgangspunkte auf der  $C_3$  eine bestimmte Configuration, so wird diese von den zugehörigen Elementen, als Ganzes betrachtet, wiederholt.

So sind zwei Elemente derselben Ordnung bekanntlich stets mit einem dritten Element derselben Ordnung perspectivisch oder connex.

Insbesondere erhält man also durch alle Geraden zwischen den Punkten eines einzigen Elementes sein Tangentialelement.

Für die Darstellung der Punkte  $P_n$  haben wir die Wendepunkte als Ausgangsgruppe zu nehmen und wir haben entweder für jeden Wendepunkt eine Gruppe  $G$  von  $n^2$  Punkten, zwischen denen sich die Lagenbeziehung der neun Wendepunkte wiederholt; oder die eine der neun Gruppen  $G'$  enthält alle Wendepunkte und keinen Punkt  $P_n$ , welche in den acht anderen Gruppen  $G'$  enthalten sind.

In beiden Fällen aber ist die Gruppe der  $(3n)^2$  Punkte zugleich ihre Tangentialgruppe und die charakteristische Haupteigenschaft des Punktsystems besteht darin, dass die Verbindungslinie irgend zweier

Punkte des Systems stets einen dritten Punkt desselben enthalten muss.

Da speciell die Zahlen 2 und 3 eine besondere Rolle in der Configuration übernehmen, wollen wir wieder die einfachsten Fälle zuerst behandeln, wodurch wir dann in den Stand gesetzt werden, zur zusammengesetzten Zahl  $n$  überzugehen.

Wir betrachten zunächst die allgemeine Curve  $C_3$ ; die rationalen werden später eine vollständige und zugleich construierbare Erledigung finden.

## A. Allgemeine Curve dritter Ordnung.

### 3. Die einfachsten Fälle.

$n = 2^l$ . Die Punkte  $P_{2^l}$  finden sich in neun Gruppen  $G$  und zwar in jeder in der Anzahl:

$$A_{2^l} = 3 \cdot 2^{2(l-1)}.$$

Ebenso ist

$$A_{2^\lambda} = 3 \cdot 2^{2(\lambda-1)} \quad (\lambda < n)$$

die Anzahl der Punkte  $P_{2^\lambda}$  einer Untergruppe;  $A_1 = 1$  ist somit der betrachtete Wendepunkt von  $G$ .

Jede Untergruppe entsteht nun aus der vorhergehenden, indem aus den Punkten jener die vier Tangenten an die Curve gelegt werden. Im Weiteren möge  $a(2^\lambda, n, n)$  die Anzahl derjenigen Geraden bezeichnen, welche zwei Punkte  $P_n$  verbinden und zugleich noch durch einen Punkt  $P_{2^\lambda}$  hindurchgehen, was stets eintreten muss.

Legt man ferner allen Punkten  $P_{2^\lambda}$  die Zahl  $2^\lambda$  selber bei, also insbesondere dem Wendepunkt die Zahl 1, und beschränken wir uns vorläufig auf einen Wendepunkt und eine Gruppe  $G$ , die zu ihm gehört, so ist aus geometrischen Gründen evident, dass die Verbindungsgerade eines Punktes  $P_{2^\lambda}$  mit  $P_{2^\mu}$  zu einem Punkte  $P_{2^\nu}$  der Gruppe führen muss, wobei  $\nu$  der grösseren der beiden Zahlen  $\lambda$  und  $\mu$  gleich sein muss, und auch nicht grösser als jede der beiden sein kann, weil man sonst mit dem Lineal allein von Involutionselementen niedrigerer Ordnung zu solchen beliebig hoher Ordnung aufsteigen könnte, was aber bekanntlich eine Kette von Zirkelconstructionen erfordert.

Nur wenn  $\lambda = \mu$  ist, kann der dritte Schnittpunkt in jeden Punkt  $P_{2^\nu}$  fallen, für welchen  $\nu \leq \lambda$  ist, die Null eingeschlossen.

Beachtet man noch, dass die Punkte  $P_{2^l}$  die Punkte  $P_{2^l-1}$  zu Tangentialpunkten haben, so findet für das System der Verbindungslinien zweier Punkte  $P_n$  folgende Vertheilung statt, wenn die Grösse

$$S_{2^l} = \sum_{\lambda=0}^{l-1} A_{2^\lambda} = 2^{2(l-1)}$$

gesetzt wird:

für  $\lambda \leq l-2$  ist  $a(2^\lambda, n, n) = \frac{A_{2^\lambda}}{2} A_{2^\lambda}$ ,

„  $\lambda = l-1$  ist  $a(2^{l-1}, n, n) = \frac{A_{2^{l-1}}}{2} (A_{2^l} - 4) = \frac{A_{2^l}}{2} (A_{2^{l-1}} - 1)$ ,

„  $\lambda = l$  ist  $a(n, n, n) = \frac{A_{2^l}}{6} (A_{2^l} - S_{2^l})$ ,

wobei die letzten Geraden dreifach zu zählen sind. Die Gesammtheit aller Geraden ist also

$$\sum_{\lambda=0}^l a(2^\lambda, n, n) = \frac{A_n}{2} (A_n - 1),$$

wie es sein muss für die Verbindungsgeraden der Punkte  $P_n$ . Fasst man jetzt alle neun Gruppen  $G$  in's Auge, so kommen nebst den genannten Geraden jeder Gruppe neue aus der Verbindung der Punkte  $P_n$  verschiedener Gruppen  $G$  hinzu. Die neun Gruppen  $G$  liegen aber zwölf Mal zu dreien perspectivisch und eine einfache Abzählung ergiebt, dass die vorigen Formeln ihre Giltigkeit behalten, wenn man sämtliche Grössen  $A_{2^\lambda}$  mit dem Factor 9 multiplicirt.

Wir erörtern die Frage nach der Realität.

1. Ersetzt man in den vorigen Formeln  $A_{2^\lambda}$  durch  $A'_{2^\lambda} = 2^\lambda - 1$ , den Factor 9 durch 3, weil blos drei reelle Wendepunkte existiren, so ergeben sie die Verbindungslinien der reellen Punkte  $P_n$  der eintheiligen Curve  $C_3$ .

Fig. 2 illustirt den vorliegenden Fall, indem sie die gegenseitige Lage der Punkte  $P_1, P_2, P_4$  zur Anschauung bringt.

Gegeben ist zu denken das gestrichte Parallelogramm, welches zusammen mit zweien seiner Diagonale die drei Wendepunkte  $P_1$  und die drei Punkte  $P_2$  repräsentirt. Der Mittelpunkt des Parallelogramms ist zugleich Mittelpunkt der Curve; die zugehörige  $h$ . Polare also unendlich fern, und somit die beiden anderen  $h$ . Polaren  $p_1$  unter sich parallel. Durch die gegebenen Daten ist ein Büschel von Curven  $C_3$  definirt, wir können also noch einen willkürlichen Punkt der Curve wählen. Dazu wurde in Fig. 2 eine Ecke desjenigen Parallelogramms verwendet, das dem ursprünglichen umschrieben ist, dessen eines Seitenpaar den  $h$ . Polaren und dessen zweites der zweiten Diagonale des ursprünglichen Parallelogramms parallel läuft. Diese letztere Diagonale theilt dann das ganze Parallelogramm in zwei congruente Theile, deren Mittelpunkte zusammen mit den vier Ecken des ganzen Parallelogramms die verlangten Punkte  $P_4$  sind.

Die ganze Configuration wird jetzt durch elementar-geometrische Sätze begründet. Als interessantes Resultat springt zunächst in die Augen, dass, weil die drei Punkte  $P_2$  nicht einer Geraden angehören, auch nicht drei Punkte  $P_4$  und überhaupt nie drei reelle Punkte  $P_{2^l}$  in einer Geraden liegen können.



verschiedene; im vorigen Falle bedeutet der Factor 9, jetzt bedeutet der Factor  $(3^2 - 1)$  die Anzahl der Gruppen.

Zum System gehören jetzt auch die Tangenten in den Punkten  $P_n$ , von denen jede noch einen Punkt  $P_n$  enthält und deren Anzahl wir mit  $a(n, n)$  bezeichnen wollen; ferner möge die Grösse  $S_{3m}$  die folgende Bedeutung haben:

$$S_{3m} = \sum_{\mu=0}^{m-1} A_{3\mu} = 3^{2(m-1)},$$

dann findet die Geradenvertheilung nach folgenden Anzahlen statt:

$$\text{für } \mu < m \text{ ist } a(3^\mu, n, n) = \frac{A_{3m}}{2} \cdot 9 A_{3\mu}.$$

$$\text{für } \mu = m \text{ ist } a(n, n, n) = \frac{A_{3m}}{6} (9 A_{3m} - 9 S_{3m} - 3)$$

$$a(n, n) = A_{3m}.$$

Beispielsweise sei  $m = 1$ . Dann ist  $A_1 = 9$  und  $A_3 = 72$ . Zum System gehören:

324 Gerade, welche nebst zwei Punkten  $P_3$  noch einen Wendepunkt enthalten,

720 " " " " "  $P_3$  " " Punkt  $P_3$  "

72 Tangenten.

Jede der in Betracht kommenden acht Gruppen  $G'$  besteht aus drei geschlossenen Tangentendreiseiten, welche der  $C_3$  auf- und umgeschrieben, und von denen zwei reell sind, welche bezüglich jedes der drei reellen Wendepunkte zu einander perspectivisch liegen. Diese acht Gruppen  $G'$  werden durch diejenige der Wendepunkte als dritte Schnittpunktgruppe in vier Paare geordnet, welche den vier syzygetischen Dreiecken in der Weise zugewiesen sind, dass je ihre sechs Tangentendreiseite drei Mal paarweise perspectivisch sind für die auf den drei Seiten des entsprechenden syzygetischen Dreiecks liegenden Wendepunkte.

Die sechs Ecken zweier derartig perspectivischen Dreiecke sind also jedes Mal sechs Punkte eines Kegelschnittes  $K$ , deren Anzahl im Ganzen sich auf 36 beläuft und von denen drei durch jeden Punkt  $P_3$  gehen.

Diejenigen neun Kegelschnitte, die zum nämlichen syzygetischen Dreieck gehören, gehen zu drei und drei durch je zwei Ecken  $H$  desselben und haben in diesen zwei Seiten  $h$  desselben zu gemeinschaftlichen Tangenten. Es stehen somit in jedem Eckenpaar  $H$  eines syzygetischen Dreiecks zwölf Kegelschnitte  $K$  unter sich in doppelter Berührung.

Projicirt man also insbesondere die Curve dritter Ordnung so, dass die drei reellen Wendepunkte unendlich fern und mit dem Kreispunktepaar äquianharmonisch liegen, so werden die Kreispunkte selbst ein Punktepaar  $H$  und die durch sie gehenden zwölf Kegelschnitte gehen über in ein System von zwölf concentrischen Kreisen. Die Wendepunkte  $P_1$





sein kann. Endlich ist evident, dass für  $\lambda = \lambda'$  und  $\mu = \mu'$  der dritte Schnittpunkt mit  $2^\xi \cdot 3^\eta$  zu bezeichnen ist, wo  $\xi$  und  $\eta$  beide zwischen den angegebenen Grenzen liegen.

Erinnert man sich noch, dass die Punkte  $P_n$  durch  $l$  maliges Tangentenlegen aus den Punkten  $P_{3m}$  erhalten werden, so findet die Vertheilung des Geradensystemes nach folgenden Zahlwerthen statt:

$$\text{für } \lambda < l, \mu < m \text{ ist } a(2^\lambda \cdot 3^\mu, n, n) = \frac{A_n}{2} \cdot 9 A_{2\lambda} \cdot 3^\mu,$$

$$\text{für } \lambda = l, \mu < m \text{ ist } a(2^l \cdot 3^\mu, n, n) = \frac{A_n}{2} 9(A_{2l} - S_{2l}) A_{3\mu},$$

$$\text{für } \lambda < l-1, \mu = m \text{ ist } a(2^\lambda \cdot 3^m, n, n) = \frac{A_n}{2} 9(A_{3m} - S_{3m}) A_{2\lambda},$$

$$\text{für } \lambda = l-1, \mu = m \text{ ist } a(2^{l-1} \cdot 3^m, n, n) = \frac{A_n}{2} [9(A_{3m} - S_{3m}) A_{2l-1} - 1],$$

$$\text{für } \lambda = l, \mu = m \text{ ist } a(n, n, n) = \frac{A_n}{6} 9(A_{2l} - S_{2l})(A_{3m} - S_{3m}).$$

Wir geben zur Controle eine directe Abzählung der Geraden mit drei Punkten  $P_n$ :

Ist  $P_n'$  ein bestimmter Punkt unter den Punkten  $P_n$  und  $d$  ein Divisor von  $n$ , so ist der dritte Schnittpunkt der Verbindungslinie von  $P_n'$  mit  $P_d$  entweder wieder ein Punkt  $P_n$  oder ein Punkt  $P_{d'}$ , wo  $d'$  wieder ein Divisor von  $n$ , der aber von  $d$  verschieden sein muss. Die auf diese Weise erhaltenen Punkte, die zu allen Divisoren  $d$  (incl. 1 und excl.  $n$ ) gehören, denke man sich ausgesondert. Dann enthält die Verbindungslinie des Punktes  $P_n'$  mit den noch übrigbleibenden Punkten  $P_n$  sicher noch einen dritten Punkt  $P_n$ .

Wir haben nun die Fälle zu unterscheiden, wo in  $d = 2^\lambda \cdot 3^\mu$  zugleich  $\lambda < l$  und  $\mu < m$ , oder  $\lambda = l$  und  $\mu < m$ , oder endlich  $\lambda < l$  und  $\mu = m$  ist.

$\alpha$ ) Ist  $d$  eine Zahl der ersten Art, so ist alle Mal der dritte Schnittpunkt ein Punkt  $P_n$ . Die Zahl der so erhaltenen Punkte ist:

$$\sum_{\lambda=0}^{l-1} \sum_{\mu=0}^{m-1} 9 A_{2\lambda} A_{3\mu} = 9 S_{2l} \cdot S_{3m}.$$

$\beta$ ) Ist  $d$  von der Form  $2^l \cdot 3^\mu$ , so ist der dritte Schnittpunkt ein Punkt mit der Zahl  $2^\lambda \cdot 3^m$ , wo für  $\lambda$  alle ganzzahligen Werthe von 0 bis  $l$  zu setzen sind. Die Zahl derjenigen Geraden, die auf einen Punkt  $P_n$  führen, ist also:

$$(A_{2l} - S_{2l}) \sum_{\mu=0}^{m-1} 9 A_{3\mu} = 9(A_{2l} - S_{2l}) S_{3m}.$$

Unter diesen Geraden befindet sich auch die Tangente des Punktes  $P_n'$ ; dieser befindet sich somit schon unter den ausgesonderten.

$\gamma)$  Ist  $d$  von der Form  $2^l \cdot 3^m$ , so trägt der letzte Schnittpunkt die Zahl  $2^l \cdot 3^\mu$ , wo  $\mu$  alle Werthe von 0 bis  $m$  annehmen kann. Somit ist die Zahl der nach einem Punkte  $P_n$  gehenden Geraden:

$$9(A_{3m} - S_{3m}) \sum_{\lambda=0}^{l-1} A_{2\lambda} = 9(A_{3m} - S_{3m}) S_{2l}.$$

Bezeichnet also  $A_n'$  die Anzahl der auf diese Weise ausgeschlossenen Punkte  $P_n$ , also

$$A_n' = 9 A_{2l} S_{3m} + 9 A_{3m} S_{2l} - 9 S_{2l} S_{3m},$$

so ergibt sich als Anzahl der Geraden mit drei Punkten  $P_n$ :

$$a(n, n, n) = \frac{A_n}{6} (A_n - A_n') = \frac{A_n}{6} 9(A_{2l} - S_{2l})(A_{3m} - S_{3m}).$$

Setzt man im Weiteren

$$A_{2l}^r = 2^{l-1} \text{ und } A_{3\mu}^r = 2 \cdot 3^{\mu-1},$$

so erhält man die reellen Punkte  $P_n$  und ihre Verbindungslinien für die eintheilige Curve  $C_3$ , und man bemerkt, dass es keine Geraden mit drei reellen Punkten  $P_n$  giebt.

Im Falle der zweitheiligen Curve dagegen giebt es Gerade mit drei reellen Punkten  $P_n$  für  $l=1$  und jeden Werth von  $m$ , da sowohl der Factor  $(A_{2l}^r - S_{2l}^r)$  als auch  $(A_{3m}^r - S_{3m}^r)$  von Null verschieden sind. Ist aber  $l > 1$ , so verschwindet auch hier der erste der genannten Factoren und damit die Zahl der Geraden mit drei reellen Punkten  $P_n$ .

Speciell möge gesetzt werden:

$$A_2^r = 1, A_3^r = 2, \text{ also } A_2^r = 3, A_3^r = 6,$$

so folgt:

$$a^r(1, 6, 6) = 9; a^r(2, 6, 6) = 0; a^r(3, 6, 6) = 6, a^r(6, 6, 6) = 0$$

für die sechs reellen Punkte  $P_6$  der eintheiligen  $C_3$  und man erkennt in der That in Fig. 3, wo die Punkte  $P_6$  hinzuconstruirt sind, dass keine Gerade durch zwei Punkte  $P_6$  einen Punkt  $P_2$  und ebenso keine Gerade drei Punkte  $P_6$  enthält; durch jeden Wendepunkt gehen dagegen drei und durch jeden Punkt  $P_3$  geht eine Gerade mit zwei Punkten  $P_6$ .

Für die zweitheilige Curve ist zu setzen:

$$A_2^r = 3, A_2^r = 9, A_3^r = 2, A_3^r = 6,$$

wodurch man folgende Vertheilung der Geraden erhält:

$$a^r(1, 6, 6) = 27; a^r(2, 6, 6) = 54; a^r(3, 6, 6) = 18; a^r(6, 6, 6) = 18.$$

## 5.

$n = p^a$ . Sei  $n$  eine beliebige von 2 und 3 verschiedene Primzahl. Alsdann ergänze man zunächst einen Wendepunkt zum Involutionselement der Zahl  $n$ , wodurch man eine Gruppe  $G$  mit

$$A_{p^a} = (p^2 - 1)p^{2(a-1)}$$

Punkten  $P_n$  erhält.

Ebenso ist

$$A_{p^a} = (p^2 - 1)p^{2(a-1)}$$

die Anzahl der Punkte  $P_{p^a}$ . Dann bedeutet wieder

$$S_{p^a} = \sum_{\alpha=0}^{a-1} A_{p^\alpha} = p^{2(a-1)}$$

die Anzahl derjenigen Punkte der Gruppe, welche nicht Punkte  $P_n$  sind. Nach diesen Festsetzungen folgt für die Geradenanordnung:

$$\text{für } \alpha < a \text{ ist } a(p^\alpha, n, n) = \frac{A_{p^\alpha}}{2} A_{p^\alpha},$$

$$\text{für } \alpha = a \text{ ist } a(n, n, n) = \frac{A_{p^a}}{6} (A_{p^a} - S_{p^a} - 3),$$

$$a(n, n) = A_{p^a}.$$

Ersetzt man den ersten Factor  $A_{p^a}$  durch  $9A_{p^a} = A_{p^a}$ , so erhält man die Vertheilung für sämtliche Punkte  $P_n$  auf der Curve.

Will man bloß die reellen Punkte  $P_n$  berücksichtigen, so ist zu setzen:

$$A^r_{p^a} = (p - 1)p^{a-1}, \text{ also } A^r_{p^a} = 3(p - 1)p^{a-1}.$$

Insbesondere wollen wir uns noch mit dem Falle  $n = 7$  beschäftigen, der sich einfach und übersichtlich construiren lässt (Fig. 5).

Die Construction bezieht sich auf die eintheilige Curve  $C_3$ , wie im vorhergehenden Fall. Seien  $p_1$  wieder die  $h$ . Polaren der Wendepunkte  $P_1$ , so theile man von diesen Richtungen aus einen beliebigen Kreis des Systems  $K$  in 18 gleiche Theile. Die den  $h$ . Polaren zunächst liegenden symmetrischen Theilpunkte nehme man, sodann als sechs Punkte der Curve. Dieselben bilden die Ecken von zwei regulären Dreiecken, deren Seiten sich auf den  $h$ . Polaren als perspectivachsen paarweise begegnen. Der Kreis durch die drei zunächst am Mittelpunkte  $H_0$  gelegenen dieser Schnittpunkte begegnet den Seiten der zwei genannten Dreiecke in sechs neuen Punkten der  $C_3$ . Dieses neue Sechseck der Curve zerfällt ebenfalls in zwei reguläre Dreiecke, dessen Seiten sich wieder auf den  $h$ . Polaren begegnen. Man lege jetzt durch die drei dem Punkte  $H_0$  entfernter liegenden dieser Schnittpunkte den dritten Kreis, so begegnet dieser den beiden vorigen Dreiseiten in Punkten eines dritten Sechsecks der nämlichen Curve  $C_3$ .

Aus der Construction lässt sich unmittelbar beweisen, dass man mit den Tangenten der Punkte des ersten Sechsecks zu denen des zweiten, durch seine Tangenten zu Punkten des dritten Sechsecks und durch die Tangenten dieses dritten zum ersten Sechseck zurückkehrt.

Von den drei Sechsecken ist also jedes das Tangentialsechseck des vorhergehenden; die Tangenten ihrer Ecken setzen sich zu drei geschlossenen Tangentensechsecken zusammen, die der Curve zugleich auf- und umgeschrieben sind. Die Ecken dieser Polygone sind die Punkte  $P_7$ .

Die vorliegende Figur ist insofern specieller Natur, als der Mittelpunkt  $H_0$  der drei concentrischen Kreise  $K$  je mit drei Punkten  $P_7$  in gerader Linie liegt, was im Allgemeinen nicht stattzufinden braucht.

Setzt man

$$A_7^r = 6, \quad A_7^r = 18, \quad A_1^r = 3,$$

so findet man für das Geradensystem sämtlicher 18 reellen Punkte  $P_7$ :

$$a^r(1, 7, 7) = 27, \quad a^r(7, 7, 7) = 36, \quad a^r(7, 7) = 18$$

in Uebereinstimmung mit dem Constructionsergebniss.

## 6.

$n = p^a \cdot q^b$ . Seien  $p$  und  $q$  zwei von 2 und 3 verschiedene Primzahlen. Ist dann

$$S_{p^a} = \sum_{\alpha=0}^{a-1} A_{p^\alpha} = p^{2(a-1)} \text{ und } S_{q^b} = \sum_{\beta=0}^{b-1} A_{q^\beta} = q^{2(b-1)},$$

so findet man durch Abzählen für die Punkte einer Gruppe  $G$ :

$$\text{für } \alpha < a, \beta < b \text{ ist } a(p^\alpha q^\beta, n, n) = \frac{A_n}{2} A_{p^\alpha q^\beta},$$

$$\text{für } \alpha = a, \beta < b \text{ ist } a(p^a q^\beta, n, n) = \frac{A_n}{2} (A_{p^a} - S_{p^a}) A_{q^\beta},$$

$$\text{für } \alpha < a, \beta = b \text{ ist } a(p^\alpha q^b, n, n) = \frac{A_n}{2} (A_{q^b} - S_{q^b}) A_{p^\alpha},$$

$$\text{für } \alpha = a, \beta = b \text{ ist } a(n, n, n) = \frac{A_n}{6} [(A_{p^a} - S_{p^a})(A_{q^b} - S_{q^b}) - 3],$$

$$a(n, n) = A_n.$$

Ersetzt man  $A_n$  durch  $A_n = 9 A_n$  und überall entweder die Grösse  $A_{p^\alpha}$  durch  $A_{p^\alpha} = 9 A_{p^\alpha}$  oder überall  $A_{q^\beta}$  durch  $A_{q^\beta} = 9 A_{q^\beta}$ , aber nicht beides gleichzeitig, so gelten die obigen Formeln auch für das Gesamtsystem der Punkte  $P_n$ .

Also beispielsweise für sämtliche Punkte  $P_{pq}$  wäre:

$$a(1, pq, pq) = \frac{A_{pq}}{2} 9 A_1,$$

$$a(p, pq, pq) = \frac{A_{pq}}{2} 9 (A_p - A_1),$$

$$a(q, pq, pq) = \frac{A_{pq}}{2} 9 (A_q - A_1),$$

$$a(pq, pq, pq) = \frac{A_{pq}}{6} [9 (A_p - A_1)(A_q - A_1) - 3],$$

$$a(pq, pq) = A_{pq}.$$

## 7. Der allgemeine Fall.

Die bis jetzt betrachteten Fälle lassen das Bildungsgesetz für die Vertheilung der Geraden des Systems für den allgemeinen Fall hinlänglich erkennen. Wenn es blos auf die Abzählung der Geraden des Systems der Punkte  $P_n$ , nicht aber auf die Gesamtconfiguration ankommt, so sind wesentlich blos die zwei Fälle auseinander zu halten, ob  $n$  eine gerade oder ungerade Zahl ist. Es sind dann sowohl die Formeln für die Vertheilung der Geraden theilweise von einander verschieden, als auch zeigt die Lage der Punkte eine Abweichung, insofern im ersten Falle keine geschlossenen Tangentenpolygone auftreten können, während dies für ungerades  $n$  stets der Fall ist. Das Vorhandensein des Factors 3 ändert nichts an den Formeln der Geradenvertheilung, wohl aber zeigt die Punktconfiguration ein anderes Bild und spielen namentlich die geschlossenen Tangentenpolygone eine besondere Rolle.

a) Enthält  $n$  den Factor 3 nicht, so sind die  $A_n$  Punkte  $P_n$  enthalten in neun Gruppen  $G$  von je  $n^2$  Punkten, von denen jede einen Wendepunkt und Punkte  $P_d$  zu sämtlichen Divisoren  $d$  von  $n$  enthält. Jede Gruppe  $G$  ist zugleich ihre eigene Tangentialgruppe; sie liegen wie die Wendepunkte zwölf Mal unter sich zu dreien perspectivisch.

b) Enthält  $n$  den Factor 3 in der Potenz  $m$ , so zerfallen die  $(3n)^2$  Punkte, unter denen sich die  $P_n$  finden, wieder in neun Gruppen  $G'$ , von denen aber jetzt die eine alle Wendepunkte und alle zu den verschiedenen Divisoren  $d$  von  $n$  gehörenden Punkte  $P_d$  enthält, wo in  $d$  der Factor 3 höchstens bis zur Potenz  $m-1$  auftritt, indessen die Exponenten der übrigen Primfactoren die oberen Grenzen erreichen können. Die acht anderen Gruppen  $G'$  enthalten die Punkte  $P_n$ , nebst diesen aber alle Punkte  $P_d$ , wo in  $d$  der Factor 3 nur in der Potenz  $m$  erscheint, dagegen von den Exponenten der übrigen Primfactoren wenigstens einer die obere Grenze nicht erreicht.

Trotzdem also hier eine Absonderung des Factors 9 nicht unmittelbar geometrisch begründet ist, wie im Falle a), so liegt es doch im Interesse der Uebereinstimmung der Formeln für beide Fälle a) und b) die Grösse

$$A_{3m} = (3^2 - 1) 3^{2m}$$

in der Form

$$9 A_{3m} \text{ also } A_{3m} = (3^2 - 1) 3^{2(m-1)}$$

und folglich:

$$S_{3m} = \sum_{\mu=0}^{m-1} A_{3m} = 3^{2(m-1)},$$

wie bereits früher geschehen, zu setzen. Alsdann haben wir auf den Factor 3 keine Rücksicht mehr zu nehmen.

Wir setzen also im

I. Fall:

$$n = p^a q^b r^c \dots$$

Nach dem Vorausgegangenen ist dann:

$$\begin{aligned} A_{p^a} &= (p^2 - 1) p^{2(a-1)} & S_{p^a} &= \sum_{\alpha=0}^{a-1} A_{p^\alpha} = p^{2(a-1)} & \text{wo } A_{p^0} &= 1, \\ A_{q^b} &= (q^2 - 1) q^{2(b-1)} & S_{q^b} &= \sum_{\beta=0}^{b-1} A_{q^\beta} = q^{2(b-1)} & \text{" } A_{q^0} &= 1, \\ A_{r^c} &= (r^2 - 1) r^{2(c-1)} & S_{r^c} &= \sum_{\gamma=0}^{c-1} A_{r^\gamma} = r^{2(c-1)} & \text{" } A_{r^0} &= 1 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \end{aligned}$$

Anzahl der  $P_n$ :

$$A_n = 9 A_{p^a} A_{q^b} A_{r^c} \dots = 9(p^2 - 1)(q^2 - 1)(r^2 - 1) \dots p^{2(a-1)} q^{2(b-1)} r^{2(c-1)} \dots$$

Verbindet man die Punkte  $P_n$  und nur diese unter sich, so findet die Vertheilung dieser Geraden in folgender Weise statt, wenn die früher definirte Bezeichnungsweise festgehalten wird:

1) für  $\alpha < a$ ,  $\beta < b$ ,  $\gamma < c$  u. s. w. ist

$$a(p^\alpha q^\beta r^\gamma \dots, n, n) = \frac{A_n}{2} 9 A_{p^\alpha} A_{q^\beta} A_{r^\gamma} \dots$$

das heisst also, die Punkte  $P_n$  liegen paarweise in Strahlen durch jeden Punkt  $P_{p^\alpha q^\beta r^\gamma \dots}$ , für welchen die oberen Grenzen  $a, b, c \dots$  von den Exponenten nicht erreicht werden.

2) Ist jedoch eine der Zahlen  $\alpha, \beta, \gamma \dots$  gleich der oberen Grenze  $a, b, c \dots$  resp. so, ersetzen sich der Reihe nach die Grössen

$$A_{p^a}, A_{q^b}, A_{r^c} \dots$$

durch die Differenzen

$$(A_{p^a} - S_{p^a}), (A_{q^b} - S_{q^b}), (A_{r^c} - S_{r^c}) \dots$$

resp. und analog, wenn zwei oder mehrere Exponenten  $\alpha, \beta, \gamma \dots$  die obere Grenze erreichen. Demnach ist also:

für  $\alpha = a$ ,  $\beta < b$ ,  $\gamma < c \dots$  u. s. w.,

$$a(p^a q^\beta r^\gamma \dots, n, n) = \frac{A_n}{2} 9 (A_{p^a} - S_{p^a}) A_{q^\beta} A_{r^\gamma} \dots,$$

das heisst, durch jeden Punkt mit der Zahl  $p^a \cdot q^\beta \cdot r^\gamma \dots$  gehen

$$\frac{9}{2} (A_{p^a} - S_{p^a}) A_{q^b} A_{r^c} \dots$$

Gerade, welche ein Punktepaar  $P_n$  enthalten. Ebenso ist

3) für  $\alpha = a$ ,  $\beta = b$ ,  $\gamma < c$  u. s. w.

$$a(p^a q^b r^\gamma \dots, n, n) = \frac{A_n}{2} \cdot 9 (A_{p^a} - S_{p^a}) (A_{q^b} - S_{q^b}) A_{r^\gamma} \dots$$

das heisst, durch jeden Punkt  $p^a q^b r^\gamma \dots$  gehen

$$\frac{9}{2}(A_{p^a} - S_{p^a})(A_{q^b} - S_{q^b})A_{r^c} \dots$$

Geraden, die zugleich zwei Punkte  $P_n$  enthalten. Endlich wird

4) die Zahl der Geraden mit drei Punkten  $P_n$  enthalten, für sämtliche Exponenten gleich der oberen Grenze, das heisst:

für  $\alpha = a, \beta = b, \gamma = c \dots$  u. s. w. ist

$$a(n, n, n) = \frac{A_n}{6} [9(A_{p^a} - S_{p^a})(A_{q^b} - S_{q^b})(A_{r^c} - S_{r^c}) \dots - 3],$$

welche Geraden dreifach zu zählen sind und wobei erinnert werden mag bezüglich des Subtrahenden  $(-3)$ , dass jeder Punkt  $P_n$  nicht mit sich selbst, und nicht mit seinen beiden Nachbarn im Tangentenpolygon verbunden werden darf. Vielmehr gehören als einfach zählende Geraden zum System:

5) Die Seiten einer später zu bestimmenden Anzahl gewisser Tangentenpolygone in der Anzahl

$$a(n, n) = A_n.$$

Die vorstehenden Formeln ergeben die reellen Punkte  $P_n$  und ihre Verbindungsgeraden, sobald überall der Factor 9 durch 3 und überhaupt die Quadrate der Primfactoren durch die einfachen Potenzen  $p, q, r \dots$  ersetzt werden. Von diesen reellen Geraden sind natürlich die überhaupt reellen Geraden wohl zu unterscheiden. Die eintheilige und zweitheilige Curve zeigen die nämlichen Realitätsverhältnisse; da ferner von den Factoren der Anzahl  $a(n, n, n)$  keiner verschwindet, so giebt es in diesem Falle stets eine sofort angebbare Zahl von Geraden, welche drei reelle Punkte  $P_n$  enthalten.

II. Fall.

$$n = 2^l p^a q^b r^c \dots$$

Nach dem Vorangegangenen ist ebenfalls zu setzen:

$$A_{2^l} = (2^2 - 1)2^{2(l-1)} \quad \text{und} \quad S_{2^l} = \sum_{\lambda=0}^{l-1} A_{2^\lambda} = 2^{2(l-1)}.$$

Die Anzahl der Punkte  $P_n$  ist dann

$$A_n = 9 A_{2^l} \cdot A_{p^a} \cdot A_{q^b} \cdot A_{r^c} \dots$$

Die Punkte  $P_n$  entstehen durch  $l$ maliges Tangentenlegen aus den Punkten  $P_n$  von Fall I. Geschlossene Polygone aus Tangenten giebt es keine mehr, vielmehr schneiden sich die Tangenten der Punkte  $P_n$  zu vier in den Punkten  $2^{l-1} \cdot p^a \cdot q^b \cdot r^c \dots$ . Diese Punkte machen denn auch für die Vertheilung der Geraden eine in den Formeln erkennbare Ausnahme.

Ist, wie bis anhin, Gleichheit ausgeschlossen, so ist:

1) für  $\lambda < l, \alpha < a, \beta < b, \gamma < c \dots$  u. s. f.

$$a(2^l p^a q^b r^c \dots, n, n) = \frac{A_n}{2} 9 A_{2^\lambda} A_{p^\alpha} A_{q^\beta} A_{r^\gamma} \dots$$

Das heisst, die Punkte  $P_n$  liegen wiederum gleichförmig in Paaren auf



Strahlen durch alle Punkte  $2^l p^a q^b r^c \dots$ , für welche keiner der Exponenten die obere Grenze erreicht.

2) Ist  $\lambda = l - 1$  und erreichen zugleich einige der Exponenten  $\alpha, \beta, \gamma \dots$  die obere Grenze  $a, b, c \dots$  resp. so treten für die Grössen  $A_{p^a}, A_{q^b}, A_{r^c} \dots$  wiederum die Differenzen  $(A_{p^a} - S_{p^a}), (A_{q^b} - S_{q^b}), (A_{r^c} - S_{r^c}) \dots$  resp. ein. Man hat daher etwa für

$$\lambda = l - 1, \alpha = a, \beta = b, \gamma < c \dots \text{ u. s. w.},$$

$$a(2^{l-1} p^a q^b r^c \dots, n, n) = \frac{A_n}{2} 9 A_{2^{l-1}} (A_{p^a} - S_{p^a}) (A_{q^b} - S_{q^b}) A_{r^c} \dots,$$

so dass durch jeden Punkt  $2^{l-1} p^a q^b r^c \dots$

$$\frac{9}{2} A_{2^l} (A_{p^a} - S_{p^a}) (A_{q^b} - S_{q^b}) A_{r^c} \dots$$

Geraden des Systems hindurchgehen.

3) Ist  $\lambda = l - 1$  und sind zugleich sämtliche Exponenten  $\alpha, \beta, \gamma \dots$  gleich der oberen Grenze, das heisst, ist

$$\lambda = l - 1, \alpha = a, \beta = b, \gamma = c \dots \text{ u. s. w.}, \text{ so ist:}$$

$$a(2^{l-1} p^a q^b r^c \dots, n, n) = \frac{A_n}{2} [9 A_{2^{l-1}} (A_{p^a} - S_{p^a}) (A_{q^b} - S_{q^b}) (A_{r^c} - S_{r^c}) \dots - 1].$$

Somit gehen durch jeden Punkt mit der Zahl  $2^{l-1} p^a q^b r^c \dots$

$$\frac{1}{2} [9 A_{2^l} (A_{p^a} - S_{p^a}) (A_{q^b} - S_{q^b}) (A_{r^c} - S_{r^c}) \dots - 4]$$

der fraglichen Geraden.

4) Ist der Weitere  $\lambda = l$  und erreicht keiner der Exponenten den grössten Werth, das heisst, ist

$$\lambda = l, \alpha < a, \beta < b, \gamma < c \dots \text{ u. s. w.}, \text{ so ist:}$$

$$a(2^l p^a q^b r^c \dots, n, n) = \frac{A_n}{2} 9 (A_{2^l} - S_{2^l}) A_{p^a} A_{q^b} A_{r^c} \dots$$

so dass durch jeden Punkt  $2^l p^a q^b r^c \dots$

$$\frac{9}{2} (A_{2^l} - S_{2^l}) A_{p^a} A_{q^b} A_{r^c} \dots$$

Geraden vorliegender Art gehen.

5) Erreichen dagegen sämtliche Exponenten die obere Grenze, das heisst, ist:

$$\lambda = l, \alpha = a, \beta = b, \gamma = c \dots, \text{ so ist:}$$

$$a(n, n, n) = \frac{A_n}{6} 9 (A_{2^l} - S_{2^l}) (A_{p^a} - S_{p^a}) (A_{q^b} - S_{q^b}) (A_{r^c} - S_{r^c}) \dots$$

Damit ist die Gesamtheit der Geraden des Systems der Punkte  $P_n$  erschöpft, die Tangenten in diesen Punkten gehören nicht mehr dem System an. Bezüglich der Realität sind in diesem Falle die beiden Curvenarten auseinander zu halten.

a) Die eintheilige Curve. Setzt man in den vorangehenden Formeln an Stelle des Factors 9 die Zahl 3, ferner für alle Quadrate der Primfactoren die einfachen Primzahlen, also:

$$A_1^r = 1, A_{2^l}^r = (2-1)2^{l-1}, A_{p^a}^r = (p-1)p^{a-1}, A_{p^b}^r = (q-1)q^{b-1} \text{ u. s. f.,}$$

so ergeben die Formeln die Geraden des Systems durch die reellen Punkte  $P_n$ .

Da in diesem Falle der Factor

$$A_{2^l}^r - S_{2^l}^r = 2^{l-1} - \left(1 + \sum_{\lambda=1}^{l-1} 2^{\lambda-1}\right) = 0$$

ist, so treten in keinem Falle Gerade mit drei reellen Punkten  $P_n$  auf.

b) Zweitheilige Curve. Hier ist mit Ausnahme des Falles  $l=1$  zu setzen:

$$A_{2^l}^r = 2^l,$$

die übrigen Grössen, wie vorhin. Auch hier ergibt sich für  $l > 1$ , dass die Anzahl der Geraden mit drei reellen Punkten  $P_n$  verschwindet. Für  $l=1$  dagegen, also mit  $A_2^r = 3$  ist  $a_3(n, n, n)$  von Null verschieden, und es gehören dann zu allen Werthen von  $a, b, c \dots$  Gerade mit drei reellen Punkten  $P_n$ .

So findet für  $n=10$  beispielsweise folgendes Verhalten statt:

$$A_2^r = 3, A_5^r = 4.$$

Von den Verbindungslinien der 36 reellen Punkte  $P_{10}$  gehen 54 Geraden durch die Wendepunkte  $P_1$ , 108 Geraden durch die Punkte  $P_2$ , 144 Geraden durch die Punkte  $P_5$ , 108 Gerade enthalten drei Punkte  $P_{10}$ .

## B. Rationale Curven dritter Ordnung.

### 8.

a) Die Curve mit isolirtem Doppelpunkt. Fig. 3 zeigt die Möglichkeit, sofort zur Curve  $C_3$  mit isolirtem Doppelpunkt überzugehen. Diese ist vollständig bestimmt durch den Doppelpunkt  $H_0$ , die drei Wendepunkte  $P_1$  und die drei reellen Punkte  $P_2$ . Bezeichnet man mit  $a$  den Radius des dreifach berührenden Kreises durch die Punkte  $P_2$ , so beschreibe man jetzt den Kreis  $K$  vom Radius  $2a$ ; dieser begegnet dann der  $C_3$  in sechs Punkten, die durch Dreitheilung des Sextanten erhalten werden und die Punkte  $P_6$  sind. Diese sechs Punkte bestimmen dann die Seiten zweier regulärer Dreiecke, welche der  $C_3$  in den Punkten  $P_3$  begegnen, und aus  $H_0$  projecirt in die Halbirungspunkte der vorigen Theilpunkte dieses Kreises  $K$  fallen.

Projecirt man also die Punkte  $P_1, P_2, P_3, P_6$  aus dem Doppelpunkt  $H_0$  auf den Kreis  $K$ , so fallen sie sämmtlich in die Theilpunkte einer 36-Theilung dieses Kreises, welche von den Projectionen der Punkte  $P_1$  ausgeht.







der aufgezählten Art für die rationale Curve und die reellen für die beiden allgemeinen Curven sind.

Nach einem zahlentheoretischen Satze\* kann übrigens für die gesuchte Anzahl  $a_t$  ein directer Ausdruck aufgestellt werden, welcher nur eine andere Schreibweise obiger Recursionsformel ist. Man hat nämlich für die rationale Curve, wenn  $p, q, \dots$  die verschiedenen in  $t$  enthaltenen Primzahlen bedeuten:

$$t.a_t = \left| (-2)^t - 1 \right| - \sum_p \left| (-2)^{\frac{t}{p}} - 1 \right| + \sum_{p,q} \left| (-2)^{\frac{t}{p \cdot q}} - 1 \right| - \dots,$$

und ebenso für die allgemeinen Curven:

$$t.a_t = [(-2)^t - 1]^2 - \sum_p [(-2)^{\frac{t}{p}} - 1]^2 + \sum_{p,q} [(-2)^{\frac{t}{p \cdot q}} - 1]^2 - \dots$$

Die nicht reellen Polygone treten stets in Paaren conjugirt imaginär auf. Für beide Arten der allgemeinen Curve findet man darnach:

24 Dreiecke, 56 Vierecke, 216 Fünfecke, 648 Sechsecke, 2376 Siebenecke, 8100 Achtecke (324 solche aus Punkten  $P_{17}$  und 7776 solche aus Punkten  $P_{5,17}$ ), 29232 Neunecke (72 solche aus Punkten  $P_9$ ; 360 solche aus Punkten  $P_{19}$ ; 2880 weitere aus Punkten  $P_{3,19}$  und 25920 Polygone aus Punkten  $P_{3,19}^2$ ) u. s. f.

Eine ausführlichere Darstellung soll noch für  $t=12$  hinzugefügt werden. In der Configuration  $n=3.5.7$  traten drei verschiedene Arten von Zwölfecken auf. Wir fragen jetzt nach der Anzahl der verschiedenen Arten der reellen Zwölfecke der rationalen Curve überhaupt.

In diesem Falle haben wir  $x$  so zu bestimmen, dass:

$$(-2)^{12} \equiv 1 \pmod{3x}.$$

Nun ist:  $T = (-2)^{12} - 1 = 3n = 3.3.5.7.13.$

Die Factoren  $f$  von  $t=12$  sind im Weiteren: 2, 3, 4, 6. Somit ist  $(-2)^{12} - 1$  theilbar durch:

$$(-2)^2 - 1, \quad (-2)^3 - 1, \quad (-2)^4 - 1; \quad (-2)^6 - 1.$$

Unter den Divisoren  $x$  von  $n$  sind demnach auszuscheiden die Werthe

$$x = 3, \quad 5, \quad 7, \quad 3.7$$

und bleiben als noch in Betracht kommende Werthe von  $x$ :

$$x = 13, \quad 5.7, \quad 5.13, \quad 7.13, \quad 5.7.13, \quad 3.5, \quad 3.13, \quad 3.5.7; \\ 3.5.13, \quad 3.7.13, \quad 3.5.7.13.$$

Theilt man also von der Richtung  $P_1$  aus den Kreis in  $2(2^{12} - 1)$  gleiche Theile, so enthält die Configuration:

die drei Wendepunkte  $P_1$ ,

zwei Dreiecke aus Punkten  $P_3$ ,

drei Vierecke aus Punkten  $P_5$ ,

neun Sechsecke, zwei Arten aus Punkten  $P_7$  und  $P_{3,7}$ .

\* Vergl. Dedekind: „Zahlentheorie“, II. Abtheilung, S. 361.

Dazu kommen die verlangten Zwölfecke in elf verschiedenen Arten, nämlich:

3 Zwölfecke aus Punkten $P_{13}$				2 Zwölfecke aus Punkten $P_{3.5}$			
6	"	"	"	$P_{5.7}$	6	"	"
12	"	"	"	"	12	"	"
18	"	"	"	"	24	"	"
72	"	"	"	"	36	"	"
					144	"	"

Zusammen 335 reelle Zwölfecke, die der  $C_3$  zugleich auf- und umgeschrieben sind. In der That ist:

$$a_{12} = \frac{1}{12} \{ [(-2)^{12} - 1] - [(-2)^{\frac{12}{2}} - 1] - [(-2)^{\frac{12}{3}} - 1] + [(-2)^{\frac{12}{2 \cdot 3}} - 1] \} = 335.$$

Andere als die durch diese Configurationen hervorgetretenen geschlossenen Tangentenpolygone giebt es nicht auf den Curven dritter Ordnung.

c) Construirt man zu dem in  $P$  fünfpunktig osculirenden Kegelschnitt  $C_2$  den letzten Schnittpunkt 6, so ist dieser nach (I), falls  $P$  in einen Punkt  $P_n$  verlegt wird, alle Mal wieder ein Punkt des zu  $n$  gehörigen Involutionselementes. Construirt man in dieser Weise fortlaufend zu jedem vorangehenden Punkt den zugehörigen Punkt 6, so kann es vorkommen, dass die Punkte sämtlich Punkte  $P_n$  sind und die Kegelschnittreihe sich mit  $k$  Individuen schliesst. Dann ist die Anzahl  $k$  der Kegelschnitte der geschlossenen Reihe die kleinste Lösung der Congruenz:

$$(-5)^k \equiv 1 \pmod{3n}.$$

Und offenbar wiederholen sich hier die unter b) beantworteten Fragen. So gehen beispielsweise die vier in den reellen Punkten  $P_6$  osculirenden Kegelschnitte sämtlich durch den zugehörigen Wendepunkt; die Punkte  $P_7$  führen auf Reihen von 3, ebenso die Ecken der Neunseite erster Art zu Reihen von 3, die Punkte  $P_{11}$  dagegen zu Reihen von 10 Kegelschnitten u. s. f.

Für Curven höherer als zweiter Ordnung ist zwar der letzte Schnittpunkt vollkommen bestimmt und geschlossene Reihen werden im Allgemeinen für jede Ordnung der berührenden Curven eintreten, dagegen ist in allen diesen Fällen durch die Berührungsstelle die Curve nicht mehr eindeutig bestimmt.

Zürich, Herbst 1892.

## XV.

# Einige Methoden der Bestimmung der Brennpunkts- Coordinationen und Achsengleichungen eines Kegelschnitts in trimetrischen Coordinationen.

Von

Dr. STOLL,

Gymnasiallehrer in Bensheim.

### A. Die Brennpunkte.

Die Gleichung eines Kegelschnittes sei

$$1) \quad K = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2 = 0$$

und  $A_{11}$ ,  $A_{22}$ ,  $A_{33}$ ,  $A_{23}$ ,  $A_{31}$ ,  $A_{12}$  seien die Unterdeterminanten seiner Determinante  $\Delta$ ; ferner setze man:

$$2) \quad \begin{cases} A_1 = A_{11} \sin \alpha + A_{12} \sin \beta + A_{13} \sin \gamma, \\ A_2 = A_{21} \sin \alpha + A_{22} \sin \beta + A_{23} \sin \gamma, \\ A_3 = A_{31} \sin \alpha + A_{32} \sin \beta + A_{33} \sin \gamma, \end{cases}$$

$$3) \quad \begin{cases} A = A_1 \sin \alpha + A_2 \sin \beta + A_3 \sin \gamma = A_{11} \sin^2 \alpha + A_{22} \sin^2 \beta + A_{33} \sin^2 \gamma \\ \quad + 2A_{23} \sin \beta \sin \gamma + 2A_{31} \sin \gamma \sin \alpha + 2A_{12} \sin \alpha \sin \beta. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgen nach bekannten Sätzen die anderen:

$$4) \quad \begin{cases} a_{11}A_1 + a_{12}A_2 + a_{13}A_3 = \Delta \sin \alpha, \\ a_{21}A_1 + a_{22}A_2 + a_{23}A_3 = \Delta \sin \beta, \\ a_{31}A_1 + a_{32}A_2 + a_{33}A_3 = \Delta \sin \gamma, \end{cases}$$

$$5) \quad a_{11}A_1^2 + a_{22}A_2^2 + a_{33}A_3^2 + 2a_{23}A_2A_3 + 2a_{31}A_3A_1 + 2a_{12}A_1A_2 = \Delta A.$$

Hierzu kommt noch die Beziehung

$$6) \quad M = 2r \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = x_1 \sin \alpha + x_2 \sin \beta + x_3 \sin \gamma,$$

wo  $r$  den Radius des Umkreises und  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  die absoluten trimetrischen Coordinationen eines Punktes, das heisst die senkrechten Abstände desselben von den Seiten des Fundamentaldreiecks bedeuten. Endlich sind ganz allgemein die relativen Coordinationen des Kegelschnitt-Mittelpunktes gegeben durch die Gleichung:

$$7) \quad x_1 : x_2 : x_3 = A_1 : A_2 : A_3.$$





muss nach dem an die Spitze gestellten Satze gleich dem negativen Quadrat einer der Halbachsen sein, das heisst, es muss

$$(x_1 - x_1')(x_1 - x_1'') = -\varrho^2$$

oder entwickelt

$$x_1^2 - (x_1' + x_1'')x_1 + x_1'x_1'' = -\varrho^2$$

sein. Nun ist aber

$$x_1' + x_1'' = \frac{2MA_1}{A} \text{ und } x_1'x_1'' = \frac{M^2A_{11}}{A};$$

daher bekommt man als Gleichung, die die Abstände  $x_1$  eines Brennpunktpaares von  $BC$  giebt:

$$8) \quad Ax_1^2 - 2MA_1x_1 + M^2A_{11} = -\varrho^2A.$$

Diese ganze Entwicklung gilt natürlich nur für Centralkegelschnitte, nicht aber für die Parabel, weil der eine Brennpunkt derselben in unendlicher Ferne liegt und deshalb seine Coordinaten unendlich gross sind. Wie man dieselbe trotzdem theilweise nutzbar machen kann, soll später gezeigt werden.

Aus 8) folgt

$$x_1 = \frac{M}{A} \left( A_1 \pm \sqrt{A_1^2 - AA_{11} - \frac{\varrho^2A^2}{M^2}} \right);$$

ähnlich gebildete Werthe findet man für  $x_2$  und  $x_3$ . Die Gleichungen 2) und 3) geben aber

$$\begin{cases} A_1^2 - AA_{11} = -(A_{11}A_{22} - A_{12}^2)\sin^2\beta - (A_{33}A_{11} - A_{31}^2)\sin^2\gamma \\ \quad + 2(A_{31}A_{12} - A_{23}A_{11})\sin\beta\sin\gamma = \Delta(-a_{33}\sin^2\beta - a_{22}\sin^2\gamma + 2a_{23}\sin\beta\sin\gamma); \end{cases}$$

setzt man daher

$$9) \quad \begin{cases} -a_{33}\sin^2\beta - a_{22}\sin^2\gamma + 2a_{23}\sin\beta\sin\gamma = e_1, \\ -a_{11}\sin^2\gamma - a_{33}\sin^2\alpha + 2a_{31}\sin\gamma\sin\alpha = e_2, \\ -a_{22}\sin^2\alpha - a_{11}\sin^2\beta + 2a_{12}\sin\alpha\sin\beta = e_3, \end{cases}$$

so ist 9a):

$$A_1^2 - A_{11}A = \Delta e_1, \quad A_2^2 - A_{22}A = \Delta e_2, \quad A_3^2 - A_{33}A = \Delta e_3$$

und bezeichnet man die Grösse  $\frac{\varrho^2A^2}{M^2\Delta}$  kurzweg mit  $\lambda^2$ , so geht obige Gleichung für  $x_1$  über in:

$$10) \quad x_1 = \frac{M}{A} (A_1 \pm \sqrt{\Delta(e_1 - \lambda^2)}).$$

Um den Werth von  $\lambda$  zu finden, multiplicire man diese Gleichung und die zwei ähnlich gebildeten der Reihe nach mit  $\sin\alpha$ ,  $\sin\beta$ ,  $\sin\gamma$  und addire, so kommt, weil  $x_1\sin\alpha + x_2\sin\beta - x_3\sin\gamma = M$  ist und der Factor  $M$  sich weghebt:

$$11) \quad \sin\alpha\sqrt{e_1 - \lambda^2} + \sin\beta\sqrt{e_2 - \lambda^2} + \sin\gamma\sqrt{e_3 - \lambda^2} = 0.$$

Die Rationalisirung liefert die nach Potenzen von  $\lambda$  geordnete Gleichung:

$$\begin{cases} 4\lambda^4\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma + 2\lambda^2\{e_1\sin^2\alpha(\sin^2\alpha - \sin^2\beta - \sin^2\gamma) \\ \quad + e_2\sin^2\beta(\sin^2\beta - \sin^2\gamma - \sin^2\alpha) + e_3\sin^2\gamma(\sin^2\gamma - \sin^2\alpha - \sin^2\beta)\} \\ \quad - (e_1^2\sin^4\alpha + e_2^2\sin^4\beta + e_3^2\sin^4\gamma - 2e_2e_3\sin^2\beta\sin^2\gamma \\ \quad - 2e_3e_1\sin^2\gamma\sin^2\alpha - 2e_1e_2\sin^2\alpha\sin^2\beta) = 0. \end{cases}$$



$$\left\{ \begin{aligned} &4 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma \{ (a_{22} a_{33} - a_{23}^2) \sin^2 \alpha + (a_{33} a_{11} - a_{31}^2) \sin^2 \beta + (a_{11} a_{22} \\ &\quad - a_{12}^2) \sin^2 \gamma + 2(a_{31} a_{12} - a_{11} a_{23}) \sin \beta \sin \gamma + 2(a_{12} a_{23} \\ &\quad - a_{22} a_{31}) \sin \gamma \sin \alpha + 2(a_{23} a_{31} - a_{33} a_{12}) \sin \alpha \sin \beta \}, \end{aligned} \right.$$

das heisst:

$$4 A \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma.$$

In Folge dieser Reductionen erhält obige Gleichung in  $\lambda$  jetzt folgende Gestalt:

$$14) \quad \lambda^4 + e \lambda^2 + A = 0,$$

woraus  $\lambda^2 = \frac{1}{2} (-e \pm \sqrt{e^2 - 4A})$  folgt; dadurch verwandelt sich aber die Gleichung 10) in folgende:

$$15) \quad x_1 = \frac{M}{A} \left( A_1 \pm \sqrt{\frac{1}{2} \Delta (2e_1 + e) \pm \frac{1}{2} \Delta \sqrt{e^2 - 4A}} \right),$$

so dass die Coordinaten des Brennpunktes jetzt vollständig bestimmt sind.

In Folge der Biformität der Wurzel  $\sqrt{e^2 - 4A}$  erhält man vier Werthe für  $x_1$ , von denen zwei den reellen, die anderen zwei den imaginären Brennpunkten angehören; es fragt sich nur, wie diese Werthe zu vertheilen sind. Man hat hier zwei Fälle zu unterscheiden; ist nämlich  $\Delta$  positiv, so giebt das positive Zeichen der Wurzel  $\sqrt{e^2 - 4A}$  die Coordinaten der reellen Brennpunkte, ist aber  $\Delta$  negativ, so muss man, um die Coordinaten der reellen Brennpunkte zu erhalten, das negative Zeichen dieser Wurzel nehmen. Diese Behauptung erweist sich als wahr, sobald man darthun kann, dass der absolute Werth von  $2e_1 + e$ , abgesehen davon, ob er positiv oder negativ ist, kleiner sei als  $\sqrt{e^2 - 4A}$ , oder, was dasselbe ist, dass

$$(2e_1 + e)^2 - (e^2 - 4A), \text{ das heisst } 4(e_1^2 + ee_1 + A)$$

unter allen Umständen negativ sei. Dies ist aber in der That der Fall; denn multiplicirt man diesen Ausdruck mit  $\sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma$ , so erhält man mit Berücksichtigung der Gleichung 13) und des oben gefundenen Werthes von  $4A \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma$ :

$$\left\{ \begin{aligned} &4e_1^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma \\ &- 4e_1 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma (e_1 \sin \alpha \cos \alpha + e_2 \sin \beta \cos \beta + e_3 \sin \gamma \cos \gamma) - e_1^2 \sin^4 \alpha \\ &- e_2^2 \sin^4 \beta - e_3^2 \sin^4 \gamma + 2e_2 e_3 \sin^2 \beta \sin^2 \gamma + 2e_3 e_1 \sin^2 \gamma \sin^2 \alpha + 2e_1 e_2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta, \end{aligned} \right.$$

was man nach einigen Rechnungen auf

$$- \{ -e_1 \sin \alpha \sin(\beta - \gamma) + e_2 \sin^2 \beta + e_3 \sin^2 \gamma \}^2$$

reduciren kann.

Beispiel 1. Die Gleichung der Ellipse, die unter allen umgeschriebenen Ellipsen den kleinsten Flächeninhalt hat, der sogenannten Steiner'schen Ellipse, ist

$$\frac{x_2 x_3}{\sin \alpha} + \frac{x_3 x_1}{\sin \beta} + \frac{x_1 x_2}{\sin \gamma} = 0;$$

hier ist:

$$A_1 = \frac{1}{\sin \alpha}, \quad A_2 = \frac{1}{\sin \beta}, \quad A_3 = \frac{1}{\sin \gamma}, \quad A = 3,$$

$$\Delta = \frac{2}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}, \quad e_1 = \frac{2 \sin \beta \sin \gamma}{\sin \alpha},$$

$$e = -2 \cdot \frac{\sin \beta \sin \gamma \cos \alpha + \sin \gamma \sin \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} = -2 \frac{1 + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}$$

oder, wenn man den Brocard'schen Winkel  $\vartheta$  einführt, für welchen

$$1 + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \cotg \vartheta \text{ ist, } e = -2 \cotg \vartheta,$$

also:

$$e^2 - 4A = 4(\cotg^2 \vartheta - 3);$$

daher ist:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} r \sin \beta \sin \gamma \\ \pm \frac{2}{3} r \sqrt{2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \left[ \frac{2 \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cotg \vartheta}{\sin \alpha} \pm \sqrt{\cotg^2 \vartheta - 3} \right]}; \end{cases}$$

das positive Zeichen von  $\sqrt{\cotg^2 \vartheta - 3}$  gehört gemäss obiger Regel den reellen Brennpunkten an.

Beispiel 2. Die Ellipse, welche die Seiten des Dreiecks  $ABC$  in den Fusspunkten der Höhen berührt, hat die Gleichung

$$\begin{cases} x_1^2 \cos^2 \alpha + x_2^2 \cos^2 \beta + x_3^2 \cos^2 \gamma - 2x_2 x_3 \cos \beta \cos \gamma - 2x_3 x_1 \cos \gamma \cos \alpha \\ - 2x_1 x_2 \cos \alpha \cos \beta = 0 \end{cases}$$

und für sie ist

$$A_1 = 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \sin \alpha, \quad A_2 = 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \sin \beta, \quad A_3 = 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \sin \gamma,$$

$$A = 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma) = 4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \cotg \vartheta,$$

$$\Delta = -4 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta \cos^2 \gamma, \quad e_1 = -\sin^2 \alpha, \quad e = 1 + 4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma,$$

$$e^2 - 4A = 1 - 8 \cos \alpha.$$

Dies giebt:

$$\begin{cases} x_1 = r \sin \alpha \tg \vartheta \\ \pm r \tg \vartheta \sqrt{\frac{1}{2} [-(1 - 2 \sin^2 \alpha + 4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma) \pm \sqrt{1 - 8 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}]}; \end{cases}$$

hier ist für die reellen Brennpunkte der positive Werth von  $\sqrt{1 - 8 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}$  zu nehmen.

Wenn man in die Gleichung 14) den Werth von  $\lambda^2 = \varrho^2 A^2 : M^2 \Delta$  wieder einführt, so sind ihre Wurzeln  $\varrho_1^2$  und  $\varrho_2^2$  die Quadrate der Halbachsen des Kegelschnitts, und zwar gelten dann die Relationen:

$$16) \quad \varrho_1^2 + \varrho_2^2 = -\frac{M^2 \Delta e}{A^2} \text{ und } \varrho_1^2 \varrho_2^2 = \frac{M^4 \Delta^2}{A^3}.$$

Diese kann man benutzen, um die Arten der verschiedenen Kegelschnitte zu unterscheiden.

I. Bei der Ellipse müssen  $\varrho_1^2$  und  $\varrho_2^2$  zugleich positiv sein; also ist der Kegelschnitt eine Ellipse, wenn  $A$  positiv ist und  $\Delta$  und  $e$  entgegen-

gesetzte Zeichen haben. Hätten  $\Delta$  und  $e$  bei positivem  $A$  gleiche Zeichen, so wären die Achsen imaginär.

Für den speciellen Fall des Kreises ist  $\varrho_1^2 = \varrho_2^2$ , also

$$2\varrho^2 = -\frac{M^2 \Delta e}{A^2} \quad \text{und} \quad \varrho^4 = \frac{M^4 \Delta^2}{A^3},$$

woraus durch Elimination von  $\varrho^2$  die Bedingung  $e^2 - 4A = 0$  folgt, die die andere, dass  $A$  positiv sei, einschliesst, und deshalb für sich allein schon genügt, den Kreis zu definiren. Weil beim Kreise die vier Brennpunkte mit seinem Mittelpunkte zusammenfallen, so muss in Gleichung 15) der Hauptradikand verschwinden; daraus könnte man versucht sein, zu schliessen, die Bedingung  $e^2 - 4A = 0$  sei für sich allein nicht genügend, sondern es müssten noch die drei Nebenbedingungen

$$2e_1 + e = 2e_2 + e = 2e_3 + e = 0,$$

bezüglich die zwei  $e_1 = e_2 = e_3$ , erfüllt sein. Es lässt sich jedoch zeigen, dass das Eintreffen jener Hauptbedingung von selbst das dieser Nebenbedingungen nach sich zieht. Erhebt man nämlich Gleichung 13) in's Quadrat und zieht davon die schon mehrfach benutzte Gleichung

$$\begin{cases} 4A \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma = -e_1^2 \sin^4 \alpha - e_2^2 \sin^2 \beta - e_3^2 \sin^2 \gamma + 2e_2 e_3 \sin^2 \beta \sin^2 \gamma \\ \quad + 2e_3 e_1 \sin^2 \gamma \sin^2 \alpha + 2e_1 e_2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \end{cases}$$

ab, so erhält man für  $e^2 - 4A = 0$  das Resultat:

$$\begin{cases} e_1^2 \sin^2 \alpha + e_2^2 \sin^2 \beta + e_3^2 \sin^2 \gamma - 2e_2 e_3 \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha - 2e_3 e_1 \sin \gamma \sin \alpha \cos \beta \\ \quad - 2e_1 e_2 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma = 0, \end{cases}$$

dem man auch die Form geben kann:

$$(e_2 - e_3)^2 \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha + (e_3 - e_1)^2 \sin \gamma \sin \alpha \cos \beta + (e_1 - e_2)^2 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma = 0.$$

Wenn alle Winkel des Fundamentaldreiecks  $< 90^\circ$  oder einer  $= 90^\circ$  ist, so ergiebt sich hieraus sofort  $e_1 = e_2 = e_3 = 0$ . Ist aber z. B.  $\alpha > 90^\circ$ , so setze man statt  $\cos \alpha$  seinen Werth  $-\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma$  und statt  $\sin \alpha$  seinen Werth  $\sin \beta \cos \gamma + \cos \beta \sin \gamma$ , wodurch man erhält:

$$\begin{cases} (e_2 - e_3)^2 (-\sin \beta \sin \gamma \cos \beta \cos \gamma + \sin^2 \beta \sin^2 \gamma) + (e_3 - e_1)^2 (\sin \beta \sin \gamma \cos \beta \cos \gamma \\ \quad + \sin^2 \gamma \cos^2 \beta) + (e_1 - e_2)^2 (\sin \beta \sin \gamma \cos \beta \cos \gamma + \sin^2 \beta \cos^2 \gamma) = 0, \end{cases}$$

oder anders geordnet:

$$\begin{cases} (e_2 - e_3)^2 \sin^2 \beta \sin^2 \gamma + (e_3 - e_1)^2 \sin^2 \gamma \cos^2 \beta + (e_1 - e_2)^2 \sin^2 \beta \cos^2 \gamma \\ \quad + \sin \beta \sin \gamma \cos \beta \cos \gamma \} - (e_2 - e_3)^2 + (e_3 - e_1)^2 + (e_1 - e_2)^2 \} = 0. \end{cases}$$

Aus der Identität  $e_2 - e_3 = -(e_3 - e_1) - (e_1 - e_2)$  ergiebt sich aber  $(e_2 - e_3)^2 = (e_3 - e_1)^2 + (e_1 - e_2)^2 + 2(e_3 - e_1)(e_1 - e_2)$ , also geht der letzte Klammerausdruck über in  $2(e_3 - e_1)(e_1 - e_2)$ , und man erhält statt obiger Gleichung:

$$(e_2 - e_3)^2 \sin^2 \beta \sin^2 \gamma + \{ (e_3 - e_1) \sin \gamma \cos \beta + (e_1 - e_2) \sin \beta \cos \gamma \}^2 = 0.$$



sind denen des früheren. Daher verhalten sich auch die Abstände des unendlich fernen Brennpunktes von den Seiten desjenigen Dreiecks, das durch die zu  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  parallelen Tangenten an den Kegelschnitt gebildet wird, wie  $A_1 : A_2 : A_3$ . Da aber bei jedem in ein Dreieck eingeschriebenen Kegelschnitt die Abstände des einen Brennpunktes von den Seiten sich umgekehrt verhalten, wie die des anderen, so sind die Verhältnisse der Abstände des im Endlichen gelegenen Brennpunktes der Parabel von den Seiten des erwähnten Tangentendreiecks reciprok zu den Verhältnissen der Abstände des unendlich fern gelegenen, haben also die relativen

Werthe  $\frac{1}{A_1} : \frac{1}{A_2} : \frac{1}{A_3}$ , und ihre absoluten Werthe kann man gleich setzen

$\frac{M\lambda}{2} \cdot \frac{1}{A_1}, \frac{M\lambda}{2} \cdot \frac{1}{A_2}, \frac{M\lambda}{2} \cdot \frac{1}{A_3}$ , wo  $\lambda$  eine Constante ist, der ebenfalls

constante Factor  $\frac{M}{2}$  nur deshalb beigesetzt ist, um den folgenden Rechnungen eine grössere Eleganz zu verleihen. In der oben gefundenen Gleichung:

$$Ax_1^2 - 2MA_1x_1 + M^2A_{11} = 0,$$

welche die Abstände der zwei zu  $BC$  parallelen Tangenten des Kegelschnitts von der Seite  $BC$  angab, ist für die Parabel  $A = 0$ , also der Abstand der zu  $BC$  parallelen Tangente der Parabel von  $BC$  gleich  $MA_{11} : 2A_1$ ; addirt man dazu den eben gefundenen Werth des Abstands des Brennpunktes von dieser Tangente, nämlich  $\frac{M\lambda}{2} \cdot \frac{1}{A_1}$ , so wird der Abstand des Brennpunktes von  $BC$ :

$$17) \quad x_1 = \frac{M(A_{11} + \lambda)}{2A_1};$$

ähnliche Gleichungen findet man für  $x_2$  und  $x_3$ . Multiplicirt man aber die erste dieser Gleichungen mit  $\sin \alpha$ , die zweite mit  $\sin \beta$ , die dritte mit  $\sin \gamma$  und addirt, so kommt

$$M = \frac{M}{2} \left\{ \frac{(A_{11} + \lambda) \sin \alpha}{A_1} + \frac{(A_{22} + \lambda) \sin \beta}{A_2} + \frac{(A_{33} + \lambda) \sin \gamma}{A_3} \right\},$$

woraus

$$\lambda = - \frac{A_{11}A_2A_3\sin\alpha + A_{22}A_3A_1\sin\beta + A_{33}A_1A_2\sin\gamma - 2A_1A_2A_3}{A_2A_3\sin\alpha + A_3A_1\sin\beta + A_1A_2\sin\gamma}$$

folgt. Dieser Ausdruck lässt sich in mehrfacher Weise umformen. Weil nämlich hier  $A = 0$  ist, so geht die Gleichung 3) über in:

$$A_1 \sin \alpha + A_2 \sin \beta + A_3 \sin \gamma = 0;$$

multiplicirt man dieselbe der Reihe nach mit  $A_1 \cos \alpha$ ,  $A_2 \cos \beta$ ,  $A_3 \cos \gamma$  und addirt die Producte, so kommt:

$$\left\{ \begin{aligned} &A_1^2 \sin \alpha \cos \alpha + A_2^2 \sin \beta \cos \beta + A_3^2 \sin \gamma \cos \gamma + A_2 A_3 \sin \alpha + A_3 A_1 \sin \beta \\ &+ A_1 A_2 \sin \gamma = 0. \end{aligned} \right.$$



Wegen  $A = 0$  gehen ferner die Gleichungen 9a) über in  $A_1^2 = \Delta e_1$ ,  $A_2^2 = \Delta e_2$ ,  $A_3^2 = \Delta e_3$ , also wird die letzte Gleichung:

$\Delta(e_1 \sin \alpha \cos \alpha + e_2 \sin \beta \cos \beta + e_3 \sin \gamma \cos \gamma) + A_2 A_3 \sin \alpha + A_3 A_1 \sin \beta + A_1 A_2 \sin \gamma = 0$ ,  
oder wegen Gleichung 13):

$$A_2 A_3 \sin \alpha + A_3 A_1 \sin \beta + A_1 A_2 \sin \gamma = \Delta e \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma;$$

der Werth des Nenners ist also  $\Delta e \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ . Der Zähler kann die Form annehmen:

$$A_{11} A_2 A_3 \sin \alpha + A_3 A_1 (A_{22} \sin \beta - A_2) + A_1 A_2 (A_{33} \sin \gamma - A_3)$$

oder auch

$A_{11} A_2 A_3 \sin \alpha - (A_{12} \sin \alpha + A_{23} \sin \gamma) A_3 A_1 - (A_{31} \sin \alpha + A_{23} \sin \beta) A_1 A_2$   
wegen der Gleichungen 2). Ferner liefert die Quadrirung der Gleichung  $A_1 \sin \alpha = -(A_2 \sin \beta + A_3 \sin \gamma)$  das Resultat:

$$A_1^2 \sin^2 \alpha = A_2^2 \sin^2 \beta + A_3^2 \sin^2 \gamma + 2 A_2 A_3 \sin \beta \sin \gamma,$$

woraus

$$A_2 A_3 = \frac{\Delta(e_1 \sin^2 \alpha - e_2 \sin^2 \beta - e_3 \sin^2 \gamma)}{2 \sin \beta \sin \gamma},$$

oder mit Hinzunahme der Gleichungen 9a)

$$A_2 A_3 = \Delta(a_{11} \sin \beta \sin \gamma + a_{23} \sin^2 \alpha - a_{31} \sin \alpha \sin \beta - a_{12} \sin \gamma \sin \alpha)$$

folgt; ähnliche Werthe erhält man für  $A_3 A_1$  und  $A_1 A_2$ . Der Zähler erhält demnach jetzt die Gestalt:

$$\left\{ \begin{aligned} &\Delta \{ A_{11} \sin \alpha (a_{11} \sin \beta \sin \gamma + a_{23} \sin^2 \alpha - a_{31} \sin \alpha \sin \beta - a_{12} \sin \gamma \sin \alpha) \\ &- (A_{12} \sin \alpha + A_{23} \sin \gamma) (a_{22} \sin \gamma \sin \alpha + a_{31} \sin^2 \beta - a_{12} \sin \beta \sin \gamma - a_{23} \sin \alpha \sin \beta) \\ &- (A_{31} \sin \alpha + A_{23} \sin \beta) (a_{33} \sin \alpha \sin \beta + a_{12} \sin^2 \gamma - a_{23} \sin \gamma \sin \alpha - a_{31} \sin \beta \sin \gamma) \}. \end{aligned} \right.$$

Führt man die Multiplicationen in der grossen Klammer aus und ordnet nach Potenzen von  $\sin \alpha$ ,  $\sin \beta$ ,  $\sin \gamma$ , so ist zunächst der Coefficient von  $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ :  $A_{11} a_{11} + A_{12} a_{12} + A_{13} a_{13}$  oder  $\Delta$ , der von  $\sin^2 \beta \sin \gamma$  ist  $-A_{23} a_{31} + A_{23} a_{31}$  oder Null, der von  $\sin \beta \sin^2 \gamma$  ist  $A_{23} a_{12} - A_{23} a_{12}$  oder Null, der von  $\sin^2 \gamma \sin \alpha$  ist  $-A_{23} a_{22} - A_{31} a_{12}$  oder  $+A_{33} a_{23}$ , der von  $\sin \gamma \sin^2 \alpha$  ist  $-A_{11} a_{12} - A_{12} a_{22} + A_{31} a_{33}$  oder  $2 A_{31} a_{23}$ , der von  $\sin^2 \alpha \sin \beta$  ist  $-A_{11} a_{31} + A_{12} a_{23} - A_{31} a_{33}$ , oder  $2 A_{12} a_{23}$ , der von  $\sin \alpha \sin^2 \beta$  ist  $-A_{12} a_{31} - A_{23} a_{33}$  oder  $A_{22} a_{23}$ , der von  $\sin^3 \alpha$  endlich ist  $A_{11} a_{23}$ . In Folge dieser Reductionen verwandelt sich der Zähler in:

$$\left\{ \begin{aligned} &\Delta [\Delta \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + a_{23} \sin \alpha (A_{11} \sin^2 \alpha + A_{22} \sin^2 \beta + A_{33} \sin^2 \gamma + 2 A_{23} \sin \beta \sin \gamma \\ &\quad + 2 A_{31} \sin \gamma \sin \alpha + 2 A_{12} \sin \alpha \sin \beta)]; \end{aligned} \right.$$

weil aber der Ausdruck in der runden Klammer nach Gleichung 3) gleich  $A = 0$  ist, so hat der Zähler den Werth  $\Delta^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$  und da wir den

des Nenners  $\Delta e \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$  gefunden haben, so ist  $\lambda = -\frac{\Delta}{e}$ . Dies in Gleichung 17) substituirt giebt für die eine Coordinate des endlichen Brennpunkts:

$$18) \quad x_1 = \frac{M(A_{11}e - \Delta)}{2A_1e};$$

(vergl. Salmon-Fiedler a. a. O.) S. 692, wo dieses Resultat durch die Invariantentheorie gewonnen wird.

Für manche Anwendungen ist eine andere Form der Brennpunkts-Coordinate bequemer. Aus dem ersten oben angegebenen Werthe von  $\lambda$  folgt nämlich, wenn man den Nenner gleich  $\Delta e \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$  setzt:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{(A_{11} + \lambda) \Delta e \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{A_1} = A_2(A_{11} \sin \gamma - A_{33} \sin \gamma + A_3) + A_3(A_{11} \sin \beta - A_{22} \sin \beta + A_2) \\ & = (A_{12} \sin \alpha + A_{22} \sin \beta + A_{23} \sin \gamma)(A_{31} \sin \alpha + A_{23} \sin \beta + A_{11} \sin \gamma) \\ & \quad + (A_{31} \sin \alpha + A_{23} \sin \beta + A_{33} \sin \gamma)(A_{12} \sin \alpha + A_{11} \sin \beta + A_{23} \sin \beta) \\ & = A_{23}(A_{22} \sin^2 \beta + A_{33} \sin^2 \gamma + 2 A_{23} \sin \beta \sin \gamma + 2 A_{31} \sin \gamma \sin \alpha + 2 A_{12} \sin \alpha \sin \beta) \\ & \quad + 2 A_{31} A_{12} \sin^2 \alpha + A_{11} A_{23} \sin^2 \beta + A_{11} A_{23} \sin^2 \gamma + A_{11}(A_{22} + A_{33}) \sin \beta \sin \gamma \\ & \quad + A_{12}(A_{33} + A_{11}) \sin \gamma \sin \alpha + A_{31}(A_{11} + A_{22}) \sin \alpha \sin \beta. \end{aligned} \right.$$

Der erste Posten geht über in  $-A_{11} A_{23} \sin^2 \alpha$  und giebt deshalb mit dem dritten, vierten und fünften Posten zusammen:

$$A_{11}(A_{22} + A_{33} + 2 A_{23} \cos \alpha) \sin \beta \sin \gamma;$$

die noch übrigen Posten aber kann man schreiben:

$$\left\{ \begin{aligned} & A_{12}(A_{33} + A_{11} + 2 A_{31} \cos \beta) \sin \gamma \sin \alpha + A_{31}(A_{11} + A_{22} + 2 A_{12} \cos \gamma) \sin \alpha \sin \beta \\ & \quad + 2 A_{31} A_{12} \sin^2 \alpha - 2 A_{31} A_{12} \sin \gamma \sin \alpha \cos \beta - 2 A_{31} A_{12} \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma; \end{aligned} \right.$$

hier verschwinden wieder die drei letzten Posten, und wenn man noch zur Abkürzung

$$19) \quad \left\{ \begin{aligned} & A_{12} + A_{33} + 2 A_{23} \cos \alpha = P, \\ & A_{33} + A_{11} + 2 A_{31} \cos \beta = Q, \\ & A_{11} + A_{22} + 2 A_{12} \cos \gamma = R \end{aligned} \right.$$

setzt, so hat man endlich:

$$20) \quad x_1 = \frac{M}{2\Delta e \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} (PA_{11} \sin \beta \sin \gamma + QA_{12} \sin \gamma \sin \alpha + RA_{13} \sin \alpha \sin \beta).$$

Da nun die Directrix die Polare des Brennpunkts ist, so ergiebt sich hieraus sofort die Gleichung derselben in der Gestalt:

$$21) \quad Px_1 \sin \beta \sin \gamma + Qx_2 \sin \gamma \sin \alpha + Rx_3 \sin \alpha \sin \beta = 0$$

(vergl. Köhler a. a. O. S. 162).

Beispiel. Es sei gegeben die Gleichung:

$$\left\{ \begin{aligned} & x_1^2 \sin^2 \alpha + x_2^2 (\sin^2 \gamma - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta) + x_3^2 (\sin^2 \beta - \sin^2 \gamma \sin^2 \alpha) \\ & \quad + 2x_2 x_3 \sin \beta \sin \gamma \cos^2 \alpha - 2x_3 x_1 \sin \alpha \sin \beta \cos \alpha - 2x_1 x_2 \sin \gamma \sin \alpha \cos \alpha = 0. \end{aligned} \right.$$

Hier ist

$$\begin{aligned} A_{11} &= -\sin^4 \alpha \sin^2 (\beta - \gamma), \quad A_{22} = \sin^5 \alpha \sin (\beta - \gamma), \quad A_{33} = -\sin^5 \alpha \sin (\beta - \gamma), \\ A_{23} &= 0, \quad A_{31} = -\sin^4 \alpha \sin \beta \cos \alpha \sin (\beta - \gamma), \quad A_{12} = \sin^4 \alpha \sin \gamma \cos \alpha \sin (\beta - \gamma), \\ \text{also } A_1 &= -\sin^5 \alpha \sin^2 (\beta - \gamma), \quad A_2 = \sin^5 \alpha (\sin \beta + \sin \gamma \cos \alpha) \sin (\beta - \gamma), \\ A_3 &= -\sin^5 \alpha (\sin \gamma + \sin \beta \cos \alpha) \sin (\beta - \gamma), \quad A = 0; \end{aligned}$$



Aus 25) ergibt sich:

$$bc = w_1^2 w_2 w_3 \sin^2 \alpha \sin \beta \sin \gamma, \quad ca = w_1 w_2^2 w_3 \sin \alpha \sin^2 \beta \sin \gamma, \\ ab = w_1 w_2 w_3^2 \sin \alpha \sin \beta \sin^2 \gamma,$$

also:

$$w_1 : w_2 : w_3 = bc \sin \beta \sin \gamma : ca \sin \gamma \sin \alpha : ab \sin \alpha \sin \beta,$$

wodurch die Achsengleichung 24) übergeht in:

$$27) \quad \begin{cases} ax_1 \sin \alpha (A_2 b \sin \beta - A_3 c \sin \gamma) + bx_2 \sin \beta (A_3 c \sin \gamma - A_1 a \sin \alpha) \\ + cx_3 \sin \gamma (A_1 a \sin \alpha - A_2 b \sin \beta) = 0, \end{cases}$$

oder, wenn man zur Abkürzung  $a \sin \alpha = a'$ ,  $b \sin \beta = b'$ ,  $c \sin \gamma = c'$  setzt:

$$27a) \quad a' x_1 (A_2 b' - A_3 c') + b' x_2 (A_3 c' - A_1 a') + c' x_3 (A_1 a' - A_2 b') = 0.$$

Die Werthe von  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ergeben sich in rationaler Form aus den Gleichungen 26), wenn man je zwei derselben addirt und von der Summe die dritte abzieht; so erhält man z. B.  $2a = -w_1 \sin \alpha + w_2^2 \sin^2 \beta + w_3^2 \sin^2 \gamma$ , oder, wenn man  $a \sin \alpha = a'$  setzt und den Factor 2 weglässt, weil es sich ja doch nur um relative Werthe handelt:

$$28) \quad a' = (-w_1^2 \sin^2 \alpha + w_2^2 \sin^2 \beta + w_3^2 \sin^2 \gamma) \sin \alpha;$$

die Ausdrücke  $b'$  und  $c'$  sind ähnlich gebildet.

Setzt man in Gleichung 28) für  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $w_3$  ihre Werthe ein und bezeichnet zur Abkürzung die Wurzel  $\sqrt{e^2 - 4A}$  mit  $W$ , so kommt:

$$a' = [-(2e_1 + e \pm W) \sin^2 \alpha + (2e_2 + e \pm W) \sin^2 \beta + (2e_3 + e \pm W) \sin^2 \gamma] \sin \alpha, \\ \text{oder wegen der Gleichungen 9):}$$

$$\begin{cases} a' = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma (-a_{11} \sin \beta \sin \gamma - a_{23} \sin^2 \alpha + a_{31} \sin \alpha \sin \beta + a_{12} \sin \alpha \sin \gamma) \\ + 2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha (e \pm W), \end{cases}$$

also ist der relative Werth von:

$$29) \quad a' = 2(-a_{23} \sin \alpha + a_{31} \sin \beta + a_{12} \sin \gamma) \sin \alpha - 2a_{11} \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha (e \pm W);$$

ähnliche Formen haben die Ausdrücke für  $b'$  und  $c'$ .

Beispiel 1. Wählt man für die Steiner'sche Ellipse wie oben die Gleichungsform:

$$\frac{x_2 x_3}{\sin \alpha} + \frac{x_3 x_1}{\sin \beta} + \frac{x_1 x_2}{\sin \gamma} = 0,$$

so ist  $e = -2 \cotg \vartheta$  und  $W = 2\sqrt{\cotg^2 \vartheta - 3}$ , also ist mit Weglassung des Factors 2:

$$a' = \sin \alpha - \cos \alpha \cotg \vartheta \pm \cos \alpha \sqrt{\cotg^2 \vartheta - 3} = -\frac{\cos(\alpha + \vartheta)}{\sin \vartheta} \pm W \cos \alpha.$$

Die Gleichung 27 a) liefert dann die Gleichungen der Achsen:

$$\begin{cases} x_1 \sin \alpha \left\{ -\frac{\cos(\alpha + \vartheta)}{\sin \vartheta} \pm W \cos \alpha \right\} \\ \left\{ \sin \beta \frac{\cos(\gamma + \vartheta)}{\sin \vartheta} - \sin \gamma \frac{\cos(\beta + \vartheta)}{\sin \vartheta} \mp W \sin(\beta - \gamma) \right\} + \text{etc.} = 0. \end{cases}$$

Der Factor in der letzten Klammer reducirt sich auf  $(\cotg \vartheta \mp W) \sin(\beta - \gamma)$ , und da  $\cotg \vartheta \mp W$  für je eine Achse constant ist, so kann man es weglassen und bekommt endlich die Achsengleichungen in der Form:

$$x_1 \left\{ \frac{\cos(\alpha + \vartheta)}{\sin \vartheta} \mp W \cos \alpha \right\} \sin \alpha \sin(\beta - \gamma) + \text{etc.} = 0.$$

Beispiel 2. Bei der Ellipse:

$$\begin{cases} x_1^2 \cos^2 \alpha + x_2^2 \cos^2 \beta + x_3^2 \cos^2 \gamma - 2x_2 x_3 \cos \beta \cos \gamma - 2x_3 x_1 \cos \gamma \cos \alpha \\ \quad - 2x_1 x_2 \cos \alpha \cos \beta = 0 \end{cases}$$

ist  $\begin{cases} a' = 2 \sin \alpha (-\cos \gamma \cos \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma + \cos \beta \cos \gamma \sin \alpha) \\ \quad - 2 \cos^2 \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha (1 + 4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma) \pm W \cos \alpha, \end{cases}$

wo  $W = \sqrt{1 - 8 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}$  zu nehmen ist. Nach einigen leichten Reductionen geht diese Gleichung über in  $a' = 2 \cos \beta \cos \gamma \pm W \cos \alpha$ , weshalb die Gleichung der Achsen folgende Form bekommt:

$$\begin{cases} x_1 (2 \cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha \pm W \cos \alpha) (2 \cos \gamma \cos \alpha \sin \beta - \cos \beta \sin \beta \pm W \cos \beta \sin \beta \\ \quad - 2 \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma + \cos \gamma \sin \gamma \mp W \cos \gamma \sin \gamma) + \text{etc.} = 0. \end{cases}$$

Der Factor in der zweiten Klammer verwandelt sich nach einigen Transformationen in:  $(3 \mp W) \cos \alpha \sin(\beta - \gamma)$ ,

und da  $3 \mp W$  wieder weggelassen werden kann, so sind die Gleichungen der Achsen:  $x_1 (2 \cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha \pm W \cos \alpha) \cos \alpha \sin(\beta - \gamma) \pm \text{etc.} = 0$ .

Beispiel 3. Nehmen wir endlich die Ellipse:

$$\begin{cases} x_1^2 \sin^2 \beta \sin^2 \gamma + x_2^2 \sin^2 \gamma \sin^2 \alpha + x_3^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta - 2x_2 x_3 \sin^2 \alpha \sin \beta \sin \gamma \\ \quad - 2x_3 x_1 \sin \alpha \sin^2 \beta \sin \gamma - 2x_1 x_2 \sin \alpha \sin \beta \sin^2 \gamma = 0, \end{cases}$$

bei der

$e = \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma (5 + \cotg^2 \vartheta)$ ,  $e^2 - 4A = W^2 = \sin^4 \alpha \sin^4 \beta \sin^4 \gamma (\cotg^2 \vartheta - 3)^2$  ist, so hat man:

$$\begin{cases} a = 2 \sin \alpha (-\sin \alpha \sin^3 \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin^3 \gamma + \sin^3 \alpha \sin \beta \sin \gamma) - 2 \sin^3 \beta \sin^3 \gamma \\ \quad + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma \cos \alpha (5 + \cotg^2 \vartheta) \pm \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma \cos \alpha (\cotg^2 \vartheta - 3). \end{cases}$$

Wählt man zunächst das positive Zeichen, so ist:

$$\begin{cases} a = 2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma \cos \alpha (\cotg^2 \vartheta - 1) - 2 \sin^3 \beta \sin^3 \gamma \\ \quad = 2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma \left\{ \cos \alpha (\cotg^2 \vartheta - 1) - \frac{\sin \beta \sin \gamma}{\sin^2 \alpha} \right\}, \end{cases}$$

oder mit Wegwerfung des nunmehr unnützen Factors  $2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma$ :

$$\begin{cases} a = \cos \alpha (\cotg^2 \vartheta - 1) - \frac{\sin \vartheta}{\sin(\alpha - \vartheta)} = \cos \alpha (\cotg^2 \vartheta - 1) - \frac{\sin(\beta - \vartheta) \sin(\gamma - \vartheta)}{\sin^2 \vartheta} \\ \quad = \cos \alpha (\cotg^2 \vartheta - 1) - \sin \beta \sin \gamma \cotg^2 \vartheta + \sin \alpha \cotg \vartheta - \cos \beta \cos \gamma \\ \quad = -\cos \beta \cos \gamma \cotg^2 \vartheta + \sin \alpha \cotg \vartheta - \sin \beta \sin \gamma, \end{cases}$$

oder endlich:

$$a = - \frac{\cos(\beta + \vartheta) \cos(\gamma + \vartheta)}{\sin^2 \vartheta};$$

die Gleichung der Nebenachse ist also, weil  $A_1 = \frac{\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma}{\sin \beta \sin \gamma} = \frac{\sin(\alpha + \vartheta)}{\sin \vartheta}$  ist:

$$\begin{cases} x_1 \cos(\beta + \vartheta) \cos(\gamma + \vartheta) \{ \sin(\beta + \vartheta) \cos(\gamma + \vartheta) \cos(\alpha + \vartheta) \\ - \sin(\gamma + \vartheta) \cos(\alpha + \vartheta) \cos(\beta + \vartheta) \} + \text{etc.} = 0, \end{cases}$$

oder mit Wegwerfung des Factors  $\cos(\alpha + \vartheta) \cos(\beta + \vartheta) \cos(\gamma + \vartheta)$ :

$$x_1 \{ \sin(\beta + \vartheta) \cos(\gamma + \vartheta) - \sin(\gamma + \vartheta) \cos(\beta + \vartheta) \} + \text{etc.} = 0,$$

oder endlich:  $x_1 \sin(\beta - \gamma) + x_2 \sin(\gamma - \alpha) + x_3 \sin(\alpha - \beta) = 0$ .

Dagegen ist für das negative Zeichen:

$$\begin{cases} a = +4 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma \cos \alpha - 2 \sin^2 \beta \sin^2 \gamma = 2 \sin^2 \beta \sin^2 \gamma (2 \sin^2 \alpha \cos \alpha - \sin \beta \sin \gamma) \\ = 2 \sin^2 \beta \sin^2 \gamma \sin(\gamma - \alpha) \sin(\alpha - \beta), \end{cases}$$

folglich die Achsengleichung:

$$\begin{cases} x_1 \sin^2 \beta \sin^2 \gamma \sin(\gamma - \alpha) \sin(\alpha - \beta) \left\{ \frac{\sin^2 \gamma + \sin^2 \alpha}{\sin \gamma \sin \alpha} \sin^2 \gamma \sin^2 \alpha \sin(\alpha - \beta) \sin(\beta - \gamma) \right. \\ \left. - \frac{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta}{\sin \alpha \sin \beta} \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin(\beta - \gamma) \sin(\gamma - \alpha) \right\} + \text{etc.} = 0, \end{cases}$$

oder mit Wegwerfung des Factors  $\sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma \sin(\beta - \gamma) \sin(\gamma - \alpha) \sin(\alpha - \beta)$ :

$$\frac{x_1}{\sin \alpha} \{ (\sin^2 \gamma + \sin^2 \alpha) \sin \gamma \sin(\alpha - \beta) - (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta) \sin \beta \sin(\gamma - \alpha) \} + \text{etc.} = 0.$$

Da  $\sin \gamma \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$  und  $\sin \beta \sin(\gamma - \alpha) = \sin^2 \gamma - \sin^2 \alpha$  ist, so erhält man nach der Reduction:

$$\frac{x_1}{\sin \alpha} (\sin^4 \alpha - \sin^2 \beta \sin^2 \gamma) + \frac{x_2}{\sin \beta} (\sin^4 \beta - \sin^2 \gamma \sin^2 \alpha) + \frac{x_3}{\sin \gamma} (\sin^4 \gamma - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta) = 0.$$

Dies ist die Gleichung der Hauptachse, auf der die beiden sogenannten Brocard'schen Punkte als Brennpunkte liegen.

Wie wir oben gesehen haben, sind die relativen Coordinaten des unendlich fernen Brennpunkts der Parabel:  $x_1 = A_1$ ,  $x_2 = A_2$ ,  $x_3 = A_3$ , die des im Endlichen gelegenen aber nach Gleichung 18):

$$x_1 = \frac{A_{11}e - \Delta}{A_1}, \quad x_2 = \frac{A_{22}e - \Delta}{A_2}, \quad x_3 = \frac{A_{33}e - \Delta}{A_3},$$

also ist die Gleichung der Achse der Parabel:

$$0 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \frac{A_{11}e - \Delta}{A_1} & \frac{A_{22}e - \Delta}{A_2} & \frac{A_{33}e - \Delta}{A_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 x_1 & A_2 x_2 & A_3 x_3 \\ A_{11}e - \Delta & A_{22}e - \Delta & A_{33}e - \Delta \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \end{vmatrix}$$

oder entwickelt:

$$30) \quad x_1 A_1 \{ e(A_{22} A_3^2 - A_{33} A_2^2) + \Delta(A_2^2 - A_3^2) \} + \text{etc.} = 0.$$

Bestimmt man aber die Coordinaten des im Endlichen gelegenen Brennpunkts nach Gleichung 20), so ist

$$31) \begin{vmatrix} x_1 & PA_{11} \sin \beta \sin \gamma + QA_{12} \sin \gamma \sin \alpha + RA_{13} \sin \alpha \sin \beta & A_1 \\ x_2 & PA_{21} \sin \beta \sin \gamma + QA_{22} \sin \gamma \sin \alpha + RA_{23} \sin \alpha \sin \beta & A_2 \\ x_3 & PA_{31} \sin \beta \sin \gamma + QA_{32} \sin \gamma \sin \alpha + RA_{33} \sin \alpha \sin \beta & A_3 \end{vmatrix} = 0,$$

die Gleichung der Achse.

Beispiel. Für die oben betrachtete Parabel hat man als Gleichung der Achse, wenn man die dort gefundenen relativen Coordinaten der Brennpunkte benutzt:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 2 \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha & \sin \alpha \sin \beta & \sin \alpha \sin \gamma \\ -\sin(\beta - \gamma) & \sin \beta + \sin \gamma \cos \alpha & \sin \gamma + \sin \beta \cos \alpha \end{vmatrix} = 0,$$

oder entwickelt:

$$\begin{cases} x_1 \{ -\sin \alpha \sin \beta (\sin \gamma + \sin \beta \cos \alpha) - \sin \alpha \sin \gamma (\sin \beta + \sin \gamma \cos \alpha) \} \\ + x_2 \{ -\sin \alpha \sin \gamma \sin(\beta - \gamma) + 2 \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha (\sin \gamma + \sin \beta \cos \alpha) \} \\ + x_3 \{ 2 \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha (\sin \beta + \sin \gamma \cos \alpha) + \sin \alpha \sin(\beta - \gamma) \} = 0. \end{cases}$$

Der Coefficient von  $x_2$  geht nach einigen Reductionen über in:

$$\sin \gamma \{ (\sin \gamma + \sin \beta \cos \alpha)^2 - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \},$$

und der von  $x_3$  in:  $\sin \beta \{ (\sin \beta + \sin \gamma \cos \alpha)^2 - \sin^2 \gamma \sin^2 \alpha \},$

so dass man endlich als Gleichung der Achse erhält:

$$\begin{cases} -x_1 \sin \alpha \{ \sin \beta (\sin \gamma + \sin \beta \cos \alpha) + \sin \gamma (\sin \beta + \sin \gamma \cos \alpha) \} \\ + x_2 \sin \gamma \{ (\sin \gamma + \sin \beta \cos \alpha)^2 - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \} \\ + x_3 \sin \beta \{ (\sin \beta + \sin \gamma \cos \alpha)^2 - \sin^2 \gamma \sin^2 \alpha \} = 0. \end{cases}$$

### Zweite Methode.

Die Achsengleichungen seien:

$$a) \begin{cases} b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0, \\ c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = 0, \end{cases}$$

und ihr Product:

$$b) \quad l_{11} x_1^2 + l_{22} x_2^2 + l_{33} x_3^2 + 2l_{23} x_2 x_3 + 2l_{31} x_3 x_1 + 2l_{12} x_1 x_2 = 0;$$

dann gelten die Relationen:

$$c) \quad \begin{cases} l_{11} = b_1 c_1, & 2l_{23} = b_2 c_3 + b_3 c_2, \\ l_{22} = b_2 c_1, & 2l_{31} = b_3 c_1 + b_1 c_3, \\ l_{33} = b_3 c_3, & 2l_{12} = b_1 c_2 + b_2 c_1. \end{cases}$$

Da die Achsen Durchmesser sind, so hat man auch:

$$d) \quad \begin{cases} b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3 = 0, \\ c_1 A_1 + c_2 A_2 + c_3 A_3 = 0, \end{cases}$$

und da sie auf einander senkrecht stehen, so ist:

$$e) \quad l_{11} + l_{22} + l_{33} - 2l_{23} \cos \alpha - 2l_{31} \cos \beta - 2l_{12} \cos \gamma = 0.$$

Nun sollen aber auch die Achsen conjugirte Polaren sein, das heisst, der Pol der einen soll auf der anderen liegen. Sind also  $x'_1, x'_2, x'_3$  die Coordinaten eines Punktes der Geraden  $b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0$ , so ist die Gleichung seiner Polaren:

$$\begin{cases} x_1(a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + a_{13}x'_3) + x_2(a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{23}x'_3) \\ + x_3(a_{31}x'_1 + a_{32}x'_2 + a_{33}x'_3) = 0, \end{cases}$$

und diese muss mit der Gleichung der zweiten Geraden, nämlich

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = 0$$

identisch sein, also hat man mit Weglassung des Verhältnissfactors, der in den  $c$  enthalten gedacht werden kann, die Gleichungen:

$$a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + a_{13}x'_3 = c_1,$$

$$a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{23}x'_3 = c_2,$$

$$a_{31}x'_1 + a_{32}x'_2 + a_{33}x'_3 = c_3;$$

dazu kommt noch, weil der Punkt  $x'_1, x'_2, x'_3$  auf der Geraden

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0$$

liegt, die Gleichung:  $b_1 x'_1 + b_2 x'_2 + b_3 x'_3 = 0.$

Dies giebt als Bedingung, dass die beiden Geraden a) conjugirte Polaren seien, die Determinantengleichung:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

oder entwickelt:

$$\begin{cases} A_{11} b_1 c_1 + A_{22} b_2 c_2 + A_{33} b_3 c_3 + A_{23} (b_2 c_3 + b_3 c_2) + A_{31} (b_3 c_1 + b_1 c_3) \\ + A_{12} (b_1 c_2 + b_2 c_1) = 0; \end{cases}$$

vermöge der Gleichungen c) erhält man hieraus:

$$f) \quad A_{11} l_{11} + A_{22} l_{22} + A_{33} l_{33} + 2 A_{23} l_{23} + 2 A_{31} l_{31} + 2 A_{12} l_{12} = 0.$$

Um drei weitere Gleichungen für die  $l$  zu erhalten, multiplicire man die erste der Gleichungen d) der Reihe nach mit  $c_1, c_2, c_3$  und die zweite der Reihe nach mit  $b_1, b_2, b_3$  und addire jedesmal, so kommt:

$$g) \quad \begin{cases} l_{11} A_1 + l_{12} A_2 + l_{13} A_3 = 0, \\ l_{21} A_1 + l_{22} A_2 + l_{23} A_3 = 0, \\ l_{31} A_1 + l_{32} A_2 + l_{33} A_3 = 0. \end{cases}$$



Sollen nun die Gleichungen b), e), f) und g) zusammen bestehen, so muss die Determinante:

$$32) \quad \begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & 2x_2x_3 & 2x_3x_1 & 2x_1x_2 \\ 1 & 1 & 1 & -2\cos\alpha & -2\cos\beta & -2\cos\gamma \\ A_{11} & A_{22} & A_{33} & 2A_{23} & 2A_{31} & 2A_{12} \\ A_1 & 0 & 0 & 0 & A_3 & A_2 \\ 0 & A_2 & 0 & A_3 & 0 & A_1 \\ 0 & 0 & A_3 & A_2 & A_1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

sein; diese Gleichung ist das Product der Achsengleichungen. Dieselbe gilt jedoch nicht mehr für den Fall einer Parabel, wo

$$\begin{cases} A = A_{11}\sin^2\alpha + A_{22}\sin^2\beta + A_{33}\sin^2\gamma + 2A_{23}\sin\beta\sin\gamma + 2A_{31}\sin\gamma\sin\alpha \\ \quad + 2A_{12}\sin\alpha\sin\beta = 0 \end{cases}$$

ist, was sich aus den gemachten Voraussetzungen erklärt; denn die eine Achse ist dann die Gerade im Unendlichen, die andere aber wird unbestimmt oder fällt mit der unendlich fernen Geraden zusammen, weil auf letzterer überhaupt jede Gerade, ja paradoxerweise sie selbst, wenigstens im analytischen Sinne, senkrecht steht, wodurch die Gleichung e) ihre Bedeutung verliert. In der That,  $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$  sei die Gleichung einer Geraden,  $x_1\sin\alpha + x_2\sin\beta + x_3\sin\gamma = 0$  die der Geraden im Unendlichen, so ist die Bedingung, dass beide auf einander senkrecht stehen:

$$\begin{cases} a_1(\sin\alpha - \sin\beta\cos\gamma - \sin\gamma\cos\beta) + a_2(\sin\beta - \sin\gamma\cos\alpha - \sin\alpha\cos\gamma) \\ \quad + a_3(\sin\gamma - \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha) = 0, \end{cases}$$

die erfüllt wird, welche Werthe  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  auch haben mögen. Aber auch an der gefundenen Determinante selbst kann man die Wahrheit des Gesagten nachweisen. Denn multiplicirt man die Verticalreihen der Reihe nach mit  $\sin^2\alpha$ ,  $\sin^2\beta$ ,  $\sin^2\gamma$ ,  $\sin\beta\sin\gamma$ ,  $\sin\gamma\sin\alpha$ ,  $\sin\alpha\sin\beta$  und addirt dann alle zur ersten Verticalreihe, so erhält man in derselben als oberstes Glied

$$(x_1\sin\alpha + x_2\sin\beta + x_3\sin\gamma)^2,$$

sonst aber wegen

$$\begin{cases} A = A_1\sin\alpha + A_2\sin\beta + A_3\sin\gamma = A_{11}\sin^2\alpha + A_{22}\sin^2\beta + A_{33}\sin^2\gamma + 2A_{23}\sin\beta\sin\gamma \\ \quad + 2A_{31}\sin\gamma\sin\alpha + 2A_{12}\sin\alpha\sin\beta = 0 \end{cases}$$

lauter Nullen; das heisst, die Gleichung ist in das Quadrat der Gleichung der unendlich fernen Geraden übergegangen.

Die Determinante 32) ist sehr unbequem zur Ausrechnung; wenn man aber die aus g) gewonnenen Werthe von  $l_{11}$ ,  $l_{22}$ ,  $l_{33}$  in b) einsetzt und nach  $l_{23}$ ,  $l_{31}$ ,  $l_{12}$  ordnet, so erhält man:

$$A_1(x_2A_3 - x_3A_2)^2l_{23} + A_2(x_3A_1 - x_1A_3)^2l_{31} + A_3(x_1A_2 - x_2A_1)^2l_{12} = 0;$$

auf demselben Wege gehen e) und f) über in:

$$\begin{cases} A_1(A_{22}A_3^2 + A_{33}A_2^2 - 2A_{23}A_2A_3)l_{23} + A_2(A_{33}A_1^2 + A_{11}A_3^2 - 2A_{31}A_3A_1)l_{31} \\ + A_3(A_{11}A_2^2 + A_{22}A_1^2 - 2A_{12}A_1A_2)l_{12} = 0, \\ A_1(A_2^2 + A_3^2 + 2A_2A_3\cos\alpha)l_{23} + A_2(A_3^2 + A_1^2 + 2A_3A_1\cos\beta)l_{31} \\ + A_3(A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\gamma)l_{12} = 0; \end{cases}$$

also hat man jetzt für das Product der Achsengleichungen die Determinantengleichung:

$$33) \begin{vmatrix} (x_2A_3 - x_3A_2)^2 & (x_3A_1 - x_1A_3)^2 & (x_1A_2 - x_2A_1)^2 \\ A_{22}A_3^2 + A_{33}A_2^2 - 2A_{23}A_2A_3 & A_{33}A_1^2 + A_{11}A_3^2 - 2A_{31}A_3A_1 & A_{11}A_2^2 + A_{22}A_1^2 - 2A_{12}A_1A_2 \\ A_2^2 + A_3^2 + 2A_2A_3\cos\alpha & A_3^2 + A_1^2 + 2A_3A_1\cos\beta & A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\gamma \end{vmatrix} = 0$$

Die Form des erhaltenen Resultats führt uns zu folgender kürzeren Herleitung desselben. Wenn nämlich  $p, q, r$  beliebige Parameter sind, so ist die Gleichung eines jeden Geradenpaares, das durch den Mittelpunkt des Kegelschnitts geht:

$$h) \quad p(A_3x_2 - A_2x_3)^2 + q(A_1x_3 - A_3x_1)^2 + r(A_2x_1 - A_1x_2)^2 = 0,$$

oder entwickelt:

$$i) \quad \begin{cases} x_1^2(qA_3^2 + rA_2^2) + x_2^2(rA_1^2 + pA_3^2) + x_3^2(pA_2^2 + qA_1^2) - 2x_2x_3pA_2A_3 \\ - 2x_3x_1qA_3A_1 - 2x_1x_2rA_1A_2 = 0; \end{cases}$$

denn die Determinante dieser ternären quadratischen Form verschwindet, wie sich leicht zeigen lässt, welche Werthe auch  $p, q, r$  haben mögen, und aus Gleichung h) folgt unmittelbar, dass die durch sie dargestellten Geraden sich im Mittelpunkt des Kegelschnitts schneiden.

Aus Gleichung i) folgt als Bedingung der Orthogonalität der durch sie bezeichneten Geraden:

$$\begin{cases} qA_3^2 + rA_2^2 + rA_1^2 + pA_3^2 + pA_2^2 + qA_1^2 + 2pA_2A_3\cos\alpha + 2qA_3A_1\cos\beta \\ + 2rA_1A_2\cos\gamma = 0, \end{cases}$$

oder nach  $p, q, r$  geordnet:

$$k) \quad \begin{cases} p(A_2^2 + A_3^2 + 2A_2A_3\cos\alpha) + q(A_3^2 + A_1^2 + 2A_3A_1\cos\beta) \\ + r(A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\gamma) = 0, \end{cases}$$

und als Bedingung der reciproken Polarität:

$$\begin{cases} A_{11}(qA_3^2 + rA_2^2) + A_{22}(rA_1^2 + pA_3^2) + A_{33}(pA_2^2 + rA_1^2) - 2pA_{23}A_2A_3 \\ - 2qA_{31}A_3A_1 - 2rA_{12}A_1A_2 = 0, \end{cases}$$

oder nach  $p, q, r$  geordnet:

$$l) \quad \begin{cases} p(A_2^2A_{33} + A_3^2A_{22} - 2A_2A_3A_{23}) + q(A_3^2A_{11} + A_1^2A_{33} - 2A_3A_1A_{31}) \\ + r(A_1^2A_{22} + A_2^2A_{11} - 2A_1A_2A_{12}) = 0. \end{cases}$$

Durch Elimination von  $p, q, r$  aus den Gleichungen h), k), l) erhält man wiederum die Determinantengleichung 33).

Man kann dieser Gleichung noch bequemere Formen geben. Es ist nämlich erstens:

$$\left\{ \begin{aligned} A_{22} A_3^2 + A_{33} A_2^2 - 2 A_{23} A_2 A_3 &= A_2 (A_{33} A_2 - A_{23} A_3) + A_3 (A_{22} A_3 - A_{23} A_2) \\ &= A_2 (A_{33} A_{12} \sin \alpha + A_{33} A_{22} \sin \beta - A_{23} A_{31} \sin \alpha - A_{23}^2 \sin \beta) \\ &\quad + A_3 (A_{22} A_{31} \sin \alpha + A_{22} A_{33} \sin \gamma - A_{23} A_{12} \sin \alpha - A_{23}^2 \sin \gamma) \\ &= \Delta A_2 (a_{11} \sin \beta - a_{12} \sin \alpha) + \Delta A_3 (a_{11} \sin \gamma - a_{31} \sin \alpha) \\ &= \Delta \{ a_{11} (A_1 \sin \alpha + A_2 \sin \beta + A_3 \sin \gamma) - (a_{11} A_1 + a_{12} A_2 + a_{13} A_3) \sin \alpha \}, \end{aligned} \right.$$

das heisst, nach den Gleichungen 3) und 4) gleich  $\Delta (a_{11} A - \Delta \sin^2 \alpha)$ .

Zweitens ist nach Gleichung 9a):

$$A_2^2 + A_3^2 = (A_{22} + A_{33}) + \Delta (e_2 - e_3).$$

Vermöge der Gleichungen 3) und 9a) ist aber auch noch:

$$\left\{ \begin{aligned} A A_1 &= A_1^2 \sin \alpha + A_1 A_2 \sin \beta + A_1 A_3 \sin \gamma = A A_{11} \sin \alpha + \Delta e_1 \sin \alpha + A_1 A_2 \sin \beta \\ &\quad + A_1 A_3 \sin \gamma, \end{aligned} \right.$$

oder nach Multiplication mit  $\sin \alpha$ :

$$A_3 A_1 \sin \gamma \sin \alpha + A_1 A_2 \sin \alpha \sin \beta = A (A_1 - A_{11} \sin \alpha) \sin \alpha - \Delta e_1 \sin^2 \alpha;$$

ebenso ist:

$$A_2 A_3 \sin \beta \sin \gamma + A_1 A_2 \sin \alpha \sin \beta = A (A_2 - A_{22} \sin \beta) \sin \beta - \Delta e_2 \sin^2 \beta,$$

$$A_2 A_3 \sin \beta \sin \gamma + A_3 A_1 \sin \gamma \sin \alpha = A (A_3 - A_{33} \sin \alpha) \sin \gamma - \Delta e_3 \sin^2 \gamma,$$

also:

$$2 A_2 A_3 \sin \beta \sin \gamma = 2 A A_{23} \sin \beta \sin \gamma - \Delta (e_2 \sin^2 \beta + e_3 \sin^2 \gamma - e_1 \sin^2 \alpha).$$

Daher hat man endlich:

$$\left\{ \begin{aligned} A_2^2 + A_3^2 + 2 A_2 A_3 \cos \alpha &= A (A_{22} + A_{33} + 2 A_{23} \cos \alpha) \\ &\quad + \Delta \left\{ e_2 + e_3 - \frac{(e_2 \sin^2 \beta + e_3 \sin^2 \gamma - e_1 \sin^2 \alpha) \cos \alpha}{\sin \beta \sin \gamma} \right\}; \end{aligned} \right.$$

der Coefficient von  $\Delta$  gestaltet sich um in:

$$\left\{ \begin{aligned} &\{ e_2 \sin \beta (\sin \gamma - \sin \beta \cos \alpha) + e_3 \sin \gamma (\sin \beta - \sin \gamma \cos \alpha) + e_1 \sin^2 \alpha \cos \alpha \} : \sin \beta \sin \gamma \\ &= (e_1 \sin \alpha \cos \alpha + e_2 \sin \beta \cos \beta + e_3 \sin \gamma \cos \gamma) \sin \alpha : \sin \beta \sin \gamma = -e \sin^2 \alpha \end{aligned} \right.$$

(nach Gleichung 13). Somit ist:

$$A_2^2 + A_3^2 + 2 A_2 A_3 \cos \alpha = A (A_{22} + A_{33} + 2 A_{23} \cos \alpha) - \Delta e \sin^2 \alpha.$$

Setzt man diese Werthe in die Determinantengleichung 33) ein, so erhält dieselbe folgende Gestalt.

$$\left\{ \begin{aligned} &\begin{vmatrix} (x_2 A_3 - x_3 A_2)^2 & (x_3 A_1 - x_1 A_3)^2 \\ a_{11} A - \Delta \sin^2 \alpha & a_{22} A - \Delta \sin^2 \beta \\ A (A_{22} + A_{33} + 2 A_{23} \cos \alpha) - \Delta e \sin^2 \alpha & A (A_{33} + A_{11} + 2 A_{31} \cos \beta) - \Delta e \sin^2 \beta \\ (x_1 A_2 - x_2 A_1)^2 & \\ a_{33} A - \Delta \sin^2 \gamma & \\ A (A_{11} + A_{22} + 2 A_{12} \cos \gamma) - \Delta e \sin^2 \gamma & \end{vmatrix} \\ &= 0, \end{aligned} \right.$$

oder auch:

$$34) \left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} (x_2 A_3 - x_3 A_2)^2 & (x_3 A_1 - x_1 A_3)^2 \\ a_{11} A - \Delta \sin^2 \alpha & a_{22} A - \Delta \sin^2 \beta \\ A_{22} + A_{33} + 2 A_{23} \cos \alpha - a_{11} e & A_{33} + A_{11} + 2 A_{31} \cos \beta - a_{22} e \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} (x_1 A_2 - x_2 A_1)^2 & \\ a_{33} A - \Delta \sin^2 \gamma & \\ A_{11} + A_{22} + 2 A_{12} \cos \gamma - a_{33} e & \end{vmatrix} \end{array} \right\} = 0.$$

Besteht der Kegelschnitt aus zwei geraden Linien, ist also  $\Delta = 0$ , so hebt sich in der zweiten Zeile  $A$  weg, und die Gleichung stellt dann das Product der Gleichungen ihrer Winkelhalbirenden dar.

Beispiel 1. Bei der Steiner'schen Ellipse ist:

$$a_{11} A - \Delta \sin^2 \alpha = -\frac{2 \sin \alpha}{\sin \beta \sin \gamma},$$

oder relativ gleich  $\sin^2 \alpha$ ; ferner ist

$$A_{22} + A_{33} + 2 A_{23} \cos \alpha - a_{11} e = -\frac{1}{\sin^2 \beta} - \frac{1}{\sin^2 \gamma} + \frac{2 \cos \alpha}{\sin \beta \sin \gamma},$$

oder relativ gleich  $\sin^4 \alpha$ ; daher wir die Determinante 34) in diesem Falle:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \begin{vmatrix} \left(\frac{x_2}{\sin \gamma} - \frac{x_3}{\sin \beta}\right)^2 & \left(\frac{x_3}{\sin \alpha} - \frac{x_1}{\sin \gamma}\right)^2 & \left(\frac{x_1}{\sin \beta} - \frac{x_2}{\sin \alpha}\right)^2 \\ \sin^2 \alpha & \sin^2 \beta & \sin^2 \gamma \\ \sin^4 \alpha & \sin^4 \beta & \sin^4 \gamma \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} (x_2 \sin \beta - x_3 \sin \gamma)^2 & (x_3 \sin \gamma - x_1 \sin \alpha)^2 & (x_1 \sin \alpha - x_2 \sin \beta)^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ \sin^2 \alpha & \sin^2 \beta & \sin^2 \gamma \end{vmatrix} \end{array} \right.$$

oder entwickelt:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_2 \sin \beta - x_3 \sin \gamma)^2 \sin \alpha \sin (\beta - \gamma) + (x_3 \sin \gamma - x_1 \sin \alpha)^2 \sin \beta \sin (\gamma - \alpha) \\ + (x_1 \sin \alpha - x_2 \sin \beta)^2 \sin \gamma \sin (\alpha - \beta) = 0. \end{array} \right.$$

Die weitere Entwicklung nach Potenzen der  $x$  giebt endlich das Resultat:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^2 \sin^3 \alpha \sin (\beta - \gamma) + x_2^2 \sin^3 \beta \sin (\gamma - \alpha) + x_3^2 \sin^3 \gamma \sin (\alpha - \beta) \\ + 2 x_2 x_3 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \sin (\beta - \gamma) + 2 x_3 x_1 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \sin (\gamma - \alpha) \\ + 2 x_1 x_2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \sin (\alpha - \beta) = 0. \end{array} \right.$$

Beispiel 2. Bei der schon mehrfach betrachteten Ellipse:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^2 \cos^2 \alpha + x_2^2 \cos^2 \beta + x_3^2 \cos^2 \gamma - 2 x_2 x_3 \cos \beta \cos \gamma - 2 x_3 x_1 \cos \gamma \cos \alpha \\ 2 - x_1 x_2 \cos \alpha \cos \beta = 0 \end{array} \right.$$

ist  $a_{11} A - \Delta \sin^2 \alpha = 4 \cos^3 \alpha \cos \beta \cos \gamma (1 + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma) + 4 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta \cos^2 \gamma \sin^2 \alpha$

oder relativ gleich:

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos^2 \alpha (1 + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma) + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \\ = \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma; \end{array} \right.$$

ferner ist:

$$\begin{cases} A_{22} + A_{33} + 2 A_{23} \cos \alpha - a_{11} e = 4 \cos^3 \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos^2 \alpha (1 + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma) \\ \quad \quad \quad = - \cos^2 \alpha \end{cases}$$

oder relativ gleich  $\cos^2 \alpha$ .

Damit erhält man als Product der Achsengleichungen aus Gleichung 34):

$$\begin{cases} (x_2 \sin \gamma - x_3 \sin \beta)^2 \sin \alpha \sin(\beta - \gamma) + (x_3 \sin \alpha - x_1 \sin \gamma)^2 \sin \beta \sin(\gamma - \alpha) \\ \quad + (x_1 \sin \beta - x_2 \sin \alpha)^2 \sin \gamma \sin(\alpha - \beta) = 0, \end{cases}$$

oder entwickelt:

$$\begin{cases} x_1^2 \cos \alpha \sin(\beta - \gamma) + x_2^2 \cos \beta \sin(\gamma - \alpha) + x_3^2 \cos \gamma \sin(\alpha - \beta) + x_2 x_3 \sin(\beta - \gamma) \\ \quad + x_3 x_1 \sin(\gamma - \alpha) + x_1 x_2 \sin(\alpha - \beta) = 0. \end{cases}$$

Die in diesen beiden Beispielen gefundenen Endgleichungen können nach bekannter Methode (vergl. Salmon-Fiedler a. a. O., S. 548 Art. 323) auf dreierlei Weise in ihre Factoren zerlegt werden, wobei jedoch zu bemerken ist, dass diese drei Resultate unsymmetrisch sind und erst in jedem gegebenen Falle durch besondere Kunstmittel in irgend eine symmetrische Form übergeführt werden können, während unsere erste Methode eine solche sofort ohne weitere Rechnung liefert.

### Dritte Methode.

Man verbinde einen Punkt  $P$  in der Ebene des Kegelschnitts mit seinem Mittelpunkt  $O$  und ziehe durch  $C$  eine Senkrechte auf  $PC$ ; hat man den Punkt  $P$  so gewählt, dass die genannte Senkrechte parallel ist seiner Polare in Bezug auf den Kegelschnitt, so liegt er auf einer Achse desselben.

Nennt man  $x_1, x_2, x_3$  die Coordinaten von  $P$ , so ist die Gleichung von  $PC$ :  $x_1(A_3 x_2 - A_2 x_3) + x_2(A_1 x_3 - A_3 x_1) + x_3(A_2 x_1 - A_1 x_2) = 0$ ,

und die Gleichung der daraufsenkrechtstehenden und durch  $C$  gehenden Geraden:

$$35) \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$

wobei man

$$36) \begin{cases} a_1 = -x_1(A_2^2 + A_3^2 + 2 A_2 A_3 \cos \alpha) + x_2(A_2 A_3 \cos \beta + A_3 A_1 \cos \alpha + A_1 A_2 - A_3^2 \cos \gamma) \\ \quad + x_3(A_2 A_3 \cos \gamma + A_3 A_1 + A_1 A_2 \cos \alpha - A_2^2 \cos \beta) \end{cases}$$

setzen muss; die Werthe von  $a_2$  und  $a_3$  sind ähnlich gebildet.

Setzt man in den zu  $x_2$  gehörenden Klammerfactor der Gleichung 36):

$$A_1 = \frac{A - A_2 \sin \beta - A_3 \sin \gamma}{\sin \alpha},$$

so erhält er die Form:

$$\frac{A(A_2 + A_3 \cos \alpha) - (A_2^2 + A_3^2 + 2 A_2 A_3 \cos \alpha) \sin \beta}{\sin \alpha};$$

ebenso wird der Coefficient von  $x_3$ :

$$\frac{A(A_3 + A_2 \cos \alpha) - (A_2^2 + A_3^2 + 2 A_2 A_3 \cos \alpha) \sin \gamma}{\sin \alpha};$$

somit erhält man statt 36) die elegantere Gleichung:

$$37) \begin{cases} a_1 \sin \alpha = A[x_2(A_2 + A_3 \cos \alpha) + x_3(A_3 + A_2 \cos \alpha)] - (x_1 \sin \alpha + x_2 \sin \beta \\ \quad + x_3 \sin \gamma)(A_2^2 + A_3^2 + 2 A_2 A_3 \cos \alpha). \end{cases}$$

Die Gleichung der Polare von  $P$  sei:

$$38) \quad K_1 x_1 + K_2 x_2 + K_3 x_3 = 0,$$

wo

$$39) \quad \begin{cases} K_1 = a_{11} r_1 + a_{12} r_2 + a_{13} r_3, \\ K_2 = a_{21} r_1 + a_{22} r_2 + a_{23} r_3, \\ K_3 = a_{31} r_1 + a_{32} r_2 + a_{33} r_3 \end{cases}$$

zu setzen ist; dann ist

$$40) \quad \begin{vmatrix} a_1 & K_1 & \sin \alpha \\ a_2 & K_2 & \sin \beta \\ a_3 & K_3 & \sin \gamma \end{vmatrix} = 0$$

das Product der Achsengleichungen.

Scheinbar allgemeiner wird die Lösung, wenn man den Ort des Punktes sucht, dessen Polaren in Bezug auf den Kegelschnitt und einen mit ihm concentrischen Kreis von beliebigem Halbmesser  $\rho$  parallel sind. Nach Salmon-Fiedler a. a. O., S. 116 Art. 71, ist die Entfernung  $\rho$  eines Punktes  $x_1, x_2, x_3$  von  $C$ , dessen absolute Coordinaten

$$x_1 = \frac{M}{A} A_1, \quad x_2 = \frac{M}{A} A_2, \quad x_3 = \frac{M}{A} A_3$$

sind, gegeben durch die Gleichung:

$$\begin{cases} (A_3 x_2 - A_2 x_3)^2 + (A_1 x_3 - A_3 x_1)^2 + (A_2 x_1 - A_1 x_2)^2 \\ - 2(A_1 x_3 - A_3 x_1)(A_2 x_1 - A_1 x_2) \cos \alpha - 2(A_2 x_1 - A_1 x_2)(A_3 x_2 - A_2 x_3) \cos \beta \\ - 2(A_3 x_2 - A_2 x_3)(A_1 x_3 - A_3 x_1) \cos \gamma - A^2 \rho^2 = 0. \end{cases}$$

Macht man dieselbe dadurch homogen, dass man das letzte Glied auf der linken Seite mit  $(x_1 \sin \alpha + x_2 \sin \beta + x_3 \sin \gamma)^2 : M^2$ , wo  $M = 2r \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$  ist, multiplicirt, so stellt sie die Gleichung eines Kreises vor, der den Radius  $\rho$  und den Mittelpunkt  $O$  hat. Bezeichnet man diese Gleichung kurzweg mit  $c = 0$ , so ist die Gleichung der Polare des Punktes  $P(r_1, r_2, r_3)$  in Bezug auf diesen Kreis

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = 0,$$

wo

$$\begin{cases} c_1 = -A_3(A_1 r_3 - A_3 r_1) + A_2(A_2 r_1 - A_1 r_2) + A_3(A_2 r_1 - A_1 r_2) \cos \alpha \\ - A_2(A_1 r_3 - A_3 r_1) \cos \alpha - A_2(A_3 r_2 - A_2 r_3) \cos \beta + A_3(A_3 r_2 - A_2 r_3) \cos \gamma \\ - \frac{A^2 \rho^2}{2M^2} (r_1 \sin \alpha + r_2 \sin \beta + r_3 \sin \gamma) \sin \alpha \end{cases}$$

ist; ähnliche Werthe haben  $c_2$  und  $c_3$ . Dann ist aber das Product der Achsengleichungen:

$$\begin{vmatrix} c_1 & K_1 & \sin \alpha \\ c_2 & K_2 & \sin \beta \\ c_3 & K_3 & \sin \gamma \end{vmatrix} = 0.$$



$\frac{1}{A^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}$  weg, so erhält man durch partielle Differentiation nach  $x_1, x_2, x_3$  folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} -A_1 \sin \alpha \cos \alpha (MA_1 - Ax_1) + \lambda \sin \alpha + \mu K_1 &= 0, \\ -A_2 \sin \beta \cos \beta (MA_2 - Ax_2) + \lambda \sin \beta + \mu K_2 &= 0, \\ -A_3 \sin \gamma \cos \gamma (MA_3 - Ax_3) + \lambda \sin \gamma + \mu K_3 &= 0; \end{aligned}$$

Hier sind  $K_1, K_2, K_3$  die partiellen Differentialquotienten von  $K$  nach  $x_1, x_2, x_3$ . Sollen diese Gleichungen zusammen bestehen, so muss

$$41) \quad \begin{vmatrix} \sin \alpha \cos \alpha (MA_1 - Ax_1) & K_1 & \sin \alpha \\ \sin \beta \cos \beta (MA_2 - Ax_2) & K_2 & \sin \beta \\ \sin \gamma \cos \gamma (MA_3 - Ax_3) & K_3 & \sin \gamma \end{vmatrix} = 0$$

sein. Damit diese Gleichung homogen werde, muss man  $M$  durch seinen Werth  $x_1 \sin \alpha + x_2 \sin \beta + x_3 \sin \gamma$  ersetzt denken. Wenn man nun nachweisen kann, dass sie durch die Coordinaten des Kegelschnitt-Mittelpunktes befriedigt wird, dass sowohl ihre Determinante als auch die von uns so genannte Function  $e$  für sie verschwinden und dass sie die Bedingung der reciproken Polarität [Gleichung  $f$ )] erfüllt, so ist sie das Product der Gleichungen der Achsen. Durch Substitution der Mittelpunkts-Coordinationen aber geht  $M$  in  $A_1 \sin \alpha + A_2 \sin \beta + A_3 \sin \gamma = A$  über, weshalb die Glieder der ersten Verticalreihe verschwinden. Um den Beweis, dass die übrigen Bedingungen zutreffen, zu erleichtern, denke man sich den gegebenen Kegelschnitt auf  $ABC$  als Polardreieck bezogen, wodurch seine Gleichung die einfachere Gestalt  $a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = 0$  annimmt. Die Entwicklung der Determinantengleichung 41) liefert dann das Resultat:

$$\begin{cases} a_1^2 x_1^2 (a_2 \sin \gamma \cos \gamma - a_3 \sin \beta \cos \beta) + a_2^2 x_2^2 (a_3 \sin \alpha \cos \alpha - a_1 \sin \gamma \cos \gamma) \\ + a_3^2 x_3^2 (a_1 \sin \beta \cos \beta - a_2 \sin \alpha \cos \alpha) + a_2 a_3 x_2 x_3 \{ a_1 \sin (\beta - \gamma) \\ + a_2 \sin \alpha - a_3 \sin \alpha \} + a_3 a_1 x_3 x_1 \{ -a_1 \sin \beta + a_2 \sin (\gamma - \alpha) \\ + a \sin \beta \} + a_1 a_2 x_1 x_2 \{ a_1 \sin \gamma - a_2 \sin \gamma + a_3 \sin (\alpha - \beta) \} = 0. \end{cases}$$

Die Determinante dieser quadratischen Form ist mit Abwerfung des Factors  $a_1^2 a_2^2 a_3^2$ :

$$\begin{vmatrix} a_2 \sin \gamma \cos \gamma - a_3 \sin \beta \cos \beta & \frac{1}{2} \{ a_1 \sin \gamma - a_2 \sin \gamma + a_3 \sin (\alpha - \beta) \} \\ \frac{1}{2} \{ a_1 \sin \gamma - a_2 \sin \gamma + a_3 \sin (\alpha - \beta) \} & a_3 \sin \alpha \cos \alpha - a_1 \sin \gamma \cos \gamma \\ \frac{1}{2} \{ -a_1 \sin \beta + a_2 \sin (\gamma - \alpha) + a_3 \sin \beta \} & \frac{1}{2} \{ a_1 \sin (\beta - \gamma) + a_2 \sin \alpha - a_3 \sin \alpha \} \\ \frac{1}{2} \{ -a_1 \sin \beta + a_2 \sin (\gamma - \alpha) + a_3 \sin \beta \} & \frac{1}{2} \{ a_1 \sin (\beta - \gamma) + a_2 \sin \alpha - a_3 \sin \alpha \} \\ a_1 \sin \beta \cos \beta - a_2 \sin \alpha \cos \alpha & \end{vmatrix}.$$



Multipliziert man aber die Horizontalreihen bezüglich mit  $\sin \alpha, \sin \beta, \sin \gamma$  und addirt sie dann zur ersten, so werden die Glieder der letzteren alle gleich Null.

Die Function  $e$  ferner ist hier gleich:

$$\left\{ \begin{aligned} & a_1^2 (a_2 \sin \gamma \cos \gamma - a_3 \sin \beta \cos \beta) + a_2^2 (a_3 \sin \alpha \cos \alpha - a_1 \sin \gamma \cos \gamma) \\ & + a_3^2 (a_1 \sin \beta \cos \beta - a_2 \sin \alpha \cos \alpha) - a_2 a_3 \{ a_1 \sin(\beta - \gamma) \\ & + a_2 \sin \alpha - a_3 \sin \alpha \} \cos \alpha - a_3 a_1 \{ -a_1 \sin \beta + a_2 \sin(\gamma - \alpha) \\ & + a_3 \sin \beta \} \cos \beta - a_1 a_2 \{ a_1 \sin \gamma - a_2 \sin \gamma + a_3 \sin(\alpha - \beta) \} \cos \gamma; \end{aligned} \right.$$

fasst man die zusammengehörigen Glieder zusammen und berücksichtigt man die bekannte Identität:

$$\cos \alpha \sin(\beta - \gamma) + \cos \beta \sin(\gamma - \alpha) + \cos \gamma \sin(\alpha - \beta) \equiv 0,$$

so findet man, dass  $e$  verschwindet.

Weil endlich hier  $A_{11} = a_2 a_3, A_{22} = a_3 a_1, A_{33} = a_1 a_2, A_{23} = A_{31} = A_{12} = 0$  ist, so sind die Geraden reciproke Polaren, sobald

$$\left\{ \begin{aligned} & a_1^2 a_2 a_3 (a_2 \sin \gamma \cos \gamma - a_3 \sin \beta \cos \beta) + a_1 a_2^2 a_3 (a_3 \sin \alpha \cos \alpha - a_1 \sin \gamma \cos \gamma) \\ & + a_1 a_2 a_3^2 (a_1 \sin \beta \cos \beta - a_2 \sin \alpha \cos \alpha) \end{aligned} \right.$$

verschwindet, was in der That der Fall ist.

Die Gleichung 41) kann man auch in der Form schreiben:

$$(x_1 \sin \alpha + x_2 \sin \beta + x_3 \sin \gamma) \cdot \begin{vmatrix} A_1 \sin \alpha \cos \alpha & K_1 \sin \alpha \\ A_2 \sin \beta \cos \beta & K_2 \sin \beta \\ A_3 \sin \gamma \cos \gamma & K_3 \sin \gamma \end{vmatrix} - A \begin{vmatrix} x_1 \sin \alpha \cos \alpha & K_1 \sin \alpha \\ x_2 \sin \beta \cos \beta & K_2 \sin \beta \\ x_3 \sin \gamma \cos \gamma & K_3 \sin \gamma \end{vmatrix} = 0,$$

welche merkwürdige Folgerungen zulässt. Setzt man nämlich die zweite Determinante für sich allein der Null gleich, so bedeutet die dadurch entstandene Gleichung, wie die Theorie der Kegelschnittbüschel lehrt, eine gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten den Achsen des gegebenen Kegelschnitts parallel sind. Dieselbe geht durch den Höhenschnittpunkt des Fundamentaldreiecks  $ABC$  und durch den Mittelpunkt des gegebenen Kegelschnitts; denn erstens werden die erste und die dritte Verticalreihe gleich, sobald man  $x_1 = 1: \cos \alpha, x_2 = 1: \cos \beta, x_3 = 1: \cos \gamma$  setzt; wenn man zweitens  $A_1, A_2, A_3$  statt  $x_1, x_2, x_3$  in  $K_1, K_2, K_3$  substituirt, so wird z. B.  $a_{11} A_1 + a_{12} A_2 + a_{13} A_3$  nach Gleichung 4) gleich  $\Delta \sin \alpha$ , so dass nach Weghebung des Factors  $\Delta$  die zweite Verticalreihe gleich der dritten wird. Die gerade Linie ferner, die durch die annullirte erste Determinante bezeichnet wird, geht durch den Mittelpunkt des gegebenen Kegelschnitts und berührt die correspondirende gleichseitige Hyperbel in diesem Mittelpunkt. Daraus ergibt sich, dass jedem Kegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel zugeordnet ist, deren Asymptoten parallel sind den Achsen des Kegelschnitts und die durch den Höhenschnittpunkt des Fundamentaldreiecks und durch den Mittelpunkt des Kegelschnitts geht, dadurch also vollkommen bestimmt ist. Für die Steiner'sche Ellipse ist z. B. die Gleichung dieser gleichseitigen Hyperbel:

$$\begin{vmatrix} x_1 \sin \alpha \cos \alpha & \frac{x_2}{\sin \gamma} + \frac{x_3}{\sin \beta} & \sin \alpha \\ x_2 \sin \beta \cos \beta & \frac{x_3}{\sin \alpha} + \frac{x_1}{\sin \gamma} & \sin \beta \\ x_3 \sin \gamma \cos \gamma & \frac{x_1}{\sin \beta} + \frac{x_2}{\sin \alpha} & \sin \gamma \end{vmatrix} = 0$$

oder entwickelt:

$x_1(x_3 \sin \gamma - x_2 \sin \beta) \cos \alpha + x_2(x_1 \sin \alpha - x_3 \sin \gamma) \cos \beta + x_3(x_2 \sin \beta - x_1 \sin \alpha \cos \gamma) = 0$ ; dies giebt:  $x_2 x_3 \sin(\beta - \gamma) + x_3 x_1 \sin(\gamma - \alpha) + x_1 x_2 \sin(\alpha - \beta) = 0$  oder die Gleichung der Kiepert'schen Hyperbel. Dadurch ist ein merkwürdiger Zusammenhang zwischen diesen beiden Curven dargethan.

Ist bei einem gegebenen Kegelschnitt  $A = 0$ , derselbe also eine Parabel, so ist die annullirte erste Determinante der Gleichung 42) die Gleichung ihrer Achse. So erhält man z. B. die Gleichung der Achse derjenigen Parabel, deren Brennpunkt wir oben bestimmt haben, in folgender Form:

$$\begin{vmatrix} -\sin \alpha \cos \alpha \sin(\beta - \gamma) & \begin{Bmatrix} x_1 \sin^2 \alpha - x_2 \sin \gamma \sin \alpha \cos \alpha \\ -x_3 \sin \alpha \sin \beta \cos \alpha \end{Bmatrix} \sin \alpha \\ \sin \beta \cos \beta (\sin \beta + \sin \gamma \cos \alpha) & \begin{Bmatrix} -x_1 \sin \gamma \sin \alpha \cos \alpha + x_2 (\sin^2 \gamma \\ -\sin^2 \alpha \sin^2 \beta) + x_3 \sin \beta \sin \gamma \cos^2 \alpha \end{Bmatrix} \sin \beta \\ -\sin \gamma \cos \gamma (\sin \gamma + \sin \beta \cos \alpha) & \begin{Bmatrix} -x_1 \sin \alpha \sin \beta \cos \alpha + x_2 \sin \beta \sin \gamma \cos^2 \alpha \\ + x_3 (\sin^2 \beta - \sin^2 \gamma \sin^2 \alpha) \end{Bmatrix} \sin \gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Die Entwicklung liefert dasselbe Resultat, das wir schon oben gefunden haben.

Auch wenn die Kegelschnittsgleichung in cartesischen Coordinaten gegeben ist, lässt sich diese Methode anwenden. Denn sei

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{31}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

die gegebene Gleichung, so sind  $\xi = A_{31} : A_{33}$ ,  $\eta = A_{23} : A_{33}$  die Mittelpunkts-Coordinaten. Man setze nun  $E^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 - 2\lambda f(x, y)$  und differentiire theilweise nach  $x$  und  $y$ , so kommt:

$$x - \xi = \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{und} \quad y - \eta = \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial y},$$

also erhält man durch Elimination von  $\lambda$  das Product der Achsengleichungen in der Form:

$$(x - \xi) \frac{\partial f}{\partial y} = (y - \eta) \frac{\partial f}{\partial x}$$

oder, wenn man für  $\xi$  und  $\eta$  ihre Werthe setzt:

$$(A_{33}x - A_{31}) \frac{\partial f}{\partial y} = (A_{33}y - A_{23}) \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Ist die Curve eine Parabel, so ist  $A_{33}=0$  und die Gleichung ihrer Achse:

$$A_{31} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = A_{23} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}.$$

In  $3x^2 + 4xy + y^2 - 5x - 6y - 3 = 0$  ist z. B.

$$A_{33} = -1, \quad A_{31} = -\frac{7}{2}, \quad A_{23} = 4,$$

also die Gleichung der Achsen:

$$\left(-x + \frac{7}{2}\right)(4x + 2y - 6) = -(y + 4)(6x + 4y - 5)$$

oder

$$4y^2 - 4x^2 + 4xy + 18y + 44x - 41 = 0,$$

die man zerlegen kann in die Gleichungen:

$$2x - (\sqrt{5} + 1)y = 11 + 4\sqrt{5},$$

$$2x + (\sqrt{5} - 1)y = 11 - 4\sqrt{5}.$$

Bei der Parabel  $(3x + 4y)^2 + 22x + 46y + 9 = 0$  ist  $A_{31} = 100$ ,  $A_{23} = -75$ , also die Gleichung der Achse:

$$4[8(3x + 4y) + 46] + 3[6(3x + 4y) + 22] = 0,$$

oder

$$50(3x + 4y) + 250 = 0,$$

oder endlich

$$3x + 4y + 5 = 0.$$

Bensheim, im December 1892.

## Kleinere Mittheilungen.

### IX. Ueber die Construction von Vierecken aus den Radien der Berührungskreise eines Dreiecks.

I. Die Seiten eines Dreiecks mögen  $a, b, c$  heissen, wobei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $a < b < c$  vorausgesetzt werden kann; ist ferner  $\Delta$  die Dreiecksfläche, so bestimmen sich der Radius  $\varrho_0$  des Inkreises und die Radien  $\varrho_a, \varrho_b, \varrho_c$  der Aussenkreise durch die bekannten Formeln

$$1) \varrho_0 = \frac{2\Delta}{a+b+c}, \quad \varrho_a = \frac{2\Delta}{-a+b+c}, \quad \varrho_b = \frac{2\Delta}{a-b+c}, \quad \varrho_c = \frac{2\Delta}{a+b-c},$$

welche geben

$$2) \quad \varrho_0 < \varrho_a < \varrho_b < \varrho_c.$$

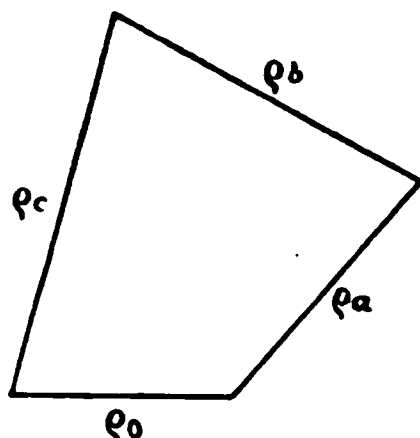
Zur Möglichkeit eines mit diesen Radien construirten Vierecks (Fig. 1) gehört nun die Bedingung

$$\varrho_0 + \varrho_a + \varrho_b > \varrho_c$$

und daraus folgt vermöge der obigen Werthe

$$3) \quad a^2 + b^2 > c^2,$$

Fig. 1.



das heisst einem spitzwinkligen Dreiecke entsprechen unendlich viele Vierecke, wobei einer der Viereckswinkel beliebig gewählt werden darf; ist das Dreieck rechtwinklig, so degenerirt das Viereck in eine Gerade; ein stumpfwinkliges Dreieck liefert kein reelles Viereck.

II. Das vorige allgemeine Viereck wird zu einem Sehnenviereck, wenn man einen seiner Winkel z. B.  $\angle(\varrho_0, \varrho_a)$  nach bekannten Methoden construiert oder berechnet; so ist

$$\tan \frac{\varrho_0, \varrho_a}{2} = \sqrt{\frac{(-\varrho_0 + \varrho_a + \varrho_b + \varrho_c)(\varrho_0 - \varrho_a + \varrho_b + \varrho_c)}{(\varrho_0 + \varrho_a - \varrho_b + \varrho_c)(\varrho_0 + \varrho_a + \varrho_b - \varrho_c)}}.$$

Bezeichnen  $\alpha, \beta, \gamma$  die Winkel des ursprünglichen Dreiecks, so ergeben sich aus Nr. 1) die Werthe

$$4) \quad \begin{cases} -e_0 + e_a + e_b + e_c = \frac{abc}{\Delta}, \\ +e_0 - e_a + e_b + e_c = \frac{a(b^2 + c^2 - a^2)}{2\Delta} = \frac{abc}{\Delta} \cos \alpha, \\ +e_0 + e_a - e_b + e_c = \frac{b(c^2 + a^2 - b^2)}{2\Delta} = \frac{abc}{\Delta} \cos \beta, \\ +e_0 + e_a + e_b - e_c = \frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{2\Delta} = \frac{abc}{\Delta} \cos \gamma; \end{cases}$$

es ist daher

$$5) \quad \begin{cases} \tan \frac{e_0, e_a}{2} = \cot \frac{e_b, e_c}{2} = \sqrt{\frac{\cos \alpha}{\cos \beta \cos \gamma}}, \\ \tan \frac{e_a, e_b}{2} = \cot \frac{e_c, e_0}{2} = \sqrt{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \gamma}}. \end{cases}$$

Das Product der unter Nr. 4) verzeichneten Ausdrücke ist bekanntlich  $= 16V^2$ , wenn  $V$  die Fläche des Sehnenvierecks bedeutet, also

$$6) \quad V = \left( \frac{abc}{2\Delta} \right)^2 \sqrt{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}.$$

Berechnet man ferner

$$e_0 e_a + e_b e_c = bc, \quad e_0 e_b + e_c e_a = ca, \quad e_0 e_c + e_a e_b = ab$$

und multiplicirt diese Ausdrücke, so erhält man  $16V^2 r^2$ , wo  $r$  den Radius des um das Sehnenviereck beschriebenen Kreises bezeichnet; es ist daher

$$7) \quad r = \frac{\Delta^2}{abc \sqrt{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}}.$$

Als Beispiel in meistens rationalen Zahlen möge dienen

$$a = 92, \quad b = 111, \quad c = 119, \quad \Delta = 3 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 23 = 4830,$$

$$\cos \alpha = \frac{429}{629}, \quad \cos \beta = \frac{8}{17}, \quad \cos \gamma = \frac{12}{37},$$

$$\alpha = 46^\circ 59' 49'', 7; \quad \beta = 61^\circ 55' 39'', 0; \quad \gamma = 71^\circ 4' 31'', 3;$$

$$e_0 = 30, \quad e_a = 70, \quad e_b = 96\frac{1}{2}, \quad e_c = 115,$$

$$\tan \frac{e_0, e_a}{2} = \cot \frac{e_b, e_c}{2} = \frac{\sqrt{286}}{8}, \quad \tan \frac{e_a, e_b}{2} = \cot \frac{e_c, e_0}{2} = \frac{\sqrt{286}}{17},$$

$$\begin{cases} L(e_0, e_a) = 129^\circ 22' 1'', 3, & L(e_a, e_b) = 89^\circ 42' 3'', 8, \\ L(e_b, e_c) = 50^\circ 37' 58'', 7, & L(e_c, e_0) = 90^\circ 17' 56'', 2. \end{cases}$$

$$V = 5105,93; \quad r = 59,364.$$

III. Wenn das allgemeine Viereck zu einem Tangentenviereck werden soll, so müssen  $\varrho_0$  und  $\varrho_c$  Gegenseiten sein (Fig. 2) und der Bedingung genügen

$$\varrho_0 + \varrho_c = \varrho_a + \varrho_b.$$

Diese führt nach Nr. 1) zu der cubischen Gleichung

$$8) \quad c^3 + (a+b)c^2 - (a+b)^2c - (a+b)(a-b)^2 = 0,$$

welche drei reelle Wurzeln besitzt; für

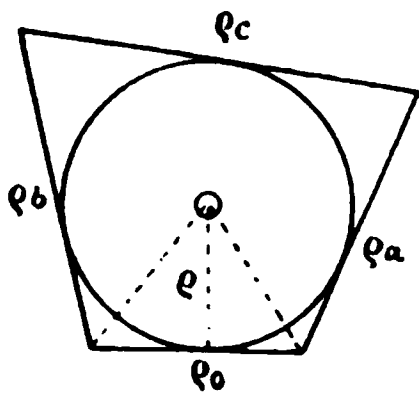
$$9) \quad c = x - \frac{1}{3}(a+b), \quad x = R \sin \Theta$$

wird nämlich

$$10) \quad \begin{cases} x^3 - \frac{4}{3}(a+b)^2x + \frac{4}{27}(a+b)\{27ab - 4(a+b)^2\} = 0, \\ R = \frac{4}{3}(a+b), \quad \sin \Theta = \frac{27ab}{4(a+b)^2} - 1. \end{cases}$$

Befindet sich nun unter den Wurzeln von Nr. 8) eine, die zwischen 0 und  $a+b$  liegt, so ist das Dreieck aus  $a, b, c$  reell und im Falle

Fig. 2.



$$c^2 < a^2 + b^2$$

zugleich spitzwinklig; die Seiten  $\varrho_0, \varrho_a, \varrho_b$  und

$$\varrho_c = \varrho_a + \varrho_b - \varrho_0$$

liefern dann unendlich viele Tangentenvierecke, worin immer ein Viereckswinkel beliebig angenommen werden darf.

Beispielsweise sei

$$a = 5, \quad b = 7,$$

$$\text{daher } c^3 + 12c^2 - 144c - 48 = 0, \quad c = x - 4, \quad x^3 - 192x + 656 = 0,$$

$$R = 16, \quad \sin \Theta = \frac{41}{64},$$

woraus folgt

$$c = 7,6483; \quad \varrho_0 = 1,7371; \quad \varrho_a = 3,5375; \quad \varrho_b = 6,0427; \quad \varrho_c = 7,8431.$$

IV. Unter den unendlich vielen Tangentenvierecken befindet sich auch ein bicentrisches Viereck (Fig. 3); es entsteht, wenn

$$L(\varrho_0, \varrho_a) = 180^\circ - L(\varrho_b, \varrho_c)$$

genommen wird. Bezeichnet man für den Augenblick  $L(\varrho_0, \varrho_a)$  mit  $\delta$ , so hat man

$$\varrho_0^2 + \varrho_a^2 - 2\varrho_0\varrho_a\cos\delta = \varrho_b^2 + \varrho_c^2 + 2\varrho_b\varrho_c\cos\delta$$

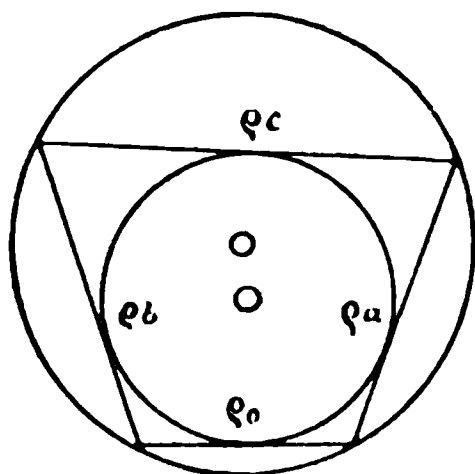
oder, wenn links

$$\cos\delta = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\delta,$$

rechts

$$\cos\delta = 2\cos^2\frac{1}{2}\delta - 1$$

gesetzt wird:



$$(\varrho_0 - \varrho_a)^2 + 4\varrho_0\varrho_a \sin^2 \frac{1}{2}\delta = (\varrho_b - \varrho_c)^2 + 4\varrho_b\varrho_c \cos^2 \frac{1}{2}\delta,$$

das ist wegen  $\varrho_0 - \varrho_a = \varrho_b - \varrho_c$

$$\cot \frac{1}{2}\delta = \sqrt{\frac{\varrho_0\varrho_a}{\varrho_b\varrho_c}}.$$

Die Viereckswinkel bestimmen sich also durch die Formeln

$$11) \quad \begin{cases} \cot \frac{\varrho_0, \varrho_a}{2} = \sqrt{\frac{\varrho_0\varrho_a}{\varrho_b\varrho_c}} = \tan \frac{\varrho_b, \varrho_c}{2}, \\ \cot \frac{\varrho_0, \varrho_b}{2} = \sqrt{\frac{\varrho_0\varrho_b}{\varrho_c\varrho_a}} = \tan \frac{\varrho_c, \varrho_a}{2}. \end{cases}$$

Aus der Formel für die Fläche des Sehnenvierecks erhält man die entsprechende Formel für das bicentrische Viereck, wenn man die Gleichungen beachtet

$$-\varrho_0 + \varrho_a + \varrho_b + \varrho_c = 2\varrho_c, \quad +\varrho_0 - \varrho_a + \varrho_b - \varrho_c = 2\varrho_b,$$

$$+\varrho_0 + \varrho_a - \varrho_b + \varrho_c = 2\varrho_a, \quad +\varrho_0 + \varrho_a + \varrho_b + \varrho_c = 2\varrho_0;$$

das sehr einfache Resultat ist

$$12) \quad V = \sqrt{\varrho_0\varrho_a\varrho_b\varrho_c}.$$

Für das Sehnenviereck gilt die Formel (siehe II)

$$4Vr = \sqrt{(\varrho_0\varrho_a + \varrho_b\varrho_c)(\varrho_0\varrho_b + \varrho_c\varrho_a)(\varrho_0\varrho_c + \varrho_a\varrho_b)} = abc,$$

mithin ist im vorliegenden Falle

$$13) \quad r = \frac{abc}{4\sqrt{\varrho_0\varrho_a\varrho_b\varrho_c}} = \frac{abc}{4V}.$$

Um endlich den Radius  $\varrho$  des Inkreises zu ermitteln, bedarf es nur der Relation (Fig. 2)

$$\varrho_0 = \varrho \cot \frac{\varrho_0, \varrho_a}{2} + \varrho \cot \frac{\varrho_0, \varrho_b}{2};$$

nach den Formeln in 11) folgt hieraus

$$14) \quad \varrho = \frac{\sqrt{\varrho_0\varrho_a\varrho_b\varrho_c}}{\varrho_a + \varrho_b} = \frac{V}{\varrho_a + \varrho_b}.$$

Das in III angegebene Beispiel führt zu folgenden Werthen:

$$L(\varrho_0, \varrho_a) = 140^\circ 23' 38''; \quad L(\varrho_0, \varrho_b) = 138^\circ 33' 14'';$$

$$L(\varrho_b, \varrho_c) = 39^\circ 36' 22''; \quad L(\varrho_a, \varrho_c) = 41^\circ 26' 46'';$$

$$V = 17,0654; \quad r = 3,9218; \quad \varrho = 1,7813.$$

### X. Zur hyperboloidischen Lage von Tetraederpaaren.

Die beiden Tetraeder  $abcd$  und  $a'b'c'd'$  seien so gelegen, dass die Geraden  $aa'$ ,  $bb'$ ,  $cc'$  und  $dd'$  zu demselben System von Erzeugenden einer Regelfläche zweiter Ordnung gehören.

Alsdann gehören die Ebenen  $d'a'a$ ,  $d'b'b$ ,  $d'c'c$  einem Büschel an. Trifft also die Ebene  $abc$  die Geraden  $d'a'$ ,  $d'b'$ ,  $d'c'$  bez. in  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , so liegen die Dreiecke  $abc$  und  $ABC$  perspectiv, mithin die Punkte

$$[ab, AB], [bc, BC], [ca, CA]$$

in einer Geraden  $g$ ; diese Punkte sind aber identisch mit den Punkten

$$[ab, a'b'd'], [bc, b'c'd'], [ca, c'a'd'],$$

woraus man ersieht, dass die Gerade  $g$  gleichzeitig die vier Geraden

$$[abc, a'b'c'], [bcd, b'c'd'], [cda, c'd'a'], [dab, d'a'b']$$

schneidet.

Analog findet man eine zweite, dritte u. s. w. Gerade, welche dasselbe leistet. Diese Geraden sind sämmtlich verschieden. Mit Rücksicht auf das Dualitätsgesetz hat man also den Satz\*:

I. Haben zwei Tetraeder  $abcd$  und  $a'b'c'd'$  eine solche Lage, dass die Geraden  $aa'$ ,  $bb'$ ,  $cc'$ ,  $dd'$  zu demselben System von Erzeugenden einer Regelfläche zweiter Ordnung gehören, so gehören auch die Geraden, in welchen sich die Ebenen  $abc$  und  $a'b'c'$ ,  $bcd$  und  $b'c'd'$ ,  $cda$  und  $c'd'a'$ ,  $dab$  und  $d'a'b'$  schneiden, demselben System von Erzeugenden einer Regelfläche zweiter Ordnung an und umgekehrt.

Man sagt in diesem Falle von den beiden Tetraedern, dass sie hyperboloidisch liegen.

Es seien, um eine Anwendung dieses Satzes zu geben, in einem räumlichen Polarsystem die Tetraederpaare  $abcd$  und  $A'B'C'D'$ ,  $ABCD$  und  $a'b'c'd'$  zwei Paare conjugirter (polarer) Tetraeder, also  $A'$  sei der Pol von  $bcd$  u. s. w.,  $A$  der Pol von  $b'c'd'$  u. s. w.

Wir nehmen nun an, dass die beiden Tetraeder  $abcd$  und  $a'b'c'd'$  hyperboloidisch liegen und behaupten, dass alsdann auch die Tetraeder  $ABCD$  und  $A'B'C'D'$  sich in hyperboloidischer Lage befinden.

Denn ist  $g$  eine die vier Geraden  $aa'$ ,  $bb'$ ,  $cc'$ ,  $dd'$  schneidende Gerade, so trifft die Polare von  $g$  gleichzeitig die Polaren dieser vier Geraden, d. h. die Geraden

$$[B'C'D', BCD], [C'D'A', CDA], [D'A'B', DAB], [A'B'C', ABC].$$

Die Tetraeder  $ABCD$  und  $A'B'C'D'$  liegen also hyperboloidisch (I); mithin gilt der Satz:

---

\* Vergl. Schnell, Ueber Schaaren perspect. Tetraeder. Giessener Dissert. Viernheim 1891. S. 17.









## XII. Geometrische Lehrsätze.\*

1. Soll eine Curve des dritten Grades  $C^3$  durch die sechs Ecken eines Vierseits gehen (das heisst die sechs Punkte in denen sich je zwei von vier Geraden schneiden) und soll sie zudem noch einen Mittelpunkt haben, so ist der Ort der Mittelpunkte aller dieser  $C^3$  diejenige Gerade, welche durch die Mitten der drei Diagonalen des Vierseits geht. Jede dieser Curven hat also auch mit einem Kegelschnitt, der die Seiten des Vierseits berührt, den Mittelpunkt gemein.

2. Werden auf den Seiten  $BC$ ,  $AC$  und  $AB$  eines Dreiecks  $ABC'$  drei beliebige Punkte  $A_1$ ,  $B_1$  und  $C_1$  angenommen und sind  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  (bei entsprechender Bezeichnung) die Mitten der Seiten des Dreiecks  $ABC$ , so liegen allemal folgende Punkte auf einem Kegelschnitt  $H^2$ , nämlich:

$\alpha$ ) die Mitten der Seiten des Dreiecks  $A_1B_1C_1$ ;

$\beta$ ) die Mitten der Strecken  $AA_1$ ,  $BB_1$  und  $CC_1$ ;

$\gamma$ ) die Schnittpunkte von  $B_1C_1$  mit  $B_2C_2$ ;  $A_1C_1$  mit  $A_2C_2$  und  $A_1B_1$  mit  $A_2B_2$ .

Ausserdem sind die zweiten Schnitte der Geraden  $AA_1$ ,  $BB_1$  und  $CC_1$  mit dem Kegelschnitt  $H^2$  die Mittelpunkte von Kegelschnitten, die resp. durch  $B$ ,  $C$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ;  $A$ ,  $C$ ,  $A_1$ ,  $C_1$  und  $A$ ,  $B$ ,  $A_1$  und  $B_1$  gehen und der Kegelschnitt  $H^2$  selbst ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Curven des dritten Grades mit Mittelpunkt, welche durch  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $A_1$ ,  $B_1$  und  $C_1$  gehen.

3. Legen wir durch je zwei Paare von Gegenecken eines Vierseits und einen weiteren beliebig gewählten Punkt  $P$  Kegelschnitte, so schneidet jeder dieser Kegelschnitte die Verbindungslinie des letzten Paares von Gegenecken des Vierseits in zwei Punkten  $\alpha$  und die sich ergebenden sechs Punkte  $\alpha$  liegen allemal auf zwei durch  $P$  gehenden Geraden  $L$ , welche zudem in  $P$  die beiden durch  $P$  gehenden, dem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte berühren. Legen wir ebenso durch denselben Punkt  $P$  und die Punkte, in denen je drei der vier Seiten des Vierseits sich schneiden, diejenigen beiden Kegelschnitte, welche die vierte Seite des Vierseits berühren, so liegen die sich so ergebenden acht Berührungspunkte dieser Kegelschnitte auf denselben Geraden  $L$ . Der Punkt  $P$  ist ausserdem Doppelpunkt einer Curve des dritten Grades, welche durch die sechs Ecken des Vierseits geht, und zwar sind die Geraden  $L$  die Tangenten dieser Curve im Doppelpunkt. Soll weiter der Doppelpunkt einer Curve des dritten Grades  $C^3$  mit Doppelpunkt, welche durch die sechs Ecken eines Vierseits geht, auf irgend einer Geraden  $G$  gelegen sein, so ist der Ort der Tangenten  $C^3$  in dem Doppelpunkte eine Curve

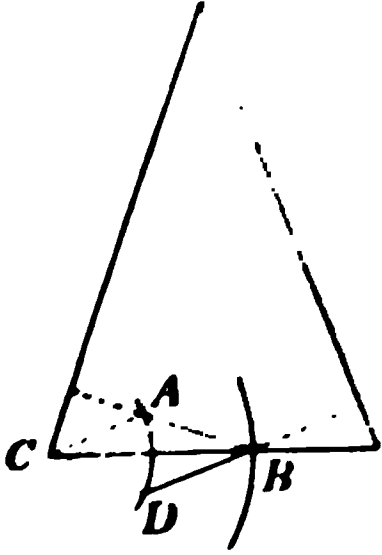
---

\* Im Folgenden geben wir einige Sätze über algebraische Curven — jedoch ohne Beweis — auf die wir gelegentlich anderer Arbeiten gestossen sind.



Einwürfe gegen diese beiden auseinanderzusetzen ist wohl hier nicht am Platze\* und könnte sie auch der Leser des Obigen selbst finden.

Aber die Müller'sche Behandlung brachte mir auch die Frucht, dass ich meinen obigen Beweis zum bloß synthetischen, also um die nachfolgende Rechnung und zweite Figur, kürzen kann. Die Basis des gleichschenkligen Dreieckes stellt den Minimum-Strahl vor. Vom Punkte  $B$  derselben die Lothe  $BA$  und  $BD$  auf die Schenkel gefällt, so ist  $ACD$  der zu erweisende kleinste Ablenkungswinkel des in der Richtung  $CA$  eintretenden und in der Richtung  $CD$  austretenden Strahles.



Beweis: Man nehme auf dem durch  $B$  gehenden Kreise den Nachbarpunkt  $B'$  und construiere die Nachbarlothe  $B'A'$  und  $B'D'$ . Ist  $B'$  z. B. unter  $B$  (ausserhalb des gleichschenkligen Dreieckes), so sieht man leicht, dass der kleine Bogen  $AA'$  kleiner ist als derjenige  $DD'$ , dass also der Winkel  $A'CD'$  grösser ist als  $ACD$ . Für  $B''$  oberhalb  $B$  folgt gerade so  $AA''$  grösser als  $DD''$ . Man kann sich, glaube ich jetzt auch, mit dieser Anschauung begnügen.

Augsburg.

Dr. A. Kurz.

\* Auf meine diesbezügliche Einsendung an die Zeitschrift für phys. und chem. Unterricht erwiderte diese, dass sie davon nur einen kurzen Auszug bringen wolle, was auch im 6. Jahrgang geschehen ist.









ergeben; es müsste somit durch die lineare Function  $x = \text{Const. } a$  dargestellt werden. Es kann daher bloß für einen geeignet abgegrenzten Bereich der Variablen  $a$  ein Ausdruck gefunden werden, durch welchen die functionelle Abhängigkeit der Wurzelwerthe von den Argumentwerthen zur Darstellung kommt.

Eine solche Darstellungsform wird gewonnen, wenn  $a$  durch  $b^n + a - b^n$  ersetzt und für alle Punkte  $a$ , die innerhalb des mit  $\text{mod } (b^n)$  als Radius um  $b^n$  als Mittelpunkt beschriebenen Kreises liegen, nach dem binomischen Satze

$$2) \quad \sqrt[n]{a} = b \sqrt[n]{1 + \frac{a - b^n}{b^n}} = b \cdot \sum_{\mu=0}^{\infty} \left\{ \left( \frac{1}{n} \right)_{\mu} \cdot \left( \frac{a - b^n}{b^n} \right)^{\mu} \right\},$$

$$\left( \frac{1}{n} \right)_{\mu} \cdot 1 \cdot 2 \dots \mu = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{n} - 1 \right) \dots \left( \frac{1}{n} - \mu + 1 \right)$$

gesetzt wird.

Wählt man die Werthe  $b^n$  in geeigneter Weise, so kann für jedes endliche  $a$  eine Reihendarstellung erhalten werden, die stets für den zugehörigen Convergenzkreis gültig ist. Da es immer  $n$  Werthe  $b$  giebt, deren  $n^{\text{te}}$  Potenz gleich  $b^n$  ist, so gehören jedem Convergenzkreise  $n$  Gebiete der Functionswerthe zu. Sie sind einander congruent und können durch Drehungen um Vielfache von  $2\pi/n$  um den Nullpunkt, dem sie sich spitzenförmig nähern, zur Deckung gebracht werden; jedes ist einfach zusammenhängend und enthält je eine der  $n$  Wurzeln von  $b^n$ , so dass mit der Reihenfolge dieser Wurzeln:  $b_1, b_2 \dots b_n$  auch die Aufeinanderfolge der Gebiete gegeben ist. Bezeichnet man nun die dem  $\nu^{\text{ten}}$  Gebiete ( $\nu = 1, 2 \dots n$ ) zugehörigen Functionswerthe durch  $\sqrt[n]{\nu} a$  und  $b_{\nu}$  durch  $\varepsilon_n^{\nu} \cdot b_n$ , (wo  $\varepsilon_n = \cos 2\pi/n + i \sin 2\pi/n$ ), so erhält man als Darstellungen der  $n$  Functionen  $\sqrt[n]{\nu} a$ :

$$3) \quad \sqrt[n]{\nu} a = b_{\nu} \cdot \sum_{\mu=0}^{\infty} \left\{ \left( \frac{1}{n} \right)_{\mu} \cdot \left( \frac{a - b^n}{b^n} \right)^{\mu} \right\} = \varepsilon_n^{\nu} \cdot P(a), \quad (\nu = 1, 2 \dots n),$$

so dass  $\sqrt[n]{\nu} a$  eine eindeutige, stetige Function von  $a$  vorstellt, deren Darstellungsform für den durch die Hilfsgrösse  $b_n$  bestimmten Convergenzkreis gültig ist.

§ 3. Ist die Wurzel  $\sqrt[n]{\nu} a$  durch eine Reihe darstellbar, so gilt dasselbe auch von ihren Potenzen. Eine beliebige rationale Function jener Wurzel

$$4) \quad x_{\nu} = r_0 + r_1 \cdot \sqrt[n]{\nu} a + r_2 (\sqrt[n]{\nu} a)^2 + \dots + r_{n-1} (\sqrt[n]{\nu} a)^{n-1},$$

wo die  $r$  rationale Functionen von  $a$  und beliebigen anderen variablen Zahlen sind, kann daher für denselben Bereich der Werthe  $a$  wie  $\sqrt[n]{\nu} a$  selbst in Reihenform dargestellt werden. Man erhält:

$$5) \quad x_{\nu} = a_0 + \varepsilon_n^{\nu} \cdot a_1 + \varepsilon_n^{2\nu} \cdot a_2 + \dots + \varepsilon_n^{(n-1)\nu} \cdot a_{n-1}, \quad (\nu = 1, 2, \dots n),$$

$$= r_0; a_1 = r_1 \cdot P(a); a_2 = r_2 \cdot P(a)^2; \dots a_{n-1} = r_{n-1} \cdot P(a)^{n-1}.$$



Ist es z. B. möglich — wie der Einfachheit wegen angenommen werden soll — die  $n$  Werthengebiete der  $x_v$  in zwei Gruppen zusammen zu fassen, so dass die Gebiete der  $x_1, x_2, \dots, x_k$  von einem Kreise mit dem Mittelpunkte  $c^m$ , die Gebiete der  $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$  von einem Kreise mit dem Mittelpunkte  $c'^m$  eingeschlossen werden, so gilt für die  $k$  ersten  $x_v$  die Entwicklung

$$10a) \quad \sqrt[m]{x_v} = \varepsilon_m^\mu (A_0 + \varepsilon_n^\nu A_1 + \dots + \varepsilon_n^{\overline{n-1} \cdot \nu} A_{n-1})$$

$$(\mu = 1, 2 \dots m; \quad \nu = 1, 2 \dots k)$$

und für die  $n - \nu$  übrigen  $x_v$  die Entwicklung

$$10b) \quad \sqrt[m]{x_{v'}} = \varepsilon_m^\mu (A'_0 + \varepsilon_n^{\nu'} A'_1 + \dots + \varepsilon_n^{\overline{n-1} \cdot \nu'} A'_{n-1})$$

$$(\mu = 1, 2 \dots m; \quad \nu' = k + 1, k + 2 \dots n),$$

wo die  $A$  von den Hilfsgrössen  $b_n$  und  $c_m$ , die  $A'$  von den Hilfsgrössen  $b_n$  und  $c'_m$  abhängen.

Die Potenzreihen  $A_i$  und  $A'_i$  sind somit in diesem Falle der Form nach verschieden; dass sie aber dem Werthe nach übereinstimmen, erhellt durch folgende Ueberlegung.

Ich setze die Möglichkeit voraus, die Werthengebiete der  $x_v$  und der  $x_{v'}$  zum Theil in eine dritte Gruppe zusammen zu fassen, so dass z. B. die Gebiete der  $x_k$  und der  $x_{k+1}$  von einem Kreise der bezeichneten Art, dessen Mittelpunkt  $c''^m$  sei, umschlossen werden. Dann gelten die Entwicklungen

$$10c) \quad \begin{cases} \sqrt[m]{x_k} = \varepsilon_m^\mu (A''_0 + \varepsilon_n^k A''_1 + \varepsilon_n^{2k} A''_2 + \dots + \varepsilon_n^{\overline{n-1} \cdot k} A''_{n-1}), \\ \sqrt[m]{x_{k+1}} = \varepsilon_m^\mu (A''_0 + \varepsilon_n^{k+1} A''_1 + \varepsilon_n^{2 \cdot k+1} A''_2 + \dots + \varepsilon_n^{\overline{n-1} \cdot k+1} A''_{n-1}), \end{cases}$$

$$(\mu = 1, 2 \dots m);$$

wo die  $A''$  von den beiden Hilfsgrössen  $b_n$  und  $c_m''$  abhängen.

Es ist daher für den ganzen Convergencebereich der unabhängigen Variablen

$$11a) \quad A_i'' = A_i; \quad A_i'' = A'_i, \text{ also auch } A_i = A'_i.$$

Die soeben gemachte Voraussetzung ist nur dann unzulässig, wenn die Werthengebiete der  $x_v$  und der  $x_{v'}$  insgesamt von einer durch den Nullpunkt gehenden Geraden geschnitten werden und die eine Gruppe rechts, die andere links vom Nullpunkte liegt; denn nunmehr sind blos die anfänglich vorausgesetzten beiden Gruppen möglich.

In diesem Falle beachte man, wie die  $n$  Werthe  $x_1, x_2 \dots x_n$  sich lagern, die durch das ursprünglich in's Auge gefasste System der unabhängigen Variablen, dem der Convergencebereich zugeordnet wurde, erzeugt werden. Liegen die  $n$  Werthe nicht selbst rechts und links vom Nullpunkte auf einer durch den Nullpunkt gehenden Geraden, so beschränke man den *anfänglich* vorhandenen Convergencebereich der Art, dass auch die zuge-



$$13) \quad x_{\mu\nu} = r_0 + r_1 \cdot \sqrt[m]{x_\nu} + \dots r_{n-1} \cdot (\sqrt[m]{x_\nu})^{m-1},$$

wo die  $r$  rationale Functionen von  $\sqrt[n]{a}$  und von beliebigen anderen variablen Zahlen sind, so erhält man, wenn die  $r$  nach Potenzen von  $\varepsilon_n^\nu$  geordnet werden:

$$14) \quad x_{\mu\nu} = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} \sum_{\beta=0}^{\beta=n-1} \varepsilon_m^{\alpha\mu} \cdot \varepsilon_n^{\beta\nu} \cdot a_{\alpha\beta}.$$

Betreffs der Werthengebiete der  $x_{\mu\nu}$ , die dem Convergencebereiche der unabhängigen Variablen zugehören, gelten nun dieselben Bemerkungen, die über die Werthengebiete der  $x_\nu$  gemacht wurden. Für ein gegebenes Werthensystem der unabhängigen Variablen, für das kein  $x_{\mu\nu}$  unendlich gross wird, kann man daher einen Convergencebereich der Art abgrenzen, dass die Werthengebiete der  $x_{\mu\nu}$  einfach zusammenhängende Ebenentheile sind, die im Endlichen verlaufen und den Nullpunkt nicht umschliessen, und dass insbesondere, wenn eines der  $x_{\mu\nu}$  gleich Null wird, dem Convergencebereiche nur das individuelle System der Werthe  $x_{\mu\nu}$  zugehört.

Daraus folgt die Möglichkeit, die durch die Gleichung

$$15) \quad x^l = x_{\mu\nu}$$

definirten Functionen  $\sqrt[l]{x_{\mu\nu}}$ , ( $\lambda = 1, 2 \dots l$ )

durch Potenzreihen mittelst des binomischen Satzes darzustellen. Man wird hierbei von denselben Erwägungen geleitet werden, die zu der Darstellung der Functionen  $\sqrt[m]{x_\nu}$  führten. Es muss nur  $x_{\mu\nu}$  an Stelle von  $x_\nu$  gesetzt werden. Es ergibt sich so, wenn  $\varepsilon_l = \cos 2\pi/l + i \sin 2\pi/l$ :

$$16) \quad \sqrt[l]{x_{\mu\nu}} = \varepsilon_l^\lambda \cdot \sum_{\alpha; \beta} \varepsilon_m^{\alpha\mu} \cdot \varepsilon_n^{\beta\nu} \cdot A_{\alpha\beta}.$$

Eine beliebige rationale Function dieser Wurzel und der Wurzeln  $\sqrt[m]{x_\nu}$  und  $\sqrt[n]{a}$  kann daher für denselben Convergencebereich der unabhängigen Variablen wie die Wurzeln selbst in Form einer Reihe dargestellt werden.

Bedeutend somit  $r_0, r_1, \dots r_{l-1}$  rationale Functionen von  $\sqrt[m]{x_\nu}$  und  $\sqrt[n]{a}$ , deren jede nach den Potenzen der Einheitswurzeln  $\varepsilon_n^\nu$  und  $\varepsilon_m^\mu$  geordnet werden kann, und setzt man

$$17) \quad x_{\lambda\mu\nu} = r_0 + r_1 \sqrt[l]{x_{\nu\mu}} + \dots r_{l-1} (\sqrt[l]{x_{\nu\mu}})^{l-1},$$

so erhält man:

$$18) \quad x_{\lambda\mu\nu} = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=l-1} \sum_{\beta=0}^{\beta=m-1} \sum_{\gamma=0}^{\gamma=n-1} \varepsilon_l^{\alpha\lambda} \cdot \varepsilon_m^{\beta\mu} \cdot \varepsilon_n^{\gamma\nu} \cdot A_{\alpha\beta\gamma}$$

$$(\lambda = 1, 2 \dots l; \mu = 1, 2 \dots m; \nu = 1, 2 \dots n).$$

Wird jetzt eine Potenz von  $x$  den Functionen  $x_{\lambda\mu\nu}$  gleichgesetzt, so werden die dadurch neu definirten Wurzelgrössen und ebenso beliebige rationale



Werden diese Potenzreihen in die  $n_1, n_2, \dots, n_r$  Functionen

$$23) \quad x_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r} = \Re(x_{\lambda_1}^{(r)} \dots x_{\lambda_2}^{(2)}, x_{\lambda_1}^{(1)}; a_1, a_2, \dots, a_\mu)$$

des allgemeinen Wurzelausdrucks eingesetzt, so erhält man folgende einheitliche Darstellungsform, welche ich die Normalform nenne:

$$24) \quad x_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r} = \sum_{\alpha_1=0}^{\alpha_1=n_1-1} \dots \sum_{\alpha_r=0}^{\alpha_r=n_r-1} \varepsilon_{n_1}^{\alpha_1 \lambda_1} \dots \varepsilon_{n_r}^{\alpha_r \lambda_r} \cdot a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r},$$

$$(\lambda_1 = 1, 2, \dots, n_1; \dots, \lambda_r = 1, 2, \dots, n_r),$$

wo die  $a$  eindeutige und stetige Potenzreihen sind, die für den Convergencebereich der ursprünglichen Variablen Geltung haben.

§ 7. Zu demselben Resultate kann man auch gelangen, wenn in  $x^n = a$  die Variable  $a = e^{\alpha}$  gesetzt und  $\alpha = \log a = \log e^{\gamma} + \log \left(1 + \frac{a - e^{\gamma}}{e^{\gamma}}\right)$  für einen Convergencebereich von  $a$  in eine Reihe entwickelt wird. Die  $n$  Functionen  $\sqrt[n]{a}$  werden jetzt durch  $e^{\frac{\alpha + 2\nu\pi i}{n}}$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ) repräsentirt und für den allgemeinen Wurzelausdruck erhält man folgende Definitionsgleichungen:

$$25) \quad \begin{aligned} a) & \left\{ \begin{aligned} (x^{(1)})^{n_1} &= \Re_1(a_1, a_2, \dots, a_\mu); \varrho_1 = \log \Re_1; \\ x_{\lambda_1}^{(1)} &= e^{\frac{\varrho_1 + \lambda_1 \cdot 2\pi i}{n_1}} = e^{\varrho_1'}; (\lambda_1 = 1, 2, \dots, n_1); \end{aligned} \right. \\ b) & \left\{ \begin{aligned} (x^{(2)})^{n_2} &= \Re_2(e^{\varrho_1'}; a_1, a_2, \dots, a_\mu); \varrho_2 = \log \Re_2; \\ x_{\lambda_2}^{(2)} &= e^{\frac{\varrho_2 + \lambda_2 \cdot 2\pi i}{n_2}} = e^{\varrho_2'}; (\lambda_2 = 1, 2, \dots, n_2); \end{aligned} \right. \\ & \dots \dots \dots \\ c) & \left\{ \begin{aligned} (x^{(r)})^{n_r} &= \Re_r(e^{\varrho_{r-1}'} \dots e^{\varrho_1'}; a_1, a_2, \dots, a_\mu); \varrho_r = \log \Re_r; \\ x_{\lambda_r}^{(r)} &= e^{\frac{\varrho_r + \lambda_r \cdot 2\pi i}{n_r}} = e^{\varrho_r'}; (\lambda_r = 1, 2, \dots, n_r). \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Der allgemeine Wurzelausdruck lautet dann:

$$26) \quad \Re(e^{\varrho_1'} \dots e^{\varrho_{r-1}'}, e^{\varrho_r'}; a_1, a_2, \dots, a_\mu), \left( \varrho_k' = \frac{1}{n_k} (\varrho_k + \lambda_k 2\pi i), \lambda_k = 1, 2, \dots, n_k \right),$$

wo an Stelle der Wurzeln, die aus vorhandenen Wurzelgrößen gezogen werden, Exponentialfunctionen treten, deren Argumente selbst wieder Exponentialfunctionen enthalten. Ersetzt man nun in der obigen Reihe von Definitionsgleichungen die  $e^{\frac{\varrho_1}{n_1}}, e^{\frac{\varrho_2}{n_2}}, \dots, e^{\frac{\varrho_r}{n_r}}$  durch die für einen Convergencebereich der Variablen  $a$  giltigen Potenzreihen und ordnet man sie, wenn sie in den Wurzelausdruck eingesetzt werden, nach Potenzen der Einheitswurzeln:  $\varepsilon_{n_1}^{\lambda_1} = e^{\lambda_1 \cdot \frac{2\pi i}{n_1}}; \varepsilon_{n_2}^{\lambda_2} = e^{\lambda_2 \cdot \frac{2\pi i}{n_2}} \dots \varepsilon_{n_r}^{\lambda_r} = e^{\lambda_r \cdot \frac{2\pi i}{n_r}}$ , so wird auch auf diesem Wege die Normalform 24) gewonnen.

so die Möglichkeit bewiesen, den allgemeinen Wurzelausdruck in die Normalform 24) zu bringen, so ist noch die Bemerkung von





von  $N$  gegeben wird, so folgt, dass es für ein vorgelegtes  $N$  bloß eine allgemeinste Normalform giebt, für welche die Einheitswurzeln alle vom Primzahlgrade sind, und für welche die Anzahl  $\nu$  der Einheitswurzeln — die Ordnung der Normalform — ihr Maximum erreicht.

## II. Die Eigenschaften der Normalformen, in welchen die Grade der Einheitswurzeln gewisse Bedingungen erfüllen.

§ 1. Die  $n_1 \cdot n_2 \dots n_\nu$  Functionen der Normalform:

$$1) \quad x_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_\nu} = \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_\nu} \varepsilon_{n_1}^{\alpha_1 \lambda_1} \dots \varepsilon_{n_\nu}^{\alpha_\nu \lambda_\nu} \cdot a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\nu}$$

bezeichne ich zusammenfassend durch des Symbol:

$$2) \quad F(\varepsilon_{n_1}; \varepsilon_{n_2} \dots \varepsilon_{n_\nu}).$$

Diese Bezeichnungsweise deutet an, dass es lediglich die  $\nu$  Einheitswurzeln

$$\varepsilon_{n_1} = \cos 2\pi/n_1 + i \sin 2\pi/n_1; \varepsilon_{n_2} = \cos 2\pi/n_2 + i \sin 2\pi/n_2; \dots$$

sind, welche den Charakter der Normalform bestimmen, und dass das System der  $n_1 \cdot n_2 \dots n_\nu$  Functionen  $x_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_\nu}$  aus  $x_{11 \dots 1}$  erhalten wird, wenn die Reihen der aufeinander folgenden Potenzen der Einheitswurzeln an Stelle der ersten Potenzen treten.

Werden nun aus den  $\varepsilon_{n_1}, \varepsilon_{n_2} \dots \varepsilon_{n_\nu}$  andere Einheitswurzeln derselben Grade gebildet, die durch  $\eta_{n_1}, \eta_{n_2} \dots \eta_{n_\nu}$  bezeichnet werden sollen, und stellt dann das Symbol

$$3) \quad F(\eta_{n_1}; \eta_{n_2} \dots \eta_{n_\nu})$$

gleichfalls das System der  $n_1 \cdot n_2 \dots n_\nu$  Functionen  $x_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_\nu}$  dar, wenn in  $\eta_{n_1}, \eta_{n_2} \dots \eta_{n_\nu}$  die Reihen der aufeinander folgenden Potenzen von  $\varepsilon_{n_1}, \varepsilon_{n_2} \dots \varepsilon_{n_\nu}$  eingesetzt werden, so nenne ich dieses Symbol dem ersten äquivalent und ich setze:

$$4) \quad F(\varepsilon_{n_1}; \varepsilon_{n_2} \dots \varepsilon_{n_\nu}) \sim F(\eta_{n_1}; \eta_{n_2} \dots \eta_{n_\nu}).$$

Dass es für ein gegebenes System von Einheitswurzeln  $\varepsilon_{n_1}, \varepsilon_{n_2} \dots \varepsilon_{n_\nu}$  bloß eine beschränkte Anzahl äquivalenter Symbole  $F$  giebt, ist evident. Die Anzahl der äquivalenten Symbole und die Bildungsweise der ein jedes charakterisirenden  $\eta_{n_k}; (k=1, 2 \dots \nu)$  aus den  $\varepsilon_{n_1}, \varepsilon_{n_2} \dots \varepsilon_{n_\nu}$  will ich jetzt bestimmen. Man wird dadurch zur Kenntniss der Eigenschaften der Normalform geführt.

Bei dieser Untersuchung gehe ich stufenweise vor und nehme der Reihe nach an, dass die  $\nu$  Zahlen  $n_1, n_2 \dots n_\nu$  relative Primzahlen seien, dass sie sodann alle denselben Werth haben, und dass sie schliesslich Potenzen einer und derselben Zahl seien. Aus diesen Specialfällen ergibt sich dann der allgemeine Fall für beliebig gewählte  $n_1 \dots n_\nu$  ohne Mühe.



äquivalenten Symbole dargestellt. Es giebt daher auch bloß die angegebenen Vertauschungen der  $a$ .

An erster Stelle ergibt sich somit folgende Eigenschaft der Normalform:

Sind die  $n_1, n_2 \dots n_\nu$  relative Primzahlen, so bleibt das System der Functionen der Normalform 1), in welcher die  $a$  keinen geeigneten Bedingungsgleichungen unterworfen sind, dann und nur dann ungeändert, wenn in jeder Function Vertauschungen der  $a$  vorgenommen werden, deren Anzahl

$$\varphi(n_1) \cdot \varphi(n_2) \dots \varphi(n_\nu)$$

ist, und durch welche alle

$$a_{\alpha_1 \dots \alpha_\nu} \text{ in } a_{i_1 \alpha_1 \dots i_\nu \alpha_\nu}$$

$$(\alpha_k = 0, 1 \dots n_k - 1; i_k \text{ relativ prim zu } n_k; k = 1, 2 \dots \nu)$$

übergehen.

§ 3. Ist nun  $n_1 = n_2 = \dots n_\nu = n$ , so kann in den äquivalenten Symbolen:

$$F(\eta_{n_1}; \eta_{n_2} \dots \eta_{n_\nu})$$

$$9) \quad \eta_{n_k} = \varepsilon_{n_1}^{i_{1k}} \cdot \varepsilon_{n_2}^{i_{2k}} \dots \varepsilon_{n_\nu}^{i_{\nu k}}; \quad (k = 1, 2 \dots \nu)$$

gesetzt werden, wo jedoch die  $i_{1k}, i_{2k} \dots i_{\nu k}$  die Werthe von 1 bis  $n$  nicht in völlig beliebiger Weise annehmen dürfen, da jedes  $\eta_{n_k}$  unabhängig von jedem anderen die Reihe der  $n$  Einheitswurzeln  $n^{\text{ten}}$  Grades darstellen soll, falls die aufeinander folgenden Potenzen

$$\varepsilon_{n_1}^{\lambda_1}, \varepsilon_{n_2}^{\lambda_2} \dots \varepsilon_{n_\nu}^{\lambda_\nu}; \quad (\lambda_i = 1, 2 \dots n)$$

an Stelle der  $\varepsilon_{n_1}, \varepsilon_{n_2} \dots \varepsilon_{n_\nu}$  gesetzt werden.

Um in diesem Falle das Bildungsgesetz der  $\eta_{n_k}$  und die Anzahl der äquivalenten Symbole anzugeben, treffe ich folgende Festsetzungen:

Zwei Systeme von  $\nu$  ganzen Zahlen  $a_1, a_2 \dots a_\nu; a_1', a_2' \dots a_\nu'$  sollen congruent bezüglich des Moduls  $n$  heissen, wenn

$$a_1 \equiv a_1' \pmod{n}; a_2 \equiv a_2' \pmod{n}; \dots a_\nu \equiv a_\nu' \pmod{n};$$

wo nicht, sollen sie incongruent bezüglich desselben Moduls genannt werden.

Die  $n^\nu$  bezüglich des Moduls  $n$  incongruenten Systeme von je  $\nu$  Zahlen sollen als vollständiges Restsystem bezeichnet werden.

Die Zahlen  $a_1, a_2 \dots a_\nu$  sollen relativ prim zu  $n$  genannt werden, wenn ihr grösster gemeinsamer Theiler relativ prim zu  $n$  ist.

Bezeichnen die  $a_{ik} (i = 1, 2 \dots \nu; k = 1, 2 \dots \nu)$  der Reihe nach und unabhängig von einander die Werthe eines vollständigen Systems mit  $n^\nu$  auf  $n$  incongruenter Zahlen und bildet man die  $n^\nu$  Determinanten:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{\nu 1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{\nu 2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1\nu} & a_{2\nu} & \dots & a_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

so soll die Anzahl dieser Determinanten, deren Werth relativ prim zu  $n$  ist, in Analogie mit der bekannten zahlentheoretischen Function  $\varphi(n)$ , durch  $\varphi(n, \nu)$  angegeben werden, so dass  $\varphi(n, \nu)$  eine Erweiterung von  $\varphi(n)$  ist und  $\varphi(n, 1)$  die Function  $\varphi(n)$  selbst darstellt. Diese Function  $\varphi(n, \nu)$  wird durch folgende Sätze bestimmt:

1. Sind  $n$  und  $m$  zwei relative Primzahlen, so ist:

$$10) \quad \varphi(n \cdot m, \nu) = \varphi(n, \nu) \cdot \varphi(m, \nu).$$

Denn jede Zahl  $a_{ik}$  aus der Reihe eines vollständigen Restsystems mit Bezug auf den Modul  $n \cdot m$  kann in die Form

$$a_{ik}' n + a_{ik}'' m$$

gebracht werden. Substituirt man diese Darstellungen der  $a_{ik}$  in die obige Determinante, so ist:

$$|a_{11}, a_{22} \dots a_{\nu\nu}| \equiv |a_{11}', a_{22}' \dots a_{\nu\nu}'| n^\nu + |a_{11}'', a_{22}'' \dots a_{\nu\nu}''| m^\nu \pmod{n \cdot m}.$$

Somit ist  $|a_{11}, a_{22} \dots a_{\nu\nu}|$  relativ prim zu  $m \cdot n$ , wenn  $|a_{11}', a_{22}' \dots a_{\nu\nu}'|$  relativ prim zu  $m$  und  $|a_{11}'', a_{22}'' \dots a_{\nu\nu}''|$  relativ prim zu  $n$  ist; woraus der behauptete Satz folgt. Ueberdies zeigt sich, dass  $\varphi(1, \nu) = 1$  zu setzen ist.

2. Ist  $n$  gleich einer Primzahl  $p$ , so ist:

$$11) \quad \varphi(p, \nu) = (p^\nu - 1)(p^\nu - p) \dots (p^\nu - p^{\nu-1}).$$

Stellt man nämlich bei der Erzeugung der Determinanten  $|a_{ik}|$  beispielsweise erst die Elemente der ersten Horizontalreihe, dann die der zweiten u. s. w. her, so ergeben sich  $p^\nu - 1$  Werthensysteme  $a_{k1}$ ,  $p^\nu - p$  Werthensysteme  $a_{k2}$ , und allgemein  $p - p^{k-1}$  Werthensysteme  $a_{k\lambda}$ , ( $k = 1, 2 \dots \nu$ ). Denn es ist von den  $p^\nu$  bezüglich des Moduls  $p$  incongruenten Werthensystemen  $a_{11}, a_{21} \dots a_{\nu 1}$  bloß das dem System der Nullwerthe congruente in Abzug zu bringen. Es sind sodann von den  $p^\nu - 1$  Werthensystemen  $a_{12}, a_{22} \dots a_{\nu 2}$ , die zu  $p$  relativ prim sind, mit Rücksicht auf das festgewählte System  $a_{11}, a_{21} \dots a_{\nu 1}$  alle diejenigen bei Seite zu lassen, für welche die Congruenzen

$$a_{k2} \equiv a_{k1} \cdot t \pmod{p}; \quad (t \text{ relativ prim zu } p)$$

bestehen. Es giebt deren  $p - 1$ . Geht man in dieser Weise weiter und hat man die Systeme  $a_{k1}, a_{k2} \dots a_{k\lambda-1}$ , ( $k = 1, 2 \dots \nu$ ) so bestimmt, dass sie relativ prim zu  $p$  sind und nicht die Congruenzen erfüllen:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{k2} \equiv a_{k1}t_{11}(\text{mod } p); \quad a_{k3} \equiv a_{k1}t_{21} + a_{k2}t_{22}(\text{mod } p); \\ a_{k4} \equiv a_{k1}t_{31} + a_{k2}t_{32} + a_{k3}t_{33}(\text{mod } p) \dots \\ a_{k\lambda-1} \equiv a_{k1}t_{\lambda-2,1} + a_{k2}t_{\lambda-2,2} + \dots + a_{k\lambda-2}t_{\lambda-2,\lambda-2}(\text{mod } p), \end{array} \right.$$

wo  $t_{11}$  und in gleicher Weise die Zahlensysteme  $t_{21}, t_{22}; t_{31}, t_{32}, t_{33}; \dots t_{\lambda-2,1}, t_{\lambda-2,2} \dots t_{\lambda-2,\lambda-2}$  zu  $p$  relativ prim sind, so ist für jedes Zahlensystem  $t_{\lambda-1,1}, t_{\lambda-1,2} \dots t_{\lambda-1,\lambda-1}$ , das zu  $p$  relativ prim ist, auch das Zahlensystem

$$a_{k1}t_{\lambda-1,1} + a_{k2}t_{\lambda-1,2} + \dots + a_{k\lambda-1}t_{\lambda-1,\lambda-1}; \quad (k=1, 2 \dots \nu)$$

zu  $p$  relativ prim. Es sind darum von den  $p^\nu - 1$  Zahlensystemen

$$a_{k2}; \quad (k=1, 2 \dots \nu)$$

alle diejenigen in Abzug zu bringen, für welche

$$a_{k2} \equiv a_{k1}t_{\lambda-1,1} + a_{k2}t_{\lambda-1,2} + \dots + a_{k\lambda-1}t_{\lambda-1,\lambda-1}(\text{mod } p).$$

Ihre Anzahl beträgt  $p^{\lambda-1} - 1$ , wodurch die Richtigkeit der aufgestellten Formel bewiesen wird.

3. Ist  $n$  gleich der Potenz einer Primzahl  $p^\pi$ , so ist:

$$12) \quad \varphi(p^\pi, \nu) = p^{\nu(\pi-1)} \varphi(p, \nu).$$

Denn jede Determinante, die zu  $p^\pi$  relativ prim ist, ist auch zu  $p$  relativ prim. Liegt nun eine Determinante  $|a_{ik}|$  vor, die zu  $p$  relativ prim ist, und deren Elemente aus einem zum Modul  $p$  gehörenden vollständigen Restsystem gewählt wurden, so kann in ihr jedes  $a_{ik}$  durch die  $p^{\pi-1}$  Werthe  $a_{ik} + s_{ik}p$ ; ( $s_{ik} = 0, 1, 2 \dots p^{\pi-1} - 1$ ) ersetzt werden; denn jetzt müssen die  $a_{ik}$  aus einem zum Modul  $p^\pi$  gehörenden vollständigen Restsysteme gewählt werden. Es werden somit aus jeder der  $\varphi(p, \nu)$  Determinanten, die zu  $p$  relativ prim sind,  $p^{\nu(\pi-1)}$  Determinanten, die in Bezug auf den Modul  $p^\pi$  relativ prim sind. Daraus ergibt sich die angegebene Gesamtzahl.

Auf Grund dieser Festsetzungen kann die Anzahl der äquivalenten Symbole  $F(\eta_{n_1}; \eta_{n_2} \dots \eta_{n_\nu})$  und die Bildungsweise der

$$\eta_{n_k} = \varepsilon_{n_1}^{i_{1k}} \cdot \varepsilon_{n_2}^{i_{2k}} \dots \varepsilon_{n_\nu}^{i_{\nu k}}; \quad (k=1, 2 \dots \nu)$$

leicht angegeben werden.

Es müssen nämlich die  $i_{1k}, i_{2k} \dots i_{\nu k}$  der Art bestimmt werden, dass die  $\nu$  Summen

$$\lambda_1 i_{1k} + \lambda_2 i_{2k} + \dots + \lambda_\nu i_{\nu k}; \quad (k=1, 2 \dots \nu)$$

zugleich mit dem  $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_k$  ein vollständiges Restsystem bezüglich des Moduls  $n$  darstellen. Aus der Aufstellung des Systemes von Congruenzen folgt aber unmittelbar, dass dies zutrifft, wenn die aus den  $i_{ik}$  gebildete Determinante relativ prim zu  $n$  ist.

Die Anzahl der äquivalenten Symbole ist somit:

$$\varphi(n, \nu)$$

und die Symbole selbst werden dargestellt durch:

$$13) \left\{ \begin{array}{l} F(\varepsilon_{n_1}; \varepsilon_{n_2} \dots \varepsilon_{n_\nu}) \sim F(\eta_{n_1}; \eta_{n_2} \dots \eta_{n_\nu}); \\ \eta_{n_k} = \varepsilon_{n_1}^{i_{1k}} \varepsilon_{n_2}^{i_{2k}} \dots \varepsilon_{n_\nu}^{i_{\nu k}}; \quad (k=1, 2 \dots \nu); \\ \left| \begin{array}{ccc} i_{11} & i_{21} & \dots i_{\nu 1} \\ i_{12} & i_{22} & \dots i_{\nu 2} \\ \dots & \dots & \dots \\ i_{1\nu} & i_{2\nu} & \dots i_{\nu \nu} \end{array} \right| \text{ relativ prim zu } n. \end{array} \right.$$

Es ändert sich somit das System der  $n^\nu$  Functionen der Normalform dann und nur dann nicht, wenn die Producte der Einheitswurzeln  $\varepsilon_{n_1}^{i_{1k}} \varepsilon_{n_2}^{i_{2k}} \dots \varepsilon_{n_\nu}^{i_{\nu k}}$  an Stelle der  $\varepsilon_{n_k}$  gesetzt werden und die Determinante der  $i_{2k}$  relativ prim zu  $n$  ist. Es ist daher:

$$14) \left\{ \begin{array}{l} S \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_\nu} \varepsilon_{n_1}^{\alpha_1 \lambda_1} \dots \varepsilon_{n_\nu}^{\alpha_\nu \lambda_\nu} \cdot a_{\alpha_1 \dots \alpha_\nu} \\ \equiv S \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_\nu} (\varepsilon_{n_1}^{i_{11} \lambda_1} \dots \varepsilon_{n_\nu}^{i_{\nu 1} \lambda_\nu})^{\alpha_1} \dots (\varepsilon_{n_1}^{i_{1\nu} \lambda_1} \dots \varepsilon_{n_\nu}^{i_{\nu \nu} \lambda_\nu})^{\alpha_\nu} \cdot a_{\alpha_1 \dots \alpha_\nu}. \end{array} \right.$$

Da nun aber die  $\nu$  Summen  $\alpha_1 i_{1k} + \alpha_2 i_{2k} + \dots \alpha_\nu i_{\nu k}$ ; ( $k=1, 2 \dots \nu$ ) zugleich mit den  $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_\nu$  ein vollständiges Restensystem bezüglich des Moduls  $n$  darstellen, so kann

$$15) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_\nu} \varepsilon_{n_1}^{(\alpha_1 i_{11} + \dots \alpha_\nu i_{1\nu}) \lambda_1} \dots \varepsilon_{n_\nu}^{(\alpha_1 i_{\nu 1} + \dots \alpha_\nu i_{\nu \nu}) \lambda_\nu} \cdot a_{\alpha_1 i_{11} + \dots \alpha_\nu i_{1\nu}; \dots \alpha_1 i_{\nu 1} + \dots \alpha_\nu i_{\nu \nu}} \\ - \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_\nu} \varepsilon_{n_1}^{\alpha_1 \lambda_1} \dots \varepsilon_{n_\nu}^{\alpha_\nu \lambda_\nu} \cdot a_{\alpha_1 \dots \alpha_\nu} \end{array} \right.$$

gesetzt werden, wo die Indices  $\alpha_1 i_{1k} + \dots \alpha_\nu i_{\nu k}$  auf ihre kleinsten positiven Werthe mit Rücksicht auf  $n$  als Modul zu reduciren sind. Es ist daher auch:

$$16) \left\{ \begin{array}{l} S \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_\nu} \varepsilon_{n_1}^{(\alpha_1 i_{11} + \dots \alpha_\nu i_{1\nu}) \lambda_1} \dots \varepsilon_{n_\nu}^{(\alpha_1 i_{\nu 1} + \dots \alpha_\nu i_{\nu \nu}) \lambda_\nu} \cdot a_{\alpha_1 i_{11} + \dots \alpha_\nu i_{1\nu}; \dots \alpha_1 i_{\nu 1} + \dots \alpha_\nu i_{\nu \nu}} \\ \equiv S \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_\nu} (\varepsilon_{n_1}^{i_{11} \lambda_1} \dots \varepsilon_{n_\nu}^{i_{\nu 1} \lambda_\nu})^{\alpha_1} \dots (\varepsilon_{n_1}^{i_{1\nu} \lambda_1} \dots \varepsilon_{n_\nu}^{i_{\nu \nu} \lambda_\nu})^{\alpha_\nu} \cdot a_{\alpha_1 \dots \alpha_\nu}. \end{array} \right.$$

Aus dieser Darstellungsform folgt, dass das System der  $n^\nu$  Functionen der Normalform nicht geändert wird, wenn in jeder Function die  $a_{\alpha_1 \dots \alpha_\nu}$  durch die  $a_{\alpha_1 i_{11} + \dots \alpha_\nu i_{1\nu}; \dots \alpha_1 i_{\nu 1} + \dots \alpha_\nu i_{\nu \nu}}$  ersetzt werden. Diese Vertauschungen sind die einzigen, die vorgenommen werden dürfen, falls nicht solche durch Bedingungsgleichungen zwischen den  $a$  begründet werden, da — wie schon oben erwähnt wurde — jede Vertauschung der  $a$  auf eine solche der Einheitswurzeln zurückführt.

An zweiter Stelle findet man somit folgende Eigenschaft der Normalform:

Sind die  $\nu$  Zahlen  $n_1, n_2 \dots n_\nu$  alle gleich  $n$ , so bleibt das System der  $n^\nu$  Functionen der Normalform 1), in welcher die

$a$  keinen geeigneten Bedingungsgleichungen genügen, dann und nur dann ungeändert, wenn in jeder Function Vertauschungen der  $a$  vorgenommen werden, deren Anzahl durch  $\varphi(n, \nu)$  bezeichnet wird, und durch welche alle

$$a_{\alpha_1} \dots a_{\alpha_\nu} \text{ in } a_{\alpha_1 i_{11}} + \dots a_{\alpha_\nu i_{1\nu}}; \dots a_{\alpha_1 i_{\nu 1}} + \dots a_{\alpha_\nu i_{\nu \nu}} \\ (a_k = 0, 1 \dots n-1; k = 1, 2 \dots \nu)$$

übergehen, wo der Werth der Determinante

$$\begin{vmatrix} i_{11} & i_{21} \dots i_{\nu 1} \\ i_{12} & i_{22} \dots i_{\nu 2} \\ \cdot & \cdot \dots \cdot \\ i_{1\nu} & i_{2\nu} \dots i_{\nu \nu} \end{vmatrix}$$

relativ prim zu  $n$  ist.

§ 4. Es werde nun vorausgesetzt, dass die Grade  $n_1, n_2 \dots n_\nu$  der Einheitswurzeln der Normalform Potenzen einer und derselben Zahl und zwar einer Primzahl seien.

Ich setze demgemäss

$$17) \quad n_k = p^{\alpha_k}; \quad (k = 1, 2 \dots \nu)$$

und nehme überdies an, dass  $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots \alpha_\nu \geq 1$ , dass aber vorläufig keine an Werth gleiche  $\alpha$  vorkommen.

In den äquivalenten Symbolen

$$F(\varepsilon_{n_1}; \varepsilon_{n_2} \dots \varepsilon_{n_\nu}) \sim F(\eta_{n_1}; \eta_{n_2} \dots \eta_{n_\nu})$$

kann nun gesetzt werden:

$$18) \quad \eta_{n_k} = \varepsilon_{n_1}^{i_{1k} \frac{n_1}{n_k}} \dots \varepsilon_{n_{k-1}}^{i_{k-1,k} \frac{n_{k-1}}{n_k}} \cdot \varepsilon_{n_k}^{i_{kk}} \cdot \varepsilon_{n_{k+1}}^{i_{k+1,k}} \dots \varepsilon_{n_\nu}^{i_{\nu k}}.$$

Denn für

$$n_\mu = p^{\alpha_\mu}, \quad n_\lambda = p^{\alpha_\lambda}, \quad \alpha_\mu > \alpha_\lambda$$

ist

$$\frac{n_\mu}{n_\lambda} \varepsilon_{n_\mu} = \varepsilon_{n_\lambda},$$

so dass:

$$18a) \quad \eta_{n_k} = \varepsilon_{n_k}^{(i_{1k} + \dots + i_{k-1,k} + i_{kk} + \frac{n_k}{n_{k+1}} i_{k+1,k} + \dots + \frac{n_k}{n_\nu} i_{\nu k})},$$

wo  $i_{1k}, i_{2k} \dots i_{kk}$  aus der Reihe der Zahlen  $1, 2 \dots n_k$ ;  $i_{k+1,k}$  dagegen und entsprechend  $i_{k+2,k} \dots i_{\nu k}$  aus der Zahlenreihe

$$1, 2 \dots n_{k+1} \text{ resp. } 1, 2 \dots n_{k+2}; \dots 1, 2 \dots n_\nu$$

zu wählen sind

Die Werthe  $i_{\lambda k}$  müssen aber der Art aus den zugehörigen Zahlenreihen gewählt werden, dass durch Einsetzen der successiven Potenzen  $\varepsilon_{n_1}^{\lambda_1} \dots \varepsilon_{n_\nu}^{\lambda_\nu}$  an Stelle von  $\varepsilon_{n_1} \dots \varepsilon_{n_\nu}$  in die Darstellungsformen 18) die  $\eta_{n_1}, \eta_{n_2} \dots \eta_{n_\nu}$ , deren Werthe durch 18a) ausgedrückt werden, alle  $n_1 \cdot n_2 \dots n_\nu$  Systeme von Einheitswurzeln darstellen, die man aus den *Einheitswurzeln* vom Grade  $n_1, n_2 \dots n_\nu$  bilden kann.



Es müssen somit die  $i_{\lambda k}$  so gewählt werden, dass die  $\nu$  Congruenzen:

$$19) \quad \lambda_1 i_{1k} + \dots + \lambda_k i_{kk} + \lambda_{k+1} i_{k+1k} \frac{n_k}{n_{k+1}} + \dots + \lambda_\nu i_{\nu k} \frac{n_k}{n_\nu} \equiv a_k \pmod{n_k} \\ (k = 1, 2 \dots \nu)$$

zugleich mit den  $n_1 \cdot n_2 \dots n_\nu$  Werthensystemen

$$\lambda_1 = 1, 2 \dots n_1; \quad \lambda_2 = 1, 2 \dots n_2; \quad \lambda_\nu = 1, 2 \dots n_\nu$$

alle  $n_1 \cdot n_2 \dots n_\nu$  Systeme von Werthen  $a_1 \equiv 0, 1 \dots n_1 - 1 \pmod{n_1}$ ;  $a_2 \equiv 0, 1 \dots n_2 - 1 \pmod{n_2}$ ;  $\dots a_\nu \equiv 0, 1 \dots n_\nu - 1 \pmod{n_\nu}$  darstellen.

Hierzu ist, wie aus der Betrachtung des Systems der Congruenzen 19) sich ergibt, nothwendig und hinreichend, dass die aus den Coefficienten der  $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_\nu$  gebildete Determinante

$$20) \quad \begin{vmatrix} i_{11} & i_{21} p^{\alpha_1 - \alpha_2} & i_{31} p^{\alpha_1 - \alpha_3} & \dots & i_{\nu 1} p^{\alpha_1 - \alpha_\nu} \\ i_{12} & i_{22} & i_{32} p^{\alpha_2 - \alpha_3} & \dots & i_{\nu 2} p^{\alpha_2 - \alpha_\nu} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ i_{1\nu} & i_{2\nu} & i_{3\nu} & \dots & i_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

relativ prim zu  $p$  sei.

Beschränkt man die Werthe der  $i_{\lambda k}$  vorerst auf die Zahlen aus der Reihe  $1, 2 \dots p$ , so können (wenn die Bildung der Determinante mit den Elementen der ersten Horizontalreihe begonnen wird, um sodann die Elemente der zweiten, dritten Horizontalreihe u. s. w. zu gewinnen)  $i_{21} \dots i_{\nu 1}$  alle Zahlenwerthe von 1 bis  $p$  annehmen, während  $i_{11}$  blos die Zahlenwerthe  $1 \dots p - 1$  erhalten darf. Es existiren somit  $p^{\nu-1} (p - 1)$  Systeme  $i_{11} \dots i_{\nu 1}$  die zu  $p$  relativ prim sind. Für die  $i_{12}, i_{22} \dots i_{\nu 2}$  giebt es zunächst  $(p^2 - 1) p^{\nu-2}$  Systeme, die zu  $p$  relativ prim sind; denn es können  $i_{32} \dots i_{\nu 2}$  alle Werthe von 1 bis  $p$  annehmen, während von den  $p^2$  Werthenpaaren für  $i_{21}, i_{22}$  nur das Werthenpaar  $p, p$  in Wegfall kommt. Von diesen Werthensystemen der  $i_{12}, i_{22} \dots i_{\nu 2}$  sind aber alle diejenigen mit Rücksicht auf das schon gewählte System der ersten Horizontalreihe in Abzug zu bringen, für welche

$$21a) \quad \begin{cases} i_{12} \equiv i_{11} t_{11}, & i_{22} \equiv i_{21} t_{11}, \dots i_{\nu 2} \equiv i_{\nu 1} t_{11} \pmod{p} \\ (t_{11} = 1, 2 \dots p - 1), \end{cases}$$

so dass  $p^{\nu-2} (p^2 - 1) - (p - 1)$  Werthensysteme resultiren. Ebenso sind von den  $p^{\nu-3} (p^3 - 1)$  Werthensystemen der  $i_{13}, i_{23} \dots i_{\nu 3}$ , die zu  $p$  relativ prim sind,  $p^2 - 1$  in Abzug zu bringen, für welche

$$21b) \quad \begin{cases} i_{13} \equiv t_{12} i_{11} + t_{22} i_{12}, & i_{23} \equiv t_{12} i_{21} + t_{22} i_{22}, \dots i_{\nu 3} \equiv t_{12} i_{\nu 1} + t_{22} i_{\nu 2} \pmod{p} \\ (t_{12}, t_{22} \text{ relativ prim zu } p). \end{cases}$$

Allgemein folgt, dass es  $p^{\nu-k} (p^k - 1)$  Werthensysteme der  $i_{1k}, i_{2k} \dots i_{\nu k}$  giebt, die zu  $p$  relativ prim sind, von denen  $(p^{k-1} - 1)$  Systeme bei Seite zu lassen sind, für welche:





### 342 Die Normalform des allgem. Wurzausdrucks u. ihre Eigenschaften.

bestimmt werden,  $i_s$  durch  $i_s + s \cdot p$ ,  $s = 0, 1, \dots, p^{a_s} - 1$ , ersetzt werden. Am jeder einzelnen Determinante werden so:

$$24) \quad \begin{vmatrix} p^{a_1-1} p^{a_2-1} p^{a_3-1} \dots p^{a_v-1} a_1 - 1 \\ -p^{a_1-1} (a_2 - 1) \dots p^{a_1-1} (a_2 - 1) \dots p^{a_1-1} (a_2 - 1) \\ \dots p^{a_1-1} (a_2 - 1) \dots p^{a_1-1} (a_2 - 1) \dots p^{a_1-1} (a_2 - 1) \end{vmatrix}$$

Man gelangt somit zu folgendem Resultate:

Sind die Grade der Einheitswurzeln der Normalform 1) Potenzen einer und derselben Primzahl  $p$ , so dass  $a_i = p^{k_i}$ , und bringt man diese  $v$  Zahlen in eine solche Reihenfolge, dass:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_v = p^{a_k} :$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_k - i_{k-1} - 1 = a_k - i_{k-1} - 1 = \dots a_k - i_k = p^{a_k} k_k :$$

$$(a_k > (a_k > \dots a_k) \geq 1 : v = k_1 + k_2 + \dots k_n :$$

so ist in den äquivalenten Symbolen

$$\left\{ \begin{array}{l} F(a_1 : a_2 \dots a_v) \sim F(a_1 : a_2 \dots a_v) \\ a_k = a_1 + \frac{a_1}{a_2} \dots a_{k-1} + \frac{a_1}{a_2} \dots a_{k-1} \dots a_v + 1 \\ = a_k \left( 1 + \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_1}{a_2} + \dots + \frac{a_1}{a_2} \right) \\ (k=1, 2, \dots, v) \end{array} \right.$$

zu setzen, wo die  $i_s$  so zu wählen sind, dass die Determinante 24) relativ prim zu  $p$  sei. Die Anzahl der äquivalenten Symbole wird angegeben durch die Function:

$$25) \quad \begin{vmatrix} \varphi(p^{a_1}, p^{a_2}, \dots, p^{a_v}) : v = k_1 + \dots k_n \\ -p^{a_1-1} (a_2 - 1) \dots p^{a_1-1} (a_2 - 1) \dots p^{a_1-1} (a_2 - 1) \\ \dots p^{a_1-1} (a_2 - 1) \dots p^{a_1-1} (a_2 - 1) \dots p^{a_1-1} (a_2 - 1) \\ \cdot \varphi(p : v = k_1 + \dots k_n) \end{vmatrix}$$

wo  $\varphi(p : v = k_1 + \dots k_n)$  das Product 25) darstellt.

Es ist ersichtlich, dass für  $k_1 = v$ ,  $k_2 = \dots = k_n = 0$  diese Function mit  $\varphi(p^v, v)$  wie es sein muss, sich reduziert, wo  $(a^v) = a$  gesetzt ist. Ebenso ist evident, dass für  $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 1$  diese Function das Product 22 zur Darstellung bringt.

Es bemerke schließlich noch, dass die vorstehenden Resultate auch für den Fall, dass die Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_v$  Potenzen eines Productes von Primzahlen sind, in ganz derselben Weise hätte gewonnen werden können; dabei ist zu beachten, dass die Potenzen einer beliebigen Zahl nichts anderes als Potenzen eines solchen Productes von Primzahlen sind.

Aus der Äquivalenz der Symbole folgt nun in gleicher Weise wie in der an erster und zweiter Stelle behandelten Fällen, dass:

$$29) \left\{ \begin{aligned} & S \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_\nu} \varepsilon_{n_1}^{\lambda_1 \alpha_1} \dots \varepsilon_{n_\nu}^{\lambda_\nu \alpha_\nu} \cdot a_{\alpha_1 \dots \alpha_\nu} \\ & \equiv S \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_\nu} (\varepsilon_{n_1}^{i_{11} \lambda_1} \dots \varepsilon_{n_\nu}^{i_{\nu 1} \lambda_\nu})^{\alpha_1} \cdot (\varepsilon_{n_1}^{i_{12} \frac{n_1}{n_2} \lambda_1} \dots \varepsilon_{n_\nu}^{i_{\nu 2} \lambda_\nu})^{\alpha_2} \dots \\ & \quad (\varepsilon_{n_1}^{i_{1\nu} \frac{n_1}{n_\nu} \lambda_1} \dots \varepsilon_{n_\nu}^{i_{\nu \nu} \lambda_\nu})^{\alpha_\nu} \cdot a_{\alpha_1 \dots \alpha_\nu}. \end{aligned} \right.$$

Der in 20) resp. 24) dargestellten Bedingung für die  $i_{\lambda k}$  zufolge repräsentiren die  $\nu$  Summen:

$$\alpha_1 i_{k1} + \dots \alpha_k i_{kk} + \alpha_{k+1} i_{k,k+1} \frac{n_k}{n_{k+1}} + \dots \alpha_\nu i_{k\nu} \frac{n_k}{n_\nu} \\ (k=1, 2 \dots \mu)$$

zugleich mit den  $\alpha_1 \dots \alpha_\nu$  alle  $n_1 \dots n_\nu$  Werthensysteme, die mit den  $n_1, n_2 \dots n_\nu$  bezüglich der Modulen  $n_1, n_2 \dots n_\nu$  incongruenten Zahlen gebildet werden können. Es ist somit:

$$30) \left\{ \begin{aligned} & \sum_{\alpha \dots \alpha_\nu} \varepsilon_{n_1}^{\alpha_1 \lambda_1} \dots \varepsilon_{n_\nu}^{\alpha_\nu \lambda_\nu} \cdot a_{\alpha_1 \dots \alpha_\nu} \\ & = \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_\nu} \varepsilon_{n_1}^{(\alpha_1 i_{11} + \alpha_2 i_{12} \frac{n_1}{n_2} + \dots \alpha_\nu i_{1\nu} \frac{n_1}{n_\nu}) \lambda_1} \dots \varepsilon_{n_\nu}^{(\alpha_1 i_{\nu 1} + \alpha_2 i_{\nu 2} + \dots \alpha_\nu i_{\nu \nu}) \lambda_\nu} \\ & \quad \cdot a_{\alpha_1 i_{11} + \dots \alpha_\nu i_{1\nu} \frac{n_1}{n_\nu}; \dots \alpha_1 i_{\nu 1} + \dots \alpha_\nu i_{\nu \nu}} \end{aligned} \right.$$

wo die Indices der  $a$  auf die kleinsten positiven Werthe bezüglich der zugehörigen Modulen zu reduciren sind. Daraus folgt für 29) folgende Form:

$$31) \left\{ \begin{aligned} & S \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_\nu} (\varepsilon_{n_1}^{i_{11} \lambda_1} \dots \varepsilon_{n_\nu}^{i_{\nu 1} \lambda_\nu})^{\alpha_1} \dots (\varepsilon_{n_1}^{i_{1\nu} \frac{n_1}{n_\nu} \lambda_1} \dots \varepsilon_{n_\nu}^{i_{\nu \nu} \lambda_\nu})^{\alpha_\nu} \cdot a_{\alpha_1 \dots \alpha_\nu} \\ & = S \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_\nu} \varepsilon_{n_1}^{(\alpha_1 i_{11} + \dots \alpha_\nu i_{1\nu} \frac{n_1}{n_\nu}) \lambda_1} \dots \varepsilon_{n_\nu}^{(\alpha_1 i_{\nu 1} + \dots \alpha_\nu i_{\nu \nu}) \lambda_\nu} \\ & \quad \cdot a_{\alpha_1 i_{11} + \dots \alpha_\nu i_{1\nu} \frac{n_1}{n_\nu}; \dots \alpha_1 i_{\nu 1} + \dots \alpha_\nu i_{\nu \nu}} \end{aligned} \right.$$

An dritter Stelle erhält man daraus unmittelbar folgende Eigenschaft der Normalform:

Sind die  $\nu$  Zahlen  $n_1, n_2 \dots n_\nu$  Potenzen einer Primzahl  $p$  in der aus 17) resp. 23) ersichtlichen Weise, so bleibt das System der Functionen der Normalform 1), falls für die Grössen  $a$  keine geeigneten Bedingungsgleichungen bestehen, dann und nur dann ungeändert, wenn in jeder Function die  $a_{\alpha_1 \dots \alpha_\nu}$  mit den

$$a_{\alpha_1 i_{11} + \alpha_2 i_{12} \frac{n_1}{n_2} + \dots \alpha_\nu i_{1\nu} \frac{n_1}{n_\nu}; \dots \alpha_1 i_{\nu 1} + \alpha_2 i_{\nu 2} + \dots \alpha_\nu i_{\nu \nu}}$$

vertauscht werden. Es müssen hier die  $i_{\lambda k}$  so gewählt werden, dass der Werth der Determinante 20) resp. 24) relativ prim zu  $p$  sei. Dann wird die Anzahl dieser Vertauschungen durch

$$\varphi(p^{(\alpha^1)} \dots p^{(\alpha^{(\mu)} k_\mu)}; \nu = k_1 + \dots k_\mu),$$

bezeichnet, wodurch das in der Formel 22) resp. 27) angegebene Product angedeutet wird.

(Schluss folgt.)

## XVII.

### Ueber eine besondere cubische Raumcurve (die gleichwinklige cubische Hyperbel).

Von

Dr. H. KRÜGER

in Pless (O.-S.).

---

Die cubischen Raumcurven sind bisher namentlich in ihren allgemeinen projectivischen Eigenschaften untersucht worden, die sie in eine auffallende Analogie zu den ebenen Kegelschnitten stellen. Metrische Beziehungen dieser einfachsten Raumcurven sind dagegen nur wenige bekannt.\* Um zu solchen zu gelangen, bietet sich u. A. folgender Weg: Man sucht unter den einer cubischen Raumcurve ein- oder umgeschriebenen Flächen zweiter Ordnung diejenigen zu ermitteln, welche durch einfache metrische Verhältnisse ausgezeichnet sind. Durch dieses Princip habe ich eine besondere Art cubischer Raumcurve gefunden, die gerade in metrischer Hinsicht interessant ist und in gewisser Weise ein Analogon zu der ebenen gleichseitigen Hyperbel darstellt.

#### 1. Die einer Raumcurve dritter Classe $K^3$ einbeschriebenen gleichwinkligen Hyperboloide.

Aus den erwähnten, metrisch ausgezeichneten Regelflächen zweiter Ordnung wähle ich das gleichwinklige Hyperboloid und bezeichne damit ein solches, dessen Asymptotenkegel zu einem gleichseitigen Kegel reciprok\*\* ist, das heisst ein und damit  $\infty$  Tripel von zu einander rechtwinkligen Berührungsebenen besitzt. Diese Bedingung lässt sich einfacher so aussprechen: Für ein gleichwinkliges Hyperboloid reducirt sich die Orthogonalkugel (der Ort der Scheitel aller Dreifläche von zu einander rechtwinkligen Berührungsebenen) auf den Mittelpunkt desselben (Nullkugel), oder die Achsen des Hyperboloids sind durch die Gleichung verbunden:

---

$$r^2 = c^2 + b^2 - a^2 = 0.$$

\* Vergl. Reye, Der gegenwärtige Stand unserer Kenntniss der cubischen Raumcurven. Festschrift der mathematischen Gesellschaft in Hamburg 1890, S. 57.

\*\* Vergl. Schröter, Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung S. 87. — Die in diesem Werke angewandte Bezeichnung habe ich ebenfalls durchweg angenommen.



1. Die Orthogonalpunkte von  $K^3$  sind reell, der Kreis  $\mathcal{R}^2\mu$  also imaginär: Sämmtliche Hyperbeln in den Schmiegungebenen von  $K^3$  sind spitzwinklig mit der Achsenbedingung:

$$a^2 - b^2 > 0.$$

2. Die Orthogonalpunkte von  $K^3$  sind imaginär oder werden durch eine elliptische Punktinvolution auf  $p$  vertreten; der Kreis  $\mathcal{R}^2\mu$  ist dann reell: Die Hyperbeln in den Schmiegungebenen von  $K^3$  können sowohl spitzwinklig als auch stumpfwinklig sein, und zwar werden beide Gruppen durch vier, bezüglich zwei gleichseitige Hyperbeln von einander geschieden.

## 2. Die gleichwinklige cubische Hyperbel.

Damit soll eine solche cubische Hyperbel bezeichnet werden, für die sämmtliche Kegelschnitte in ihren Schmiegungebenen in gleichseitige Hyperbeln übergehen. Dies kann und wird nur dann eintreten, wenn der oben gefundene Kreis  $\mathcal{R}^2\mu$  mit dem Mittelpunktskegelschnitt  $\mu^2$  zusammenfällt. Als nothwendige Vorbedingung für die Existenz einer solchen besonderen Raumcurve  $K^3$  ergibt sich somit

a) die cubische Hyperbel mit Mittelpunktskreis.

Nach der von Geisenheimer\* in der Mittelpunktsebene  $\mu$  einer cubischen Hyperbel construirten Figur treffen die drei Asymptoten derselben  $t_a, t_b, t_c$  den Mittelpunktskegelschnitt  $\mu^2$  in den Punkten eines Dreiecks  $a_1b_1c_1$ , dessen Schwerpunkt  $u$  (als Mittelpunkt der Raumcurve  $K^3$  bezeichnet) mit dem Mittelpunkt des Kegelschnitts  $\mu^2$ , sowie mit demjenigen des durch die drei Asymptoten von  $K^3$  bestimmten Hyperboloids  $A^2$  zusammenfällt.

Soll daher der Mittelpunktskegelschnitt  $\mu^2$  ein Kreis sein, so wird das ihm einbeschriebene Dreieck  $a_1b_1c_1$  gleichseitig, die Ebene  $\mu$  aber zu einer Kreisschnittebene des Asymptoten-Hyperboloids  $A^2$ , womit folgende Bedingung für die Letzteren gewonnen ist:

Die drei Asymptoten einer cubischen Hyperbel mit Mittelpunktskreis sind drei solche Erzeugende eines beliebigen Hyperboloids, welche einen Kreisschnitt desselben in drei gleiche Theile zerfallen, oder — für die Construction geeigneter — drei Gerade, welche die Ecken von zwei beliebigen, planparallelen gleichseitigen Dreiecken paarweise verbinden.

Eine weitere Eigenschaft der hiermit eindeutig bestimmten Raumcurve  $K^3$  ergibt sich, wenn man durch den Mittelpunkt  $u$  an dieselbe die Secante und zugleich Schwerlinie  $m$  zieht, in welcher die Schwerpunkte aller zur Ebene  $\mu$  parallelen Schnittpunktsdreiecke von  $K^3$  liegen.\*\* Diese

\* Geisenheimer, Die Erzeugung polarer Elemente für Flächen und Curven in Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik und Physik, XXXI, 4.

\*\* Vergl. Geisenheimer und den Satz von Hurwitz a. a. O. S. 211 u. flg.









## XVIII.

### Mechanische Vorrichtungen zum Zeichnen von Curven zweiter Ordnung.

Von

WILLY JÜRGES .

in Zürich.

---

Hierzu Tafel VII, Fig. 1—5.

---

Alle bisher bekannt gewordenen mechanischen Vorrichtungen zum Zeichnen von Kegelschnitten beruhen im Princip auf metrischen Eigenschaften dieser Curven. Im Nachstehenden sollen nun zwei Vorrichtungen beschrieben werden, welche es ermöglichen, alle Curven zweiter Ordnung zu zeichnen, sobald dieselben durch fünf Elemente bestimmt sind.

#### I.

Der Kegelschnitt sei gegeben durch fünf Punkte 1, 2, 3, 4 und  $P_0$ . Bewegt sich ein Punkt  $P$  so, dass das Doppelverhältniss der vier Strahlen von  $P$  nach den Punkten 1, 2, 3, 4 immer gleich ist dem Doppelverhältniss der vier Strahlen von  $P_0$  nach 1, 2, 3, 4, so ist der Ort von  $P$  der durch die fünf gegebenen Punkte bestimmte Kegelschnitt.

Es kommt also darauf an, einen Mechanismus zu construiren, welcher gestattet, den Punkt  $P$  so zu führen, dass das Doppelverhältniss ( $P. 1, 2, 3, 4$ ) constant bleibt, nämlich immer gleich ist ( $P_0. 1, 2, 3, 4$ ).

Die Construction des gesuchten Mechanismus beruht auf folgendem Satz:

Es seien gegeben zwei projectivische Strahlenbüschel von den Scheiteln  $T$  und  $T'$ .  $aa', bb', cc', xx'$  seien vier Paare correspondirender Strahlen. Schneidet man die Strahlen des ersten Büschels mit irgend einer Transversalen  $t$  in den Punkten  $ABCX$ , so kann man das zweite Büschel mit einer Geraden  $t'$  so schneiden, dass  $A'B'C'X'$  auf  $t'$  mit der Reihe  $ABCX$  auf  $t$  congruent ist.

Beweis: Da die Büschel  $T$  und  $T'$  projectivisch sind, so ist auch die Reihe  $ABCX$ , welche aus  $T$  hervorgegangen ist, mit  $T'$  projectivisch.

regt man nun die Reihe  $ABCX$  so, dass  $A$  stets auf  $a'$  und  $B$  auf  $b'$







Da bei einer  $\infty$  kleinen Bewegung von  $p$  auch der Scheitelpunkt  $T$  sich nur  $\infty$  wenig verschieben kann, so folgt daraus, dass die Lagenveränderung von  $T$  eine stetige sein muss, wenn  $p$  den Kegelschnitt umhüllt.

Da ein Mechanismus dieser Art bisher nicht ausgeführt wurde, so sei von dessen Beschreibung Abstand genommen.

Um zu beweisen, dass auch die Construction des Mechanismus unter I. anwendbar ist, wenn ein Kegelschnitt durch fünf Tangenten gegeben ist, diene Folgendes:

Der Kegelschnitt sei gegeben durch die fünf Tangenten  $tt'$ , welche sich im Punkte  $OP$  schneiden und  $abc$ . Um in  $t$  und  $t'$  die Berührungspunkte zu construiren, fasst man die Tangenten  $t$  und  $t'$  als Träger von projectivischen Punktreihen auf. Man construirt daher zur Punktreihe  $ABCO$  in  $t$  die entsprechende Reihe  $A'B'C'O'$  in  $t'$  und zur Punktreihe  $A'B'C'P$  in  $t'$  die entsprechende Reihe  $ABCP$  in  $t$ , wo dann  $O'$  und  $P$  die Berührungspunkte sind. Entsprechend verfährt man mit den Tangenten  $a, b, c$ . Die Punkte  $O'$  und  $P$  sind mit dem Mechanismus auf folgende Weise zu construiren, vorausgesetzt, dass die Strahlenstangen zu diesem Behufe nach beiden Richtungen, vom Scheitelpunkte aus gesehen, ausgedehnt sind. Man setzt in die Punkte  $ABCO$  in  $t$  die Stifte, legt das Strahlenstangenbüschel über dieselben und fixirt das Doppelverhältniss dieser Punktreihe, indem man die Schraubenmutter auf der Transversalstange anzieht; hierauf hebt man das Büschel ab und befestigt die Stifte in  $A'B'C'$ , legt darauf die entsprechenden Strahlenstangen  $a$  und  $b$  über  $A'$  und  $B'$  und bewegt die Transversalstange resp. den Scheitelpunkt oder beide zugleich so, dass die Stange  $c$  auf den Stift  $C'$  zu liegen kommt, wobei die Stange  $o$  den Punkt  $O'$  auf  $t'$  ausschneidet. Die weiteren Punkte werden entsprechend construirt. Sind somit fünf Peripheriepunkte vorhanden, so geschieht die weitere Construction wie unter I. beschrieben, wobei man den Kegelschnitt sowohl als Punktreihe, wie auch als Enveloppe erhält.

Der Mechanismus *II* gestattet auf jeder Tangente den Berührungspunkt anzugeben, denn, wenn die sich bewegende Tangente in die Lage einer der gegebenen Tangenten gelangt, so ist der Punkt, welcher vorher von der festen Tangente auf der beweglichen abgeschnitten wurde, in den Berührungspunkt übergegangen. Dies entspricht dual der oben erwähnten Aufgabe, in einem Punkte die Tangente zu construiren.

Nach dem Satze, dass die Verbindungslinie zweier Berührungspunkte, die beiden Tangenten in den Berührungspunkten und der Berührungspunkt auf einer beliebigen Tangente auf der letzteren eine harmonische Punktreihe bilden, begründet sich die Construction in beliebig vielen Tangenten die Berührungspunkte mit leichter Mühe anzugeben, dual entsprechend der Aufgabe, in beliebig vielen Punkten die Tangenten zu construiren.





Ist ein Kegelschnitt mit Hilfe der besprochenen Mechanismen gezeichnet, so lassen sich Mittelpunkt, Achsen, Brennpunkte und gegebenen Falls die Asymptoten auf die einfachste Weise bestimmen.

Zum Schluss sei erwähnt, dass die Bewegungen der einzelnen Constructionstheile der Zeichenvorrichtungen vom mechanischen Standpunkte aus grosses Interesse beanspruchen. In erster Linie würden zu bestimmen sein beim Mechanismus *I*:

1. Die Enveloppe der Transversalstange;
2. Der Ort eines Punktes auf der Transversalstange;
3. Der Ort eines Punktes auf den Strahlenstangen, sowie die entsprechenden Theile des Mechanismus *II*.

Wir erlauben uns, auf die Bestimmung genannter Curven zurück zu kommen.

---

## XIX.

**Ueber die partiellen Differentialgleichungen, denen  
die symmetrischen Functionen der Wurzeln einer  
algebraischen Gleichung genügen.**

**Von**

# Prof. EUGEN NETTO

**in Giessen.**

Herr Faà di Bruno giebt in seinem Buche: „Einleitung in die Theorie der binären Formen“ (deutsch von Th. Walter, Leipzig 1881) einen Abschnitt: „Partielle Differentialgleichungen, denen die symmetrischen Functionen der Wurzeln einer Gleichung genügen.“ Er führt dabei F. Brioschi als Denjenigen an, welcher diese Differentialgleichungen zuerst abgeleitet habe, und liefert die Beweise, oder vielmehr Verificationen ähnlich, wie dies von Brioschi in den „Annali di scienze matematiche e fisiche“ V; 1854, S. 313 flg. und S. 422 flg. geschehen ist. Aber daraus geht weder eine Einsicht in die Tragweite der Formeln, noch in ihr Wesen hervor; und nur an einer Stelle deutet Herr Faà di Bruno (l. c. S. 25) an, auf welcher Eigenschaft der Gleichung eine besondere Differentialgleichung beruhe. Im Folgenden soll das Wesen und die Tragweite der Formeln dargelegt werden.

## Die Gleichung

$$1) \quad x^n - c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} - \dots \pm c_n = 0$$

möge die Wurzeln  $x_1, x_2, \dots, x_n$  besitzen. Die Summen der Wurzelpotenzen bezeichnen wir, wie gewöhnlich, durch  $s_0, s_1, s_2, \dots$ . Ersetzt man dann jedes  $x_i$  durch  $x_i t$ , wobei  $t$  eine Variable ist, so geht dadurch

$c_1$  in  $c_1 + s_i t$ ,

$$c_2 \text{ in } c_2 + (s_i c_1 - s_{i+1})t + \dots,$$

$$c_3 \text{ in } c_3 + (s_i c_2 - s_{i+1} c_1 + s_{i+2})t + \dots,$$

[illegible]

$$c_2 \text{ in } c_2 + (s_i c_{2-1} - s_{i+1} c_{2-2} + s_{i+2} c_{2-3} - \dots \pm s_{i+l-1})t + \dots,$$

**und gleichzeitig**

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 = x_3 = \dots \\ x_1 &= x_2 = 2x_3 = \dots \\ x_1 &= x_2 = 3x_3 = \dots \\ &\vdots \\ x_1 &= x_2 = kx_3 = \dots \end{aligned}$$

3. *er.* Berechnen wir nun immer eine symmetrische Function  $R$  der Wurzeln, die man von Zusammenhang der Function der  $x_i$  mit der Reihe der  $x_i$  denken kann, wobei die  $x_i$  in der angegebenen Art mit verändert in den drei Formen der Coefficienten von  $i$ , in unserer allgemeinen partiellen Differentialgleichung einer Ordnung, in der  $c_1 = 1$  zu setzen ist,

$$2. \quad \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial R}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n (x_{i-1} - x_{i+1}) c_{i-1} + \dots \quad \frac{\partial R}{\partial c_2} = \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) \frac{\partial R}{\partial s_2}.$$

Hierin ist die eine Reihe der Brioscii'schen Formeln enthalten. Wegen der, für alle  $k$  gültigen Formel

$$x_{k+n} - c_1 x_{k+n-1} + c_2 x_{k+n-2} - \dots \pm x_k = 0 \quad (k=0, -1, -2, \dots)$$

gibt es im Wesentlichen nur  $n$  solcher Formeln, wie sie aus 2) entspringen. Man erhält z. B. für  $i=0, 1, 2$  mittelst der Newton'schen Formeln

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\partial R}{\partial x_i} &= \sum_{i=1}^n (n-i+1) c_{i-1} \frac{\partial R}{\partial c_2} = \sum_{i=1}^n (x_{i-1} - x_i) \frac{\partial R}{\partial s_2}, \\ \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial R}{\partial x_i} &= \sum_{i=1}^n (x_i c_i - [i+1] c_{i+1}) \frac{\partial R}{\partial c_2} = \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) \frac{\partial R}{\partial s_2}, \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 \frac{\partial R}{\partial x_i} &= \sum_{i=1}^n (c_1 c_i - [i+1] c_{i+1}) \frac{\partial R}{\partial c_2} = \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) \frac{\partial R}{\partial s_2}, \end{aligned}$$

und für  $i=-1$  nach einigen Umformungen:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \frac{\partial R}{\partial x_i} &= \frac{c_{n-1}}{c_n} \sum_{i=1}^n c_{i-1} \frac{\partial R}{\partial c_2} - \sum_{i=2}^n (n-i+2) c_{i-2} \frac{\partial R}{\partial c_2} \\ &= \frac{c_{n-1}}{c_n} \frac{\partial R}{\partial s_1} + \sum_{i=2}^n (x_{i-2} - x_{i-1}) \frac{\partial R}{\partial s_2}. \end{aligned}$$

Statt dieser letzten Formel und der für  $i=-2, \dots$  ähnlich gebildeten erscheinen bei Faà di Bruno scheinbar einfachere, von denen bald die Rede sein wird.\*

Ausser der soeben abgeleiteten giebt es noch eine zweite Formelreihe, mit der dann die vorhandenen erschöpft sind. Man erhält sie folgendermaassen. Es ist:

\* In dem Falle  $i=1$  tritt bei einem homogenen  $R$  der Dimension  $p$  offenbar noch

$$pR = c_1 \frac{\partial R}{\partial c_1} + 2c_2 \frac{\partial R}{\partial c_2} + \dots = s_1 \frac{\partial R}{\partial s_1} + 2s_2 \frac{\partial R}{\partial s_2} + \dots$$

$$\left\{ \begin{aligned} & (x^n - c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} - \dots)(x^k + [-1]^k t) \\ & = x^{n+k} - c_1 x^{n+k-1} + \dots + (-1)^k (c_k + t) x^n + (-1)^{k+1} (c_{k+1} + c_1 t) x^{n-1} + \dots \\ & \quad + (-1)^n (c_n + c_{n-k} t) x^k + (-1)^{n+1} c_{n-k+1} t x^{k-1} + \dots; \end{aligned} \right.$$

diesen Ausdruck, gleich Null gesetzt, wollen wir folgendermassen schreiben:

$$x^{n+k} - \gamma_1 x^{n+k-1} + \gamma_2 x^{n+k-2} - \dots \pm \gamma_{n+k} = 0.$$

Die Summen der Wurzel-Potenzen hierfür mögen mit  $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_\lambda \dots$  bezeichnet werden. Dann ist

$$\sigma_0 = n + k; \quad \sigma_k = s_k + (-1)^{k-1} \cdot k t,$$

und die übrigen  $\sigma$  unterscheiden sich von den entsprechenden  $s$  mit gleichem Index höchstens durch Glieder, welche die zweite oder eine höhere Potenz von  $t$  als Factor haben.

Bildet man nun wieder eine symmetrische Function  $R$  der Wurzeln von

$$x^{n+k} - c_1 x^{n+k-1} + c_2 x^{n+k-2} - \dots \pm c_n x^k = 0,$$

welche dann also gleichzeitig symmetrisch in  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ist, und drückt diese durch die  $c_\lambda$  einerseits und durch die  $s_\lambda$  andererseits aus; setzt dabei aber gleichzeitig voraus, dass  $R$ , als symmetrische Function der Wurzeln einer Gleichung  $(n+k)^{\text{ten}}$  Grades aufgefasst, von keinem der Coefficienten von  $x^{k-1}, x^{k-2}, \dots$  abhängt, dann sieht man, dass die Ueberführung von

$$c_1, c_2, \dots, c_n \text{ in } \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$$

die angegebene Umwandlung der  $s_\lambda$  in die  $\sigma_\lambda$  hervorruft. Die Vergleichung der Coefficienten von  $t$  liefert dann wieder:

$$3) \quad \sum_{\lambda=k}^n c_{\lambda-k} \frac{\partial R}{\partial c_\lambda} = (-1)^{k-1} \cdot k \frac{\partial R}{\partial s_k} \quad (k=1, 2, 3, \dots).$$

Dies ist die zweite Brioschi'sche Formelreihe. Die wesentliche eben angegebene Bedingung findet sich aber weder bei Brioschi, noch bei Faà di Bruno; und ohne diese ist die Formel unrichtig. Es möge ein einfaches Beispiel dies zeigen. Im Fall von Gleichungen vierten und höheren Grades ist

$$s_4 = c_1^4 - 4c_1^2 c_2 + 2c_2^2 + 4c_1 c_3 - 4c_4;$$

bei Gleichungen dritten Grades fällt  $c_4$  fort, und man hat:

$$s_4 = c_1^4 - 4c_1^2 c_2 + 2c_2^2 + 4c_1 c_3.$$

Wählt man  $R = s_4$  und  $k = 2$ , so müsste sich aus 3) für  $n = 3$

$$\frac{\partial s_4}{\partial c_2} + c_1 \frac{\partial s_4}{\partial c_3} = -2 \frac{\partial s_4}{\partial s_2} = 0$$

ergeben; die linke Seite wird jedoch nicht gleich Null, sondern

$$(-4c_1^2 + 4c_2) + c_1 \cdot 4c_1 = 4c_2.$$

Im Falle  $n = 4, 5, \dots$  wird dagegen das richtige Resultat

$$\frac{\partial s_4}{\partial c_2} + c_1 \frac{\partial s_4}{\partial c_3} + c_2 \frac{\partial s_4}{\partial c_4} = (-4c_1^2 + 4c_2) + c_1 \cdot 4c_1 + c_2 \cdot (-4) = 0$$

herauskommen.

Mit Hilfe der als unbedingt richtig angesehenen Gleichung 3) finden sich bei Faà di Bruno die Gleichungen für  $i = -1, -2, \dots$  unter 2) reducirt; von diesen gilt natürlich auch der gemachte Vorbehalt.

Setzt man  $n$  als unbestimmt voraus, berechnet danach die Formel 3) und trägt erst hinterdrein die besonderen Werthe der Coefficienten einer vorliegenden Gleichung ein, dann wird natürlich 3) stets richtige Resultate liefern. Auf diesen Standpunkt wollen wir uns von jetzt ab stellen.

Offenbar gelten 2) und 3) für jedes  $R = c_2$  oder  $R = s_2$ . Aber auch umgekehrt kann man die allgemeinen Formeln ohne Weiteres aus denen für  $R = c_2$  bzw.  $R = s_2$  ableiten, indem man

$$\frac{\partial R}{\partial c_2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial R}{\partial s_k} \frac{\partial s_k}{\partial c_2}, \dots$$

setzt. Daraus geht hervor, dass 2) und 3) nicht bloß für symmetrische, sondern für irgend welche rationale, ja selbst algebraische Functionen  $R(x_1, \dots, x_n)$  gültig bleiben. Man hat dann nur die  $x$  als algebraische Functionen der  $c_2$  oder der  $s_2$  aufzufassen. Im einfachsten Falle  $n = 2$ ,  $R = x_1$  ist in der That, wie 2) es fordert:

$$\begin{aligned} \sum x_2^i \frac{\partial R}{\partial x_2} &= \sum x_2^i \frac{\partial x_1}{\partial x_2} = x_1^i; \\ \sum (s_i c_{2-1} - s_{i+1} c_{2-2} + \dots) \frac{\partial R}{\partial c_2} &= \frac{1}{2} (x_1^i + x_2^i) \left( 1 + \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 - 4c_2}} \right) \\ &\quad - (x_1^i x_2 + x_1 x_2^i) \frac{1}{\sqrt{c_1^2 - 4c_2}} \\ &= (x_1^i + x_2^i) \frac{x_1}{x_1 - x_2} - (x_1^i x_2 + x_1 x_2^i) \frac{1}{x_1 - x_2} \\ &= x_1^i; \\ \sum \lambda s_{i+\lambda-1} \frac{\partial R}{\partial s_2} &= \frac{1}{2} (x_1^i + x_2^i) \left( 1 - \frac{s_1}{\sqrt{2s_2 - s_1^2}} \right) + \frac{x_1^{i+1} + x_2^{i+1}}{\sqrt{2s_2 - s_1^2}} \\ &= (x_1^i + x_2^i) \frac{-x_2}{x_1 - x_2} + (x_1^{i+1} + x_2^{i+1}) \frac{1}{x_1 - x_2} \\ &= x_1^i. \end{aligned}$$

Ebenso ergibt sich die Richtigkeit der beiden aus 3) folgenden Formeln:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial c_1} + c_1 \frac{\partial x_1}{\partial c_2} &= \frac{\partial x_1}{\partial s_1}, \\ \frac{\partial x_1}{\partial c_2} &= -2 \frac{\partial x_1}{\partial s_2}. \end{aligned}$$

Hiernach ist es ersichtlich, dass die Formelreihen 2) und 3) nicht charakteristisch für symmetrische Functionen, sondern höchstens für die Beziehungen charakteristisch sein können, in denen die  $x$ , die  $c$  und die  $s$  zu einander stehen.

Wir gehen zuerst auf den Zusammenhang der  $x$  mit den  $s$  ein; dazu nehmen wir aus den Formeln 2) die Gleichungen

$$4) \quad \sum_{\lambda=1}^n x_{\lambda}^i \frac{\partial s_k}{\partial x_{\lambda}} = k s_{k+i-1} \quad \left( \begin{array}{l} i=0, 1, 2, \dots \\ k=1, 2, 3, \dots \end{array} \right)$$

heraus. Zu  $s_1, s_2, \dots$  können wir das durch  $k=1, i=0$  definirte  $s_0$  hinzunehmen; die Gleichungen 4) gelten dann auch für  $k=0$ . Wir nehmen für die allgemein zu bestimmenden Functionen  $s_k$ , welche dem Systeme 4) genügen, die Bezeichnung  $\varphi_k$  und gehen, um zunächst

$$5) \quad \sum_{\lambda=1}^n x_{\lambda} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_{\lambda}} = k \varphi_k$$

zu lösen, in bekannter Weise auf das simultane System

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \dots = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{d\varphi_k}{k \varphi_k}$$

über. Dadurch erhalten wir das Resultat, dass das allgemeine  $\varphi_k$  eine homogene Function der  $x_1, \dots, x_n$  von der Dimension  $k$  wird.

Aus  $\varphi_1$  lassen sich durch

$$6) \quad \varphi_k = \sum_{\lambda=1}^n x_{\lambda}^k \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{\lambda}}$$

alle übrigen  $\varphi_k$  berechnen. Hat man zwei Lösungssysteme für 4), so giebt die Summe entsprechender Functionen ein neues Lösungssystem. Es reicht daher aus, einen einzigen Summanden

$$\psi_1 = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \quad (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1)$$

von  $\varphi_1$  darauf hin zu prüfen, welchen Bedingungen er unterworfen sein muss, um 4) zu erfüllen, damit man allgemein  $\varphi_1$  habe und daraus jedes  $\varphi_k$  zusammensetzen könne.

Aus 6) folgt:

$$\psi_{k+i-1} = \psi_1 \sum_{\nu=1}^n \alpha_{\nu} x_{\nu}^{i+k-2}$$

und aus 4):

$$k \psi_{k+i-1} = \psi_1 \sum_{\lambda=1}^n \alpha_{\lambda} x_{\lambda}^{i-1} \cdot \sum_{\mu=1}^n \alpha_{\mu} x_{\mu}^{k-1} + (k-1) \psi_1 \sum_{\nu=1}^n \alpha_{\nu} x_{\nu}^{i+k-2},$$

so dass, den beiden letzten Resultaten gemäss,

$$\sum_{\lambda=1}^n \alpha_{\lambda} x_{\lambda}^{i-1} \cdot \sum_{\mu=1}^n \alpha_{\mu} x_{\mu}^{k-1} = \sum_{\nu=1}^n \alpha_{\nu} x_{\nu}^{i+k-2}$$

für alle Werthe von  $i$  und  $k$  und alle beliebigen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sein muss

Das zeigt dann sofort das Bestehen der Bedingungen

$$\alpha_1^2 = \alpha_1; \quad \alpha_\mu \alpha_\nu = 0 \quad (\mu \neq \nu),$$

und diese Gleichungen sind nur so lösbar, dass eins der  $\alpha$  gleich 1 wird, während die anderen gleich Null werden.

Aus dieser Speciallösung gehen nun durch lineare Combinationen die allgemeinen Lösungen von 4) in der Gestalt

$$\varphi_k = a_1 x_1^k + a_2 x_2^k + \dots + a_n x_n^k \quad (\sum a_i = n)$$

hervor. Die hinzugefügte Bedingung folgt aus  $\varphi_0 = n$ . Wir wollen diese Ausdrücke in Rücksicht auf ihre Herleitung mit  $S_k$  bezeichnen.

Construirt man zu diesen  $S_k$  nun Functionen  $C_k$ , welche so von ihnen abhängen, wie die  $c_k$  von den  $s_k$ , so liefert dies System die allgemeinsten Lösungen von 2). Denn erstens ist es klar, dass es Lösungen liefert. Zweitens erkennt man, dass man von den allgemeinsten Lösungen der aus 2) stammenden Gleichungen

$$\sum_{i=1}^n x_i^i \frac{\partial c_k}{\partial x_i} = \sum_{(\alpha)} x_{\alpha_1}^{\alpha_1} x_{\alpha_2}^{\alpha_2} \dots x_{\alpha_k}^{\alpha_k} \quad \left( \sum_{(\alpha)} \text{ ist symmetrisch in den } x \right)$$

umgekehrt zu Lösungen für 4) kommen könnte.

Folglich hat man in

$$7) \quad S_k = a_1 x_1^k + a_2 x_2^k + \dots + a_n x_n^k \quad (\sum a_i = n)$$

nebst

$$7*) \quad \begin{cases} 1! C_1 = S_1 \\ 2! C_2 = S_1^2 - S_2 \\ 3! C_3 = S_1^3 - 3 S_1 S_2 + 2 S_3 \\ 4! C_4 = S_1^4 - 6 S_1^2 S_2 + 8 S_1 S_3 + 3 S_2^2 - 6 S_4 \\ \dots \end{cases}$$

die allgemeinsten Lösungen für die Differentialgleichungen 2) und 3). Den Ausdruck der mittelst 7\*) bestimmten  $C$  durch die  $x$  kann man einfach symbolisch durch

$$8) \quad \lambda! C_\lambda = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n)^{(\lambda)}$$

darstellen; dabei ist die symbolische Potenz

$$a_i^{(\mu)} \text{ durch } a_i(a_i - 1)(a_i - 2) \dots (a_i - \mu + 1)$$

ersetzt zu denken.

Benutzt man die  $C_1, \dots, C_n$  zur Aufstellung der Gleichung

$$9) \quad X^n - C_1 X^{n-1} + C_2 X^{n-2} - \dots \pm C_n = 0,$$

und benennt die Wurzeln derselben  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , so gelten natürlich für diese, ihre Summen von Wurzelpotenzen und für die  $C_1, \dots, C_n$  die Gleichungen 2) und 3); aber freilich sind die Summen der Wurzelpotenzen mit den  $S_k$  nur so weit identisch, als die letzten zur Definition der  $C$  nöthig waren, das heisst bis  $S_n$ . Stellt man also diejenigen zu 9) gegebenen Differentialgleichungen auf, welche den in 2) und 3) gegebenen



entsprechen, auf den rechten Seiten aber nur  $S_1, S_2, \dots S_n$  enthalten, so stimmen diese mit den correspondirenden aus 2) und 3) gebildeten überein, falls man in die letzten statt der  $s_2$  und  $c_2$  die  $S_2$  und  $C_2$  mit gleichem Index einträgt. So wird z. B. für  $n=3, i=0, 1, 2, 3$

$$\frac{\partial C_1}{\partial x_1} + \frac{\partial C_1}{\partial x_2} + \frac{\partial C_1}{\partial x_3} = 3 = \frac{\partial C_1}{\partial X_1} + \frac{\partial C_1}{\partial X_2} + \frac{\partial C_1}{\partial X_3},$$

$$x_1 \frac{\partial C_1}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial C_1}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial C_1}{\partial x_3} = C_1 = X_1 \frac{\partial C_1}{\partial X_1} + X_2 \frac{\partial C_1}{\partial X_2} + X_3 \frac{\partial C_1}{\partial X_3},$$

$$x_1^2 \frac{\partial C_1}{\partial x_1} + x_2^2 \frac{\partial C_1}{\partial x_2} + x_3^2 \frac{\partial C_1}{\partial x_3} = C_1^2 - 2C_2 = X_1^2 \frac{\partial C_1}{\partial X_1} + X_2^2 \frac{\partial C_1}{\partial X_2} + X_3^2 \frac{\partial C_1}{\partial X_3},$$

$$x_1^3 \frac{\partial C_1}{\partial x_1} + \dots = C_1^3 - 3C_1C_2 + 3C_3 = X_1^3 \frac{\partial C_1}{\partial X_1} + \dots$$

Die Gleichheit der linken und der mittleren Ausdrücke folgt leicht ausser aus unseren allgemeinen Betrachtungen noch aus 7\*). Ebenso erhält man:

$$\frac{\partial C_2}{\partial x_1} + \dots = 2C_1 = \frac{\partial C_2}{\partial X_1} + \dots,$$

$$x_1 \frac{\partial C_2}{\partial x_1} + \dots = 2C_2 = X_1 \frac{\partial C_2}{\partial X_1} + \dots,$$

$$x_1^2 \frac{\partial C_2}{\partial x_1} + \dots = C_1C_2 - 3C_3 = X_1^2 \frac{\partial C_2}{\partial X_1} + \dots;$$

und endlich noch:

$$\frac{\partial C_3}{\partial x_1} + \dots = C_2 = \frac{\partial C_3}{\partial X_1} + \dots,$$

$$x_1 \frac{\partial C_3}{\partial x_1} + \dots = 3C_3 = X_1 \frac{\partial C_3}{\partial X_1} + \dots$$

Daraus kann man dann, wenn  $R$  eine beliebige Function der  $x$  oder der  $X$  bedeutet, den Schluss ziehen, dass

$$10) \quad \begin{cases} \sum_{\lambda=1}^n \frac{\partial R}{\partial x_\lambda} = \sum_{\lambda=1}^n \frac{\partial R}{\partial X_\lambda}, \\ \sum_{\lambda=1}^n x_\lambda \frac{\partial R}{\partial x_\lambda} = \sum_{\lambda=1}^n X_\lambda \frac{\partial R}{\partial X_\lambda} \end{cases}$$

sein wird. Es ist dies eine interessante Beziehung zwischen den Wurzeln der Gleichungen 1) und 9), deren Abhängigkeit von einander durch 8) vermittelt wird.

Aus der Formel 8) kann man die Beantwortung der Frage entnehmen, wie die  $a_i$  gewählt sein müssen, damit die Werthe  $C_{r+1}, C_{n+2}, \dots$  sämmtlich verschwinden. In  $C_2$  tritt eine Reihe von Gliedern der Form:

$$a_1(a_1-1)\dots(a_1-k_1+1)\cdot a_2(a_2-1)\dots(a_2-k_2+1)\dots x_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots$$

$$(k_1+k_2+\dots=\lambda)$$

auf. Offenbar ist es für das Verschwinden aller dieser bei  $\lambda > n$  nothwendig und hinreichend, dass  $a_1 = a_2 = \dots = 1$  werden.

Fordert man, dass in den Differentialgleichungen 2) und 3) von den  $c$  nur die  $n$  Grössen  $c_1, \dots, c_n$  von Null verschieden sind, dann liefern die

$$s_k = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k$$

nebst den zugehörigen  $c_1, c_2, \dots, c_n$  die allgemeinsten Lösungen der Systeme partieller Differentialgleichungen, und diese sind dann also charakteristisch für die Beziehungen zwischen den Wurzeln, den Summen der Wurzelpotenzen und den Coefficienten einer Gleichung  $n^{\text{ten}}$  Grades.

Im § 4 des Faà di Bruno'schen Buches wird eine partielle Differentialgleichung angegeben, der die symmetrischen Functionen der Wurzel-differenzen genügen. Diese folgt nach unserer Methode daraus, dass eine symmetrische Function der Wurzel-differenzen sich bei der Substitution  $x_2 + t$  statt  $x_2$  nicht ändert. Hieraus ersieht man, dass diese Gleichung

$$11) \quad \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda s_{\lambda-1} \frac{\partial R}{\partial s_{\lambda}} = 0$$

nicht sowohl für die symmetrischen Functionen der Wurzel-differenzen, als vielmehr für die symmetrischen Functionen der Wurzeln, die zugleich Functionen der Wurzel-differenzen sind, ein Characteristicum bildet. Dass aber beide Arten von Functionen nicht mit einander identisch sind, erkennt man leicht. So ist für  $n=3$

$$(x_1-x_2)^2(x_1-x_3) + (x_1-x_2)^2(x_2-x_3) + (x_1-x_3)^2(x_1-x_2) + (x_1-x_3)^2(x_3-x_2)$$

$$+ (x_2-x_3)^2(x_2-x_1) + (x_2-x_3)^2(x_3-x_1)$$

$$= 2c_1^3 - 9c_1c_2 + 27c_3$$

$$= 2s_1^3 - 9s_1s_2 + 9s_3$$

eine Function der zweiten aber nicht der ersten Art.

Auf 11) beruht nun ein einfacher Beweis des Satzes, den Herr Sylvester (C. R. XCVIII, 779) angegeben hat: „Die symmetrischen Functionen der Wurzel-differenzen von

$$x^n - c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} - \dots \pm c_n = 0$$

sind als ganze Functionen der Wurzel-Potenzsummen von

$$x^n - \frac{c_1}{n} x^{n-1} + \frac{c_2}{n(n-1)} x^{n-2} - \frac{c_3}{n(n-1)(n-2)} x^{n-3} + \dots = 0$$

darstellbar, in welchen aber die Summe der ersten Potenzen niemals auftritt.“ Nach unseren Ueberlegungen gilt dieser Satz in der Verallgemeinerung, dass jede symmetrische Function der Wurzeln der ersten Gleichung, welche zugleich eine Function der Wurzel-differenzen ist, eine solche Darstellung zulässt.

So ergibt sich z. B., wenn wir die Potenzsummen der Wurzeln der letzten Gleichung mit  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$  bezeichnen,

$$s_1 = 3\sigma_1; \quad s_2 = 3\sigma_1^2 + 6\sigma_2; \quad s_3 = 3\sigma_1^3 + 18\sigma_1\sigma_2 + 6\sigma_3$$

und es wird, dem obigen Beispiele entsprechend,

$$2s_1^3 - 9s_1s_2 + 9s_3 = 54\sigma_3.$$

Giessen, den 13. Mai 1893.

## Kleinere Mittheilungen.

---

### XIV. Ueber Kettenbrüche, die durch Ausziehen einer Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl entstehen.

Es sei  $x$  gleich der Summe aus einer ganzen Zahl und einem unendlichen, periodischen Kettenbruche, also

$$1. \quad x = a + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots \text{in inf.}}}}}}$$

oder

$$x = a + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n + x - a}}},$$

so dass nach der Bezeichnung von Gauss (D. A. Art. 27):

$$\begin{aligned} x &= a + \frac{[a_2, a_3, a_4 \dots a_{n-1}, a_n + x - a]}{[a_1, a_2, a_3 \dots a_{n-1}, a_n + x - a]} \\ &= \frac{[a, a_1, a_2 \dots a_{n-1}, a_n + x - a]}{[a_1, a_2 \dots a_{n-1}, a_n + x - a]} \\ &= \frac{[a, a_1 \dots a_{n-1}](a_n + x - a) + [a, a_1 \dots a_{n-2}]}{[a_1, a_2 \dots a_{n-1}](a_n + x - a) + [a_1, a_2 \dots a_{n-2}]} \\ &= \frac{[a, a_1 \dots a_n] + [a, a_1 \dots a_{n-1}](x - a)}{[a_1, a_2 \dots a_n] + [a_1, a_2 \dots a_{n-1}](x - a)} \end{aligned}$$

und daher:

$$II. \quad \begin{cases} [a_1, a_2 \dots a_{n-1}]x^2 + ([a_1, a_2 \dots a_n] - a[a_1, a_2 \dots a_{n-1}] \\ - [a, a_1 \dots a_{n-1}])x = [a, a_1 \dots a_n] - a[a, a_1 \dots a_{n-1}]. \end{cases}$$

Es giebt also, wie bekannt, jeder periodische Kettenbruch ein quadratisches Radical. — Dieser Ausdruck für  $x$  geht in eine Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl über, wenn man den Factor von  $x$  in der letzten Gleichung 0 setzt, also wenn:

$$[a_1, a_2 \dots a_n] - a[a_1, a_2 \dots a_{n-1}] - [a, a_1 \dots a_{n-1}] = 0,$$

$$[a_1, a_2 \dots a_n] - a[a_1, a_2 \dots a_{n-1}] - a[a_1, a_2 \dots a_{n-1}] - [a_2, a_3 \dots a_{n-1}] = 0,$$

$$[a_1, a_2 \dots a_{n-1}]a_n + [a_1, a_2 \dots a_{n-2}] - 2a[a_1, a_2 \dots a_{n-1}] - [a_2, a_3 \dots a_{n-1}] = 0,$$

$$(a_n - 2a)[a_1, a_2 \dots a_{n-1}] + [a_1, a_2 \dots a_{n-2}] - [a_2, a_3 \dots a_{n-1}] = 0,$$

$$a_n - 2a + \frac{[a_1, a_2 \dots a_{n-2}] - [a_2, a_3 \dots a_{n-1}]}{[a_1, a_2 \dots a_{n-1}]} = 0.$$

Da nun sowohl  $a_n$  wie  $2a$  ganze Zahlen sind, muss der Bruch ein Scheinbruch sein. Es ist aber

$$[a_1, a_2 \dots a_{n-1}] > [a_1, a_2 \dots a_{n-2}]$$

und auch

$$> [a_2, a_3 \dots a_{n-1}],$$

mithin der Zähler kleiner als der Nenner, folglich muss er  $= 0$  sein. Daher ist

$$a_n = 2a \quad \text{und} \quad [a_1, a_2 \dots a_{n-2}] - [a_2, a_3 \dots a_{n-1}] = 0.$$

Die zweite Gleichung ergiebt

$$\begin{cases} a_1[a_2, a_3 \dots a_{n-2}] + [a_3, a_4 \dots a_{n-2}] - [a_2, a_3 \dots a_{n-2}]a_{n-1} \\ \quad - [a_2, a_3 \dots a_{n-3}] = 0, \end{cases}$$

$$a_1 - a_{n-1} + \frac{[a_3, a_4 \dots a_{n-2}] - [a_2, a_3 \dots a_{n-3}]}{[a_2, a_3 \dots a_{n-2}]} = 0,$$

und aus demselben Grunde wie vorher ist

$$a_1 = a_{n-1} \quad \text{und} \quad [a_3, a_4 \dots a_{n-2}] = [a_2, a_3 \dots a_{n-3}].$$

Da sich das Verfahren in gleicher Weise fortsetzen lässt, so erhalten wir:

$$\text{III.} \quad a_n = 2a, \quad a_1 = a_{n-1}, \quad a_2 = a_{n-2}, \quad a_3 = a_{n-3}, \dots$$

und daraus folgt der Satz:

Bei der Entwicklung einer Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl in einen Kettenbruch erhält man eine ganze Zahl und einen periodischen Kettenbruch, bei welchem das letzte Glied der Periode gleich dem Doppelten der ganzen Zahl und die übrigen Glieder in sich symmetrisch sind.

Unsere Ableitung gilt allerdings zunächst nur für den Fall, dass die ganze Zahl  $a > 1$ , doch behält der Satz auch seine Giltigkeit bei einer Quadratwurzel aus einem echten Bruche, wenn man nur 0 als Nenner in der Reihe der Kettenbruchnenner zulässt. So ist z. B.:

$$\sqrt{\frac{5}{7}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{\frac{5}{2} + \frac{1}{\frac{2}{5} + \frac{1}{2 + \dots \text{in inf.}}}}$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\sqrt{\frac{5}{7}} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \dots \text{in inf.}}}}}}}$$

so dass die Periode 1, 5, 1, 0 ist.

Soll der Kettenbruch I eine Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl darstellen, so muss nach Gleichung II

$$\frac{[a, a_1 \dots a_n] - [a_1 \dots a_{n-1}]}{[a_1, a_2 \dots a_{n-1}]}$$

eine ganze Zahl sein. Dieser Bruch ist aber gleich

$$\begin{aligned} & \frac{[a, a_1 \dots a_{n-1}]a_n + [a, a_1 \dots a_{n-2}] - a[a, a_1 \dots a_{n-1}]}{[a_1, a_2 \dots a_{n-1}]} \\ &= \frac{a[a, a_1 \dots a_{n-1}] + [a, a_1 \dots a_{n-2}]}{[a_1, a_2 \dots a_{n-1}]} \\ &= a^2 + \frac{a[a_2, a_3 \dots a_{n-1}] + a[a_1, a_2 \dots a_{n-2}] + [a_2, a_3 \dots a_{n-2}]}{[a_1, a_2 \dots a_{n-1}]} \end{aligned}$$

Nach Gleichung III ist aber

$$[a_2, a_3 \dots a_{n-1}] = [a_{n-2}, a_{n-3} \dots a_1] = [a_1, a_2 \dots a_{n-2}],$$

daher ist:

$$\begin{aligned} x^2 &= a^2 + \frac{2a[a_1, a_2 \dots a_{n-2}] + [a_2, a_3 \dots a_{n-2}]}{[a_1, a_2 \dots a_{n-1}]} \\ &= a^2 + \frac{[2a, a_1, a_2 \dots a_{n-2}]}{[a_1, a_2 \dots a_{n-1}]} \end{aligned}$$

Damit also  $x^2$  eine ganze Zahl ist, muss  $[a_1, a_2 \dots a_{n-1}]$  ein Theiler von  $[2a, a_1, a_2 \dots a_{n-2}]$  sein, doch ist es mir bis jetzt nicht gelungen, daraus ein einfaches Gesetz abzuleiten, dem die Kettenbruchnenner unterworfen sein müssen.

Eine eingliedrige Periode ergibt sich bei

$$\sqrt{n^2 + 1} = n + K(\overline{2n}).$$

Ist die Periode zweigliedrig, so ist

$$x^2 = a^2 + \frac{2a}{a_1};$$

es muss dann  $a_1$  ein Theiler von  $2a$  sein, ohne  $= 2a$  zu sein, da in diesem Falle die Periode nur ein Glied hat.

Es stellt uns also  $x = a + K(\overline{a_1, a_2})^*$  stets dann und nur dann eine Wurzel aus einer ganzen Zahl dar, wenn  $a_2 = 2a$  und  $a_1$  ein Theiler von

\* Durch  $K(\overline{a_1, a_2})$  werde ein unendlicher Kettenbruch bezeichnet, dessen *Nenner die Periode*  $a_1, a_2$  haben.

$a_2$  ist, und umgekehrt giebt die Quadratwurzel aus allen Zahlen von der Form  $a^2 + b$  einen zweigliedrigen periodischen Kettenbruch, wenn  $b$  ein Theiler von  $2a$  ist (1 ausgeschlossen). Es ist dann:

$$\sqrt{a^2 + b} = a + K\left(\frac{2a}{b}, 2a\right).$$

Schon bei dreigliedriger Periode wird die Form der Zahl recht zusammengesetzt. Es ergibt sich dann, dass die beiden ersten Kettenbruchnenner gerade Zahlen sein müssen, und dass die Zahlen, deren Quadratwurzel einen Kettenbruch mit dreigliedriger Periode liefern, von der folgenden Form sind:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{[(4m^2 + 1)n + m]^2 + 4mn + 1} = (4m^2 + 1)n + m \\ \quad + K(2m, 2m, 2n(4m^2 + 1) + 2m). \end{array} \right.$$

Die ersten dieser Zahlen sind:

$$41, 130, 269, 370, 458, 697, 986.$$

#### Entwicklung der Quadratwurzeln aus den Zahlen 1 bis 100 in Kettenbrüche.

$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{19} = 4 + K(\overline{2, 1, 1, 1, 2, 8})$
$\sqrt{2} = 1 + K(2)^*$	$\sqrt{20} = 4 + K(\overline{2, 8})$
$\sqrt{3} = 1 + K(\overline{1, 2})$	$\sqrt{21} = 4 + K(\overline{1, 1, 2, 1, 1, 8})$
$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{22} = 4 + K(\overline{1, 2, 4, 2, 1, 8})$
$\sqrt{5} = 2 + K(\overline{4})$	$\sqrt{23} = 4 + K(\overline{1, 1, 1, 8})$
$\sqrt{6} = 2 + K(\overline{2, 4})$	$\sqrt{24} = 4 + K(\overline{1, 8})$
$\sqrt{7} = 2 + K(\overline{1, 1, 1, 4})$	$\sqrt{25} = 5$
$\sqrt{8} = 2 + K(\overline{1, 4})$	$\sqrt{26} = 5 + K(\overline{10})$
$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{27} = 5 + K(\overline{5, 10})$
$\sqrt{10} = 3 + K(\overline{6})$	$\sqrt{28} = 5 + K(\overline{3, 2, 3, 10})$
$\sqrt{11} = 3 + K(\overline{3, 6})$	$\sqrt{29} = 5 + K(\overline{2, 1, 1, 2, 10})$
$\sqrt{12} = 3 + K(\overline{2, 6})$	$\sqrt{30} = 5 + K(\overline{2, 10})$
$\sqrt{13} = 3 + K(\overline{1, 1, 1, 1, 6})$	$\sqrt{31} = 5 + K(\overline{1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10})$
$\sqrt{14} = 3 + K(\overline{1, 2, 1, 6})$	$\sqrt{32} = 5 + K(\overline{1, 1, 1, 10})$
$\sqrt{15} = 3 + K(\overline{1, 6})$	$\sqrt{33} = 5 + K(\overline{1, 2, 1, 10})$
$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{34} = 5 + K(\overline{1, 4, 1, 4, 1, 10})$
$\sqrt{17} = 4 + K(\overline{8})$	$\sqrt{35} = 5 + K(\overline{1, 10})$
$\sqrt{18} = 4 + K(\overline{4, 8})$	$\sqrt{36} = 6$

\* Durch  $K(\overline{a, b, c})$  werde ein unendlicher Kettenbruch bezeichnet, dessen Nenner die Periode  $a, b, c$  haben.

$\sqrt{37} = 6 + K(12)$	$\sqrt{69} = 8 + K$
$\sqrt{38} = 6 + K(6, 12)$	$\sqrt{70} = 8 + K$
$\sqrt{39} = 6 + K(4, 12)$	$\sqrt{71} = 8 + K$
$\sqrt{40} = 6 + K(3, 12)$	$\sqrt{72} = 8 + K(2, 16)$
$\sqrt{41} = 6 + K(2, 2, 12)$	$\sqrt{73} = 8 + K$
$\sqrt{42} = 6 + K(2, 12)$	$\sqrt{74} = 8 + K$
$\sqrt{43} = 6 + K$	$\sqrt{75} = 8 + K$
$\sqrt{44} = 6 + K$	$\sqrt{76} = 8 + K$
$\sqrt{45} = 6 + K$	$\sqrt{77} = 8 + K$
$\sqrt{46} = 6 + K(1, 3, 1, 1, 5, 12)$	$\sqrt{78} = 8 + K$
$\sqrt{47} = 6 + K(1, 5, 1, 12)$	$\sqrt{79} = 8 + K$
$\sqrt{48} = 6 + K(1, 12)$	$\sqrt{80} = 8 + K(1, 16)$
$\sqrt{49} = 7$	$\sqrt{81} = 9$
$\sqrt{50} = 7 + K(14)$	$\sqrt{82} = 9 + K(18)$
$\sqrt{51} = 7 + K(7, 14)$	$\sqrt{83} = 9 + K(9, 18)$
$\sqrt{52} = 7 + K(4, 1, 2, 1, 4, 14)$	$\sqrt{84} = 9 + K(6, 18)$
$\sqrt{53} = 7 + K$	$\sqrt{85} = 9 + K(4, 1, 1, 4, 18)$
$\sqrt{54} = 7 + K(14)$	$\sqrt{86} = 9 + K(3, 1, 1, 1, 8, 1, 1, 1, 3, 18)$
$\sqrt{55} = 7 + K$	$\sqrt{87} = 9 + K(3, 18)$
$\sqrt{56} = 7 + K(2, 14)$	$\sqrt{88} = 9 + K(2, 1, 1, 1, 2, 18)$
$\sqrt{57} = 7 + K(1, 1, 4, 1, 1, 14)$	$\sqrt{89} = 9 + K(2, 3, 3, 2, 18)$
$\sqrt{58} = 7 + K(1, 1, 1, 1, 1, 14)$	$\sqrt{90} = 9 + K(2, 18)$
$\sqrt{59} = 7 + K(1, 2, 7, 2, 1, 14)$	$\sqrt{91} = 9 + K$
$\sqrt{60} = 7 + K(1, 2, 1, 14)$	$\sqrt{92} = 9 + K$
$\sqrt{61} = 7 + K(1, 4, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 4, 1, 14)$	$\sqrt{93} = 9 + K$
$\sqrt{62} = 7 + K(1, 6, 1, 14)$	$\sqrt{94} = 9 + K$
$\sqrt{63} = 7 + K(1, 14)$	$\sqrt{95} = 9 + K(1, 2, 1, 18)$
$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{96} = 9 + K(1, 3, 1, 18)$
$\sqrt{65} = 8 + K(16)$	$\sqrt{97} = 9 + K(1, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 1, 18)$
$\sqrt{66} = 8 + K(8, 16)$	$\sqrt{98} = 9 + K(1, 8, 1, 18)$
$\sqrt{67} = 8 + K(5, 2, 1, 1, 7, 1, 1, 2, 5, 16)$	$\sqrt{99} = 9 + K(1, 18)$
$\sqrt{68} = 8 + K(4, 16)$	$\sqrt{100} = 10$





(Gemäss der Gleichung

$$z_1 SZ = \sum s s^2$$

will ich die nun zu besprechende Methode nach dem Trägheitsmomente benennen, welches der Schüler, will ich annehmen, schon vorher bei dem physikalischen Pendel oder bei anderer Gelegenheit kennen gelernt hat. (Der Schwingungspunkt dieses Pendels harmonirt auf's Schönste mit dem Druckmittelpunkt, wenn auch die Schwierigkeit der Uebertragung des Ausdruckes  $\sum s s^2$  auf die ebene Figur für Anfänger nicht verschwiegen werden soll.)

Da „Beispiele lehren“, soll das Rechteck im § 1 oder gleich das Rhomboid mit der Seite  $a$  in der Flüssigkeitsoberfläche und der zugehörigen Höhe  $h$  liefern

$$z_1 \cdot ah \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{3} ah \cdot h^2,$$

oder

$$z_1 = \frac{2}{3} h;$$

und bezüglich  $y_1$  leuchtet ein, dass der Druckmittelpunkt auf der  $a$  halbirenden Parallelen zur anderen Rhomboidseite gelegen sein muss.

Beim Dreieck des § 1 haben wir im ersteren Falle

$$z_1 \cdot \frac{1}{2} ha \cdot \frac{2}{3} h = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} ah \cdot h^2,$$

oder

$$z_1 = \frac{3}{4} h,$$

und im letzteren

$$z_1 \cdot \frac{1}{2} ha \cdot \frac{1}{3} h = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} ah \cdot h^2,$$

oder

$$z_1 = \frac{h}{2},$$

wozu bezüglich  $y_1$  noch die  $a$  halbirende Transversale als „geometrischer Ort“ des Druckmittelpunkts die Lösung der Aufgabe vervollständigt.

Es bedarf also bei dieser Methode keiner Hervorhebung der (hinsichtlich  $y$ ) mit einer Symmetrie-Achse versehenen Figuren (wie z. B. in der ersten Auflage des Ritter'schen Lehrbuches der technischen Mechanik), sondern nur einer die horizontalen Elementarstreifen der Figur halbirenden Geraden, welche beim Rhomboid und Dreieck vorhanden sind, wenn deren eine Seite horizontal gerichtet ist.

Ist die letztgenannte Bedingung nicht erfüllt, so liefert das Dreieck statt der einzigen Halbirungsgeraden eine einmal, und das Rhomboid, dessen eine Seite alsdann auch nicht mehr in die Oberfläche fallen kann, eine zweimal gebrochene Gerade. Solche Fälle, in welchen überdies auch das Trägheitsmoment eine umständlichere Rechnung erheischen würde, sollen überhaupt in Untersuchung ausgeschlossen sein.

§ 3. Der Coefficient  $\frac{1}{3}$  beim Trägheitsmoment des Rhomboids (Rechtecks), sowie  $\frac{1}{2}$  oder  $\frac{1}{6}$  für's Dreieck im § 2, wenn man ihn nicht dogmatisch entlehnen will, wie z. B. der Leitfaden von Beetz-Henrici einige Trägheitsmomente anführt, könnte rückwärts aus der Methode von Violle erschlossen werden. Es wäre das freilich umständlich und man hat gewöhnlich im Physik-Unterrichte zu solchen Excursen keine Zeit. Pfaundler führt deshalb auch nur das Rechteck vor und beweist durch Heranziehung des Schwerpunktes eines rechtwinkligen Hilfsdreieckes mit der Kathete  $h$ , während die andere Kathete den Druck auf den tiefsten Streifen des Rechtecks vorstellt, die Tiefenlage  $\frac{2}{3}h$  des Druckmittelpunktes.

Dieses letztgenannte Resultat als bekannt vorausgesetzt, könnte man für unsere vorwürfige Aufgabe noch von einer dritten Methode sprechen: die zweimalige Streifenschneidung, wie sie Ritter a. a. O. ebenfalls auf das erste und dritte der im § 2 benutzten Beispiele anwendet.

Das Rhomboid  $ah$  wird einerseits parallel zu seiner anderen Seite  $b$  in Streifen geschnitten, andererseits wieder (wie schon im § 2) parallel zu  $a$ . Das Dreieck (Seite  $a$  in der Wasserfläche, das dritte Beispiel im § 2) zerschneiden wir in Streifen parallel seiner Seite  $b$  und erhalten so die dazu gehörige Transversale, welche  $b$  im Verhältnisse 2:1 der Theile von oben gegen unten theilt. Ebenso wird die Transversale zur Dreieckseite  $c$  hergestellt. Die beiden Transversalen schneiden sich im Druckmittelpunkte, dessen Tiefenlage  $\frac{h}{2}$  dann leicht durch die zu  $a$  parallele Hilfslinie erwiesen wird.

Statt der zweiten Transversale konnte auch die im § 2 schon erwähnte Seitenhalbirende zu  $a$  benutzt werden.

§ 4. Wenn dagegen das Dreieck seine Spitze im Niveau und die Grundlinie  $a$  parallel demselben hat, so versagt die vorige Methode und Ritter wendet a. a. O. hierauf das Verfahren an, welches ich als Methode der Addition oder Subtraction bezeichnen will.\*

Man kennt nämlich den Druckmittelpunkt  $A$  des zum genannten Dreieck gehörigen Rhomboids und denjenigen  $B$  des Ergänzungsdreieckes. Wo die Gerade  $AB$  die  $a$  halbirende Transversale des ersten Dreieckes schneidet, da ist sein Druckmittelpunkt  $C$ . In  $A$  ist der Druck  $\frac{ah^2}{2}$ , in  $B$  derjenige  $\frac{ah^2}{6}$ , in  $C$  also  $\frac{ah^2}{3}$  vereinigt; die Tiefe von  $A$  ist  $\frac{2}{3}h$ , von  $B$  ist sie  $\frac{1}{2}h$ , also diejenige von  $C$ , einstweilen  $z_1$  genannt, aus

\* In den beiden Dreiecksaufgaben zeichnet Ritter je eine Figur für ein rechtwinkliges  $\triangle$ , was als unnöthige Beschränkung noch erwähnt sei.

$$\frac{ah^2}{2} \cdot \frac{2}{3} h = \frac{ah^2}{6} \cdot \frac{h}{2} + \frac{ah^2}{3} \cdot z_1$$

bestimmbar. Vergl. § 2.

Diese Methode ist von den Schwerpunkts-Bestimmungen her bekannt; z. B. für ein Trapezoid, dieses als Summe zweier Dreiecke betrachtet.

§ 5. Zum Schlusse führe ich noch an, dass Poisson in seinem *Traité de méc.* nur das Beispiel des Trapezes, dessen parallele Seiten horizontal liegen, durchführt, und zwar mit Integration. Dieses Beispiel passt insofern gut hierher, als es die obigen drei Fälle als einfache Specialitäten darbietet. Indem Poisson aber für die unter dem Winkel  $\alpha$  zum Horizonte geneigte Ebene theils eine verticale, theils eine in der Ebene liegende Strecke einführt, wird die falsche Vorstellung erweckt und auch im Texte ausdrücklich bestärkt, als ob „die Lage des Druckmittelpunktes von der Neigung der Wand abhängig“ wäre. Dasselbe kann man auch in Duhamels Lehrbuch der reinen Mechanik finden.

In meinem Taschenbuche der Festigkeitslehre (Anhang über flüssige Körper) habe ich in Kürze den Standpunkt des § 2 vertreten.

Augsburg.

Prof. Kurz.

## XVI. Eine Anwendung der Theorie des Tauschwerthes auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Als Nützlichkeitsgrad oder wirthschaftliche Intensität  $J$  eines Gutes, von dem eine Person die Menge  $M$  besitzen möge, wird die Nützlichkeit oder Werthschätzung bezeichnet, die der Besitzer einer Vermehrung des Gutes um  $dM$  beilegt. Erfahrungsmässig steht fest, dass  $J$  eine fallende Function von  $M$  ist. Die besondere Annahme, dass  $J$  umgekehrt proportional mit  $M$ , also  $J = J_0 : M$ , wo  $J_0$  eine Constante, wird durch ihre Einfachheit nahe gelegt und lässt sich innerhalb mässiger Grenzen mit denselben Gründen stützen, wie das psychophysische Gesetz überhaupt. Diese Wahl für die Function  $J$  ergibt als Gesamtnutzen  $N$  einer Vermehrung des Besitzes an dem in Rede stehenden Gute vom Betrage  $M_0$  auf den Betrag  $M_0 + M_1$  den Werth:

$$N = \int_{M_0}^{M_0 + M_1} J \cdot dM = J_0 \cdot \log \frac{M_0 + M_1}{M_0}.$$

Welchen Nützlichkeitsgrad  $J'$  der Besitzer des Gutes  $M$  einer nur wahrscheinlichen Vermehrung um  $dM$  beilegt, ist selbstverständlich rein subjectiv und hängt von seiner Neigung zum Gewinnspiel ab. Hält er sich aber an den aus dem Wahrscheinlichkeitsbegriffe folgenden objectiven Maassstab, so muss er

$$J' = w \cdot J$$

schätzen, wenn  $w$  die Wahrscheinlichkeit einer Vermehrung um  $dM$  bedeutet. Man erhält in diesem Falle den Gesamtnutzen  $N'$  einer mit



$$J' = wJ, \quad p = w, \quad dM = w \cdot dM';$$

die von den beiden Gütern  $M$  und  $M'$  gegeneinander umgetauschten Mengen  $M$  und  $M'$  stehen also in der Beziehung

$$M = w \cdot M';$$

der Grundlage für die Bemessung der mathematischen Hoffnung.

Die beiden Arten, den ökonomischen Werth wahrscheinlicher Ereignisse zu bemessen, sind dadurch auf gemeinsamen Boden gestellt. Die eine ergibt sich, wenn Gewinne und Verluste als Veränderungen sicheren Besitzes, die andere, wenn sie als Folgen eines im Austausch gegen sicheren Besitz erworbenen neuen Gutes, des Genusses am Spiel, angesehen werden.

Dresden.

GEORG HELM.

### XVII. Ueber einen zerfallenden quadratischen Strahlencomplex.\*

Zwei räumliche Polarsysteme erzeugen bekanntlich im Allgemeinen einen quadratischen Strahlencomplex, den „Reye'schen Complex“. Als Ordnungsflächen der Polarsysteme können zwei nicht singuläre Flächen zweiter Ordnung angenommen werden. Der Complex enthält jede Gerade, deren zwei Polaren sich schneiden. Jedem Punkte  $P'$  ist ein zweifach conjugirter Complexstrahl, nämlich die Schnittlinie der beiden Polarebenen von  $P'$  und ebenso jeder Ebene  $\pi'$  die Verbindungslinie ihrer beiden Pole als zweifach conjugirter Complexstrahl zugeordnet. Der Complex enthält im Allgemeinen höchstens vier Hauptpunkte, und ebenso viel Hauptebenen, ist also ein tetraëdraler. Er kann jedoch auch zerfallen und unendlich viele Hauptpunkte und Hauptebenen enthalten. Die Hauptpunkte bilden alsdann eine Punktreihe  $h$  und die ihnen zugeordneten Hauptebenen einen Ebenenbüschel  $h'$ . Der quadratische Complex zerfällt dadurch in die speciellen linearen Complexe  $h$  und  $h'$ . Dieser Fall tritt unter Anderem dann ein, wenn die Ordnungsflächen der beiden Polarsysteme Kugelflächen sind. Wir wollen diesen zerfallenden Strahlencomplex im Folgenden näher betrachten und voraussetzen, dass die Ordnungskugeln  $K$  und  $K_1$  reell sind und nicht concentrisch liegen.

Die Räume  $\Sigma$  und  $\Sigma_1$ , welche durch die reciproke Beziehung zu  $\Sigma'$  collinear auf einander bezogen sind und mit  $\Sigma'$  die beiden Polarsysteme bilden, haben einen Ebenenbüschel und somit noch eine Punktreihe entsprechend gemein. Nämlich die Pole einer jeden durch die Mittelpunkte  $O$  und  $O_1$  der Kugeln  $K$  und  $K_1$  gehenden Ebene  $\varepsilon$  in Bezug auf diese Kugeln fallen zusammen mit dem unendlich fernen Punkte  $E'\infty$ , indem die auf  $\varepsilon$  in  $O$  und  $O_1$  senkrecht stehenden (also parallelen) Geraden

\* Vergl. Reye, Geometrie der Lage, 3. Aufl. II. Abth. S. 190 fig., III. Abth. S. 12 fig.





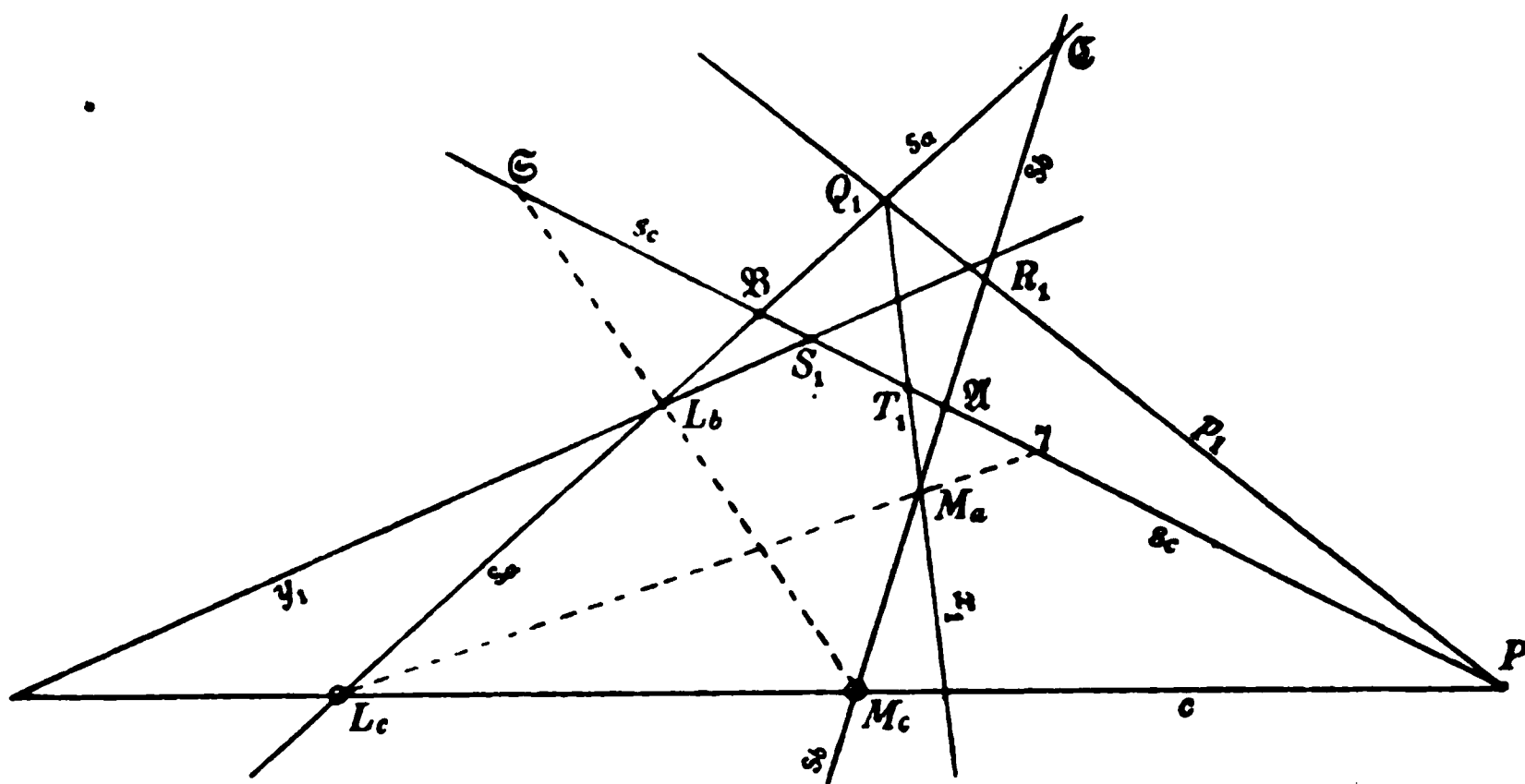








Dem Punkte  $\mathfrak{C}$  sei auf  $s_a$  der Punkt  $L_c$ , auf  $s_b$  der Punkt  $M_c$  in den Involutionen  $s_a s_b$  gepaart. Die Verbindungslinie  $c$  von  $L_c$  und  $M_c$  ist die Polare von  $\mathfrak{C}$ . — Dem Punkte  $\mathfrak{A}$  sei auf  $s_b$  der Punkt  $M_a$ , auf  $s_c$  der Punkt  $N_a$ , dem Punkte  $\mathfrak{B}$  sei  $L_b$  auf  $s_a$ ,  $N_b$  auf  $s_c$  gepaart,  $a$  oder  $M_a N_a$  ist die Polare von  $\mathfrak{A}$ ,  $b$  oder  $L_b N_b$  ist die Polare von  $\mathfrak{B}$ . Die von der Realität unabhängige lineare Bedingung, dass die sechs Punkte  $AA'BB'CC'$  auf einer Curve zweiter Ordnung liegen, ist die, dass die Dreiecke  $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$  und  $abc$  perspective Lage haben, das heisst, dass die Geraden  $\mathfrak{A}, (bc)$ ;  $\mathfrak{B}, (ca)$ ;  $\mathfrak{C}, (ab)$  durch einen Punkt gehen, oder was dasselbe ist, dass die Schnittpunkte  $s_a, a$ ;  $s_b, b$ ;  $s_c, c$  in einer Geraden liegen. Dieser bekannte Satz lässt sich, was nicht bekannt zu sein scheint,



ebenso wie der Pascal'sche benutzen, den zweiten Schnittpunkt einer durch den reellen Punkt  $C$  gehenden Geraden  $s_c$  mit dem Kegelschnitt  $K$  zu construiren, der durch vier gleichviel ob reelle oder conjugirt imaginäre Punkte  $AA'BB'$  und den reellen Punkt  $C$  bestimmt ist. Durch den Punkt  $P$ , in dem sich  $c$  und  $s_c$  schneiden, legen wir gerade Linien  $p_1 p_2 p_3 \dots$  die  $s_a$  in  $Q_1 Q_2 Q_3 \dots$ ,  $s_b$  in  $R_1 R_2 R_3 \dots$  treffen. Die Geraden  $M_a(Q_1 Q_2 Q_3 \dots)$  oder  $x_1 x_2 x_3 \dots$  und  $L_b(R_1 R_2 R_3 \dots)$  oder  $y_1 y_2 y_3 \dots$  sind projectiv, als auch die Punktreihen  $T_1 T_2 T_3 \dots$ ,  $S_1 S_2 S_3 \dots$ , in denen diese Linien  $s_c$  treffen. Die Dreiecke  $x_1 y_1 c$ ,  $x_2 y_2 c$ ,  $x_3 y_3 c$ , ... sind  $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$  perspectiv, weil ihre Seiten sich in Punkten einer Geraden  $p$  der Reihe  $p_1 p_2 p_3 \dots$  schneiden. Es ist dasjenige auszuwählen, dessen Seiten  $xy s_c$  in Punkten  $TS$  treffen, für die  $CC.\mathfrak{A}T.\mathfrak{B}S$  eine Involution ist.  $K$  geht dann durch den zweiten Doppelpunkt  $C'$  dieser Involution.

Wir bilden die Involutionen aus je sechs Punkten (von denen  $C$  als Doppelpunkt zweimal gezählt ist):

$$CC.\mathfrak{A}T_1.\mathfrak{B}W_1, \quad CC.\mathfrak{A}T_2.\mathfrak{B}W_2, \quad CC.\mathfrak{A}T_3.\mathfrak{B}W_3, \dots$$

so sind, wie leicht auf projectivem Wege bewiesen wird,  $T_1 T_2 T_3 \dots$ ,  $W_1 W_2 W_3 \dots$  projective Punktreihen, also ist auch  $S_1 S_2 S_3 \dots \propto W_1 W_2 W_3 \dots$

Fällt  $T$  (ein Punkt der Reihe  $T_1 T_2 \dots$ ) auf  $\mathfrak{B}$ , so fällt  $W$  (der entsprechende Punkt der Reihe  $W_1 W_2 \dots$ ) auf  $\mathfrak{A}$ , fällt  $p$  auf  $s_c$ , so fällt  $R$  auf  $\mathfrak{A}$ ,  $Q$  auf  $\mathfrak{B}$ ,  $T$  auf  $\mathfrak{B}$ ,  $S$  auf  $\mathfrak{A}$ . In der Projectivität  $S_1 S_2 S_3 \dots \wedge W_1 W_2 W_3 \dots$  ist demnach  $\mathfrak{A}$  ein sich selbst entsprechender Punkt. Der zweite, sich selbst entsprechende, linear construirbare Punkt werde mit  $N_b$  bezeichnet, ihm entspreche in der Reihe der  $T$  der Punkt  $N_a$ . Nach ihrer Construction sind die Punkte  $CC.\mathfrak{A}N_a.\mathfrak{B}N_b$  in Involution, und das Dreieck  $a(M_a N_a)$ ,  $b(L_b N_b)$ ,  $c$  ist dem Dreieck  $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$  perspectiv, die Curve  $K$  geht auch durch den zweiten Doppelpunkt  $C'$  der Involution  $CC.\mathfrak{A}N_a.\mathfrak{B}N_b$  auf  $s_c$  und dieser wird in bekannter Weise linear gefunden.

Von den Linien  $p_1 p_2 \dots$  braucht keine gezeichnet zu werden, denn geht  $p$  durch  $\mathfrak{C}$ , so fällt  $T$  auf  $\mathfrak{A}$ ,  $S$  auf  $\mathfrak{B}$ , fällt  $p$  auf  $s_c$ , so fällt  $T$  auf  $\mathfrak{B}$ ,  $S$  auf  $\mathfrak{A}$ , die Reihen  $S_1 S_2 S_3 \dots$ ,  $T_1 T_2 T_3 \dots$  bilden eine Involution in der  $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$  ein Paar ist. Ein zweites Paar erhält man, wenn man  $p$  auf  $c$  fallen lässt, und es bilden die Punkte  $\mathfrak{C}$  und  $\mathfrak{C}$  ein zweites Paar der Involution, womit diese gegeben ist.

Jena.

J. THOMAE.

### XIX. Ein stereometrisches Analogon zum Pythagoreischen Lehrsatz.

Begrenzt man eine dreiseitige von lauter rechten Winkeln gebildete körperliche Ecke durch eine vierte Ebene, so ist in dem entstehenden rechtwinkligen Tetraeder die Summe der Quadrate der drei Kathetenflächen gleich dem Quadrat der Hypotenusenfläche:

$$(K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 = H^2).$$

Beweis: Bezeichnet man die Kanten des Tetraeders, welche den rechten Winkeln anliegen, mit  $a, b, c$ , so sind die übrigen Kanten

$$\bar{a} = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad e = \sqrt{b^2 + c^2}, \quad f = \sqrt{c^2 + a^2};$$

ferner sind die Kathetenflächen als Dreiecke:

$$K_1 = \frac{1}{2} ab; \quad K_2 = \frac{1}{2} bc; \quad K_3 = \frac{1}{2} ca,$$

also:

$$K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 = \frac{1}{4} (a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2).$$

Es ist aber die Hypotenusenfläche

$$H = \frac{1}{4} \sqrt{(d + e + f)(d + e - f)(d - e + f)(-d + e + f)},$$

folglich:

$$\begin{aligned}
H^2 &= \frac{1}{16} (d+e+f)(d+e-f)(d-e+f)(-d+e+f) \\
&= \frac{1}{16} [(d+e)^2 - f^2][f^2 - (d-e)^2] \\
&= \frac{1}{16} [(\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2})^2 - c^2 - a^2][c^2 + a^2 - (\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{b^2+c^2})^2] \\
&= \frac{1}{4} (\sqrt{a^2+b^2} \sqrt{b^2+c^2} + b^2)(\sqrt{a^2+b^2} \sqrt{b^2+c^2} - b^2) \\
&= \frac{1}{4} [(a^2+b^2)(b^2+c^2) - b^4] \\
&= \frac{1}{4} (a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2);
\end{aligned}$$

mithin:

$$K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 = H^2.$$

Soran.

Dr. O. BEAU.

Historisch-literarische Abtheilung  
der  
Zeitschrift für Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

**Dr. O. Schlömilch und Dr. M. Cantor.**

---

38. Jahrgang.



Leipzig,  
Verlag von B. G. Teubner.  
1893.

**Druck von B. G. Teubner in Dresden.**



# Inhalt.

## I. Abhandlungen.

	Seite
Der V. Band des Catalogs der arabischen Bücher der viceköniglichen Bibliothek in Kairo. Von <b>Heinrich Suter</b> . . . . .	1, 41, 161
Zur Geschichte der Decimalbrüche. Von <b>K. Hunrath</b> . . . . .	25
Ein mathematischer Papyrus in griechischer Sprache. Von <b>M. Cantor</b> . .	81
Notizen zur Geschichte der Physik. Von <b>G. Berthold</b> . . . . .	121
Nachtrag zu meiner Uebersetzung des Mathematiker-Verzeichnisses im Fihrist des Ibn Abî Ja'kûb an-Nadîm. Von <b>Heinrich Suter</b> . . . . .	126

## II. Recensionen.

### Philosophie.

<b>Husserl</b> , Philosophie der Arithmetik. Von <b>H. Schotten</b> . . . . .	88
<b>Frege</b> , Function und Begriff. Von <b>H. Schotten</b> . . . . .	90

### Geschichte der Mathematik.

<b>Gerland</b> , Geschichte der Physik. Von <b>M. Cantor</b> . . . . .	62
<b>Graf</b> , Das Leben und Wirken des Physikers und Astronomen Johann Jacob Huber aus Basel. Von <b>M. Cantor</b> . . . . .	63
<b>Müller, Fel.</b> , Zeittafeln zur Geschichte der Mathematik, Physik und Astronomie bis zum Jahre 1500. Von <b>M. Cantor</b> . . . . .	63
<b>Rudio</b> , Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung. Von <b>M. Cantor</b> . . . . .	64
<b>Burkhardt</b> , Bernhard Riemann. Von <b>M. Cantor</b> . . . . .	66
<b>Besthorn und Heiberg</b> , Codex Leidensis 399, 1. Von <b>H. Suter</b> . . . .	192
Per il terzo Centenario dalla inaugurazione dell' insegnamento di Galileo Galilei nello studio di Padova. Von <b>M. Cantor</b> . . . . .	197
<b>Studnička</b> , Algorismus prosaycus Magistri Christiani anno fere 1400 scriptus. Von <b>M. Cantor</b> . . . . .	198
<b>Hultsch</b> , Die Näherungswerthe irrationaler Quadratwurzeln bei Archimedes. Von <b>M. Cantor</b> . . . . .	223
<b>Apollonii Pergaei</b> quae graece exstant edidit <b>Heiberg</b> . Von <b>M. Cantor</b>	224
<b>Boncompagni</b> , Catalogo dei lavori di Enrico Narducci. Von <b>M. Cantor</b> .	225
<b>Kleinstück</b> , Zeitgleichungstafel. Von <b>M. Cantor</b> . . . . .	66

### Arithmetik, Zahlentheorie, Versicherungswesen, Analysis.

<b>Bernhard Riemann's</b> gesammelte Werke, herausgegeben von <b>R. Dedekind</b> und <b>H. Weber</b> . 2. Auflage. Von <b>M. Cantor</b> . . . . .	66
<b>Teixeira</b> , Curso de analyse infinitesimal. Segunda parte. Von <b>M. Cantor</b>	67

	Seite
<b>Padé</b> , Premières leçons d'algèbre élémentaire. Von <b>M. Cantor</b> . . . . .	68
<b>Kobald</b> , Ueber die Versicherung der Bergwerksbruderladen. Von <b>M. Cantor</b> . . . . .	70
<b>Fischer, E.</b> , Systematischer Grundriss der Elementarmathematik. Von <b>E. Jahnke</b> . . . . .	72
<b>Molenbroek</b> , Theorie der Quaternionen. Von <b>E. Jahnke</b> . . . . .	73
<b>Divić</b> , Die sieben Rechnungsoperationen mit allgemeinen Zahlen. Von <b>E. Jahnke</b> . . . . .	74
<b>Scheffers</b> , Die Vorlesungen Sophus Lie's über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Von <b>L. Schlesinger</b> . . . . .	95
Dasselbe. Von <b>E. Study</b> . . . . .	185
<b>Krazer und Prym</b> , Neue Grundlagen einer Theorie der allgemeinen Thetafunctionen. Von <b>M. Krause</b> . . . . .	102
<b>Bachmann</b> , Die Elemente der Zahlentheorie. Von <b>W. Fr. Meyer</b> . . . . .	108
<b>Scheffler</b> , Beiträge zur Zahlentheorie. Von <b>E. Jahnke</b> . . . . .	113
<b>Sickenberger</b> , Leitfaden der Arithmetik nebst Uebungsbeispielen. Von <b>E. Jahnke</b> . . . . .	114
<b>Sickenberger</b> , Algebra. Von <b>E. Jahnke</b> . . . . .	114
<b>Pauly</b> , Die Schnellrechnenkunst. Von <b>E. Jahnke</b> . . . . .	114
<b>Obenrauch</b> , Zur Transformation und Reduction von Doppelintegralen mittelst elliptischer Coordinaten. Von <b>E. Jahnke</b> . . . . .	114
<b>Karup</b> , Die Finanzlage der Gothaischen Staatsdiener-Wittwen-Societät. Von <b>M. Cantor</b> . . . . .	137
Dasselbe. Von <b>L. Goldschmidt</b> . . . . .	201
<b>Meyer, W. Fr.</b> , Ausführlicher Bericht über die Fortschritte der projectiven Invariantentheorie im letzten Vierteljahrhundert. Von <b>H. Burkhardt</b> . . . . .	141
<b>Müller, E. R.</b> , Vierstellige logarithmische Tafeln. Von <b>M. Cantor</b> . . . . .	69

### Synthetische und analytische Geometrie. Trigonometrie.

<b>Schwering</b> , 100 Aufgaben aus der niederen Geometrie nebst vollständigen Lösungen. Von <b>F. Schütte</b> . . . . .	30
<b>Pegrassi</b> , Della trisezione dell angolo. Von <b>F. Schütte</b> . . . . .	37
<b>Uhlich</b> , Reihensummen auf geometrischem Wege. Von <b>M. Cantor</b> . . . . .	38
<b>Häbler</b> , Ableitung der ebenen Trigonometrie aus drei Grundgleichungen. Von <b>M. Cantor</b> . . . . .	38
<b>Kiefer</b> , Ueber zwei specielle Brennpunkte des Kreises. Von <b>M. Cantor</b> . . . . .	71
<b>Zahn</b> , Wandtafeln für den Unterricht in der Stereometrie. Von <b>J. Henri</b> . . . . .	72
<b>Peano</b> , Die Grundzüge des geometrischen Calcüls. Von <b>E. Jahnke</b> . . . . .	74
<b>Heger</b> , Planimetrie. Von <b>F. Schütte</b> . . . . .	75
<b>Petersen</b> , Lehrbuch der elementaren Planimetrie. Von <b>F. Schütte</b> . . . . .	76
<b>Glinzer</b> , Lehrbuch der Elementar-Geometrie. Von <b>F. Schütte</b> . . . . .	77
<b>Jensen</b> , Elemente der Trigonometrie. Von <b>F. Schütte</b> . . . . .	77
<b>Seeger</b> , Leitfaden für den ersten Unterricht in der Geometrie. Von <b>F. Schütte</b> . . . . .	78
<b>Mouchot</b> , Les nouvelles bases de la géométrie supérieure (géométrie de position). Von <b>H. Brunn</b> . . . . .	90
<b>Mertschinsky</b> , Otia mea. Von <b>E. Jahnke</b> . . . . .	113
<b>Stuhlmann</b> , Zirkelzeichnen. Von <b>F. Schütte</b> . . . . .	116



<b>Jamieson</b> , Elemente des Magnetismus und der Elektrizität. Von <b>B. Nebel</b>	131
<b>Gelcich und Dietzschold</b> , Die Tabellen der Uhrmacherkunst. Von <b>B. Nebel</b>	132
<b>Domke</b> , Beiträge zur theoretischen und rechnerischen Behandlung der Ausgleichung periodischer Schraubenfehler. Von <b>B. Nebel</b>	132
<b>Schmidt</b> , Die Strahlenbrechung auf der Sonne. Von <b>B. Nebel</b>	132
<b>König</b> , Ueber den Helligkeitswerth der Spectralfarben bei verschiedener absoluter Intensität. Von <b>B. Nebel</b>	133
<b>Porges</b> , Ueber die wichtigsten internationalen Masseinheiten. Von <b>B. Nebel</b>	134
<b>Airy</b> , Die Gravitation. Von <b>B. Nebel</b>	134
<b>Pollack</b> , Die photographische Terrainaufnahme. Von <b>B. Nebel</b>	135
<b>Schlichting</b> , Die Gravitation ist eine Folge der Bewegung des Aethers. Von <b>B. Nebel</b>	136
<b>Lipps</b> , Aesthetische Factoren der Raumanschauung. Von <b>B. Nebel</b>	136

---

Bibliographie	Seite 39, 79, 119, 146, 199, 226
Mathematisches Abhandlungsregister: 1. Januar bis 30. Juni 1892	149
„ „ 1. Juli bis 31. December 1892	228

---

# Historisch-literarische Abtheilung.

---

## Der V. Band des Katalogs der arabischen Bücher der viceköniglichen Bibliothek in Kairo.

Aus dem Arabischen übersetzt und mit Anmerkungen versehen

von

Dr. HEINRICH SUTER,

Professor am Gymnasium zu Zürich.

---

### V o r w o r t.

In den letzten acht Jahren erschienen in Kairo nach einander sechs Bände des Katalogs der arabischen Drucke und Handschriften der viceköniglichen Bibliothek daselbst (Fihrist al-kutub al-'arabijja), herausgegeben von K. Vollers, Muhammed al-Biblawi und Andern. Der V. Band enthält: Geschichte und Geographie, mathematische Wissenschaften, Astronomie, Geheimwissenschaften (Astrologie, Magie etc.), Physik und Chemie. Sämmtliche Abtheilungen dieses Bandes, mit Ausnahme der Geschichte und Geographie, wurden speciell bearbeitet von Ibrahim Efendi 'İsmat, einem früheren Bibliothekar, vor der Drucklegung aber nochmals durchgesehen und verbessert von Schaich Ahmed ad-Dairûti, unter Mithilfe von Schaich 'Abderrahman as-Sajjid.

Ich hielt nun eine Uebersetzung und Veröffentlichung des mathematischen und astronomischen Theiles dieses Kataloges für im Interesse der Geschichte dieser Wissenschaften liegend, und ich hoffe, die Vertreter dieser Disciplin werden hierin mit mir übereinstimmen. Allerdings sind die neueren Werke für die Geschichte der Wissenschaft von geringem oder keinem Belang, aber auch diese haben für Manchen doch ein gewisses, ich möchte sagen kulturhistorisches Interesse, und ich glaubte daher, diese kleinere mathematische Abtheilung vollständig wiedergeben zu müssen; für die grössere astronomische wäre vielleicht eine Auslese angezeigt.

Was nun das Formelle meiner Uebersetzung anbetrifft, so habe ich den Leser auf folgende Punkte aufmerksam zu machen:

In der Transcription befolge ich das in meiner im Supplementhefte des Jahrganges 1892 dieser Zeitschrift (auch als Abhandlung zur Geschichte



















































gest. Sonntags, den 15. Muharram 335, 946]: ein Abschnitt mit drei Sätzen. Schluss der Abschrift am ersten Tage des Rabî' I. 1153, 1740.

30. Verschiedene geometrische Aufgaben, von einigen Gelehrten, wie **Abû Sahl al-Kûhî**, **Eukleides**: aus dem Buche der Theilung (der Flächen). **Abû Mahmûd al-Chudschandî**<sup>62</sup>, **Abû 'Alî Hasan ben Husain al-Basrî**<sup>63</sup>, **Tâbit ben Kurra al-Harrânî**; es sind zwölf Aufgaben: die Abschrift wurde vom Abschreiber nicht ganz vollendet.

31. Recension des Buches „der himmlischen Erscheinungen“ (Phaenomena) von **Nasîr ed-Dîn at-Tûsî**, ursprünglich verfasst von **Eukleides**; es enthält 23 Sätze [andere Abschriften, von denen noch zwei existiren, haben deren 25].

32. Recension des Buches über die Grösse und Entfernung der beiden Himmelskörper (Sonne und Mond), von **at-Tûsî**, ursprünglich verfasst von **Aristarchos**, mit 17 Sätzen. Schluss der Abschrift am 28. Dschumâdâ II. 1146; 1733.

Der erste Theil der **masâil tatbîkijja** (Aufgaben, die sich beziehen) auf die alte Geometrie, übersetzt (hier wohl = verfasst) von **Sr. Exc. Muhammed Efendî Dijâb**, gegenwärtig 1307 Professor an der **Taufîkijja**.<sup>64</sup> Lithographirt in der Druckerei al-Hilâl in Kairo, im Hausch<sup>65</sup> asch-Scharkâwî. A.-N. 124. H.-N. 21258.

Vier weitere Exemplare dieses ersten Theils: A.-Nn. 125—128. H.-Nn. 21259—21262.

### ج (Nûn).

**An-nuchba as-sanijja** (die herrliche Auswahl) aus den Elementen der Geometrie von **Sâdik Bey Schanân**, vormals Director der Vorbereitungsschule [gest. am Anfang des 14. Jahrh. d. H.], übersetzt (zusammengestellt?) von **Ahmed Efendî**, Professor der mathematischen Wissenschaften an der Generalstabs- und Artillerieschule. Ein Band, lithographirt in der Druckerei der Staatsschulen 1299, 1881/82 bis zum Bogen 24, von da bis zum Ende lithographirt in der Druckerei in Bûlâk, 1303, 1885/86. A.-N. 177. H.-N. 23971.

Ein zweites Exemplar dieses Werkes. A.-N. 178. H.-N. 23972.

Der erste Theil von **an-nuchba al-'izijja** (die 'izische Auswahl), das ist eine Bearbeitung der Elemente der Geometrie, von **'Alî 'Izat ben Badawî** [gest. am Samstag, den 3. Dschumâdâ II. 1289<sup>65</sup>, 1872]. Er enthält die vier ersten Bücher der alten Geometrie (der Eukl. Elemente?); gedruckt in der Druckerei der polytechnischen Schule 1274, 1857/58; am Ende vier Figurentafeln. A.-N. 80. H.-N. 4841.



von der zweiten Seite der ersten Tafel:

99,996 19,      100,003 81,

bei letzteren ein Sternchen: 99,996<sup>\*</sup> 19,      100,003<sup>\*</sup> 81 und am Rande die Bemerkung:

\* Centesima integri, ut ante Millesima, et decies Millesima, et mox, Decima.

Beispiel für ein Bruchstelle („mox Decima“) von Seite 9 der ersten Tafel:

99,744 1 und 100,256 6.

2. durch eine Ueberschrift am Kopf; Beispiel aus der zweiten Tafel:

Millena Part. Millesima

1,    745,    241

.....

50,    000,    000

.....

70,    710,    678.

3. noch anders in dem schon angeführten angehängten: Francisci Vietaei Universalium Inspectionum ad canonem math. liber singularis:

Auf Seite 15, 51, 53, 54, 56, 57, 58, 59 werden die Decimalstellen durch kleinere Schrift und durch Unterstreichen bezeichnet; Beispiel von Seite 15: für  $r = 100,000,000,00$  die Grenzen für  $\pi$  zu 314,159,265,37 und 314,159,265,36 der mittlere Werth zu 314,159,265,36 [zu bemerken das Abtheilen der Bruchstellen zu drei Ziffern!].

Endlich auf Seite 64 und 65 werden die Bruchstellen von der ganzen Zahl durch einen senkrechten Strich getrennt und klein geschrieben; Beispiele:

9,999,989,540|00,27,35,29,00 und 9,999,997,386|00,01,70,82,49.

[Dass hier die Bruchstellen nicht in Gruppen zu drei, sondern zu zwei Ziffern abgetheilt werden, erklärt sich daraus, dass die Zahlen Quadratzahlen sind.]

Von diesem senkrechten Strich zum Punkt ist nur ein kleiner Schritt.

## II.

Auf Seite 568 heisst es bei Ihnen:

„Darüber, ob Beyer die Stevin'schen Schriften wirklich nicht gekannt hat, ist Zweifel eher möglich als bei Bürgi.“

In der von mir vor längerer Zeit aus der Frankfurter Bibliothek entliehenen Ausgabe von Beyer's Logistica decimalis — leider habe ich mir das Jahr der Ausgabe und die Nummer des Katalogs nicht notirt, oder die Notiz ist mir abhanden gekommen — wird auf Seite 113 von Johann Semsen Decimalrechnung („auß Anweisung Simon Stevins“) im 3., 4., 5. und 6. cap. lib. I. Geodaes. gesprochen:

„Joh. Sems schreibt die ganze vnnnd Brüche vnbezeichnet bey einander:

setzet er die Nennern der Brüche neben zu: Zum dritten (numerirt

er die Zehlern | und auch absonderlich die Nennern: Letzlich dividirt er was die Zehlern gegeben | durch die Nennern | und notirt den Zehler vnnnd Nenner deß Bruchs neben die Gantzen.“

Es werden auch Beispiele aus Sems' Geod. gegeben:

für Addition:  $\begin{array}{r} 56036 \\ 47038 \\ \hline \end{array}$  100ste theyle

Summa  $1030\overset{*}{|}84$  100ste theyle;

für Subtraction: Von 12004 100sten theyl der Ruthen |  
Ziehet 5625, 100ste theyl der Ruthen

Rest 6379, 100e theyl der Ruthen;

für Multiplication:  $\begin{array}{r} 2862 \\ 2884 \\ \hline \end{array}$  100ste Ruthen

11448 10 000e □t Ruthen

22896

11448

5724

$710\overset{*}{|}9208$  1000e □t Ruthen.

Beispiel für Division: 7109028 10 000e Ruthen | durch 2862 100e Ruthen.

$$\begin{array}{r} \overline{Ds} \ 7109028 \\ \overline{DR} \ 2862 \\ \hline \overline{DS} \ 10\ 000 \\ \overline{DR} \ 100 \\ \hline \overline{DS} \ 2484 \\ \overline{DR} \ 100 \\ \hline \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} Q. \ 2484 \\ Q. \ 100 \\ Q. \ 24\frac{84}{100} \end{array}$$

Sems' Geodäsie selbst habe ich nicht zu Gesicht bekommen. Sie erwähnen (S. 566) die bei Stevin vorkommende kürzere Schreibweise

$$54 \textcircled{2} \text{ für } \frac{54}{100} \text{ und } 707 \textcircled{2} \text{ für } 7\frac{7}{100}.$$

Möglich, dass Sems 56036  $\textcircled{2}$  schreibt und Beyer das Zeichen in Worte übersetzt. Jedenfalls aber hat Beyer, wenn nicht Stevin's Verfahren selbst, so doch Semsens Anwendung desselben gekannt und sich zu dieser Kenntniss bekannt.

Beifolgendes Heftchen\*\* enthält auf Seite 235 eine kurze Anzeige der auch von Ihnen besprochenen Geschichte der Rechenkunst von Villicus, die einen Hinweis auf die Beziehung Beyer's zu Stevin enthält.

\* Der Strich bei  $1030\overset{*}{|}84$  und  $710\overset{*}{|}9208$  bei Beyer gedruckt.

\*\* Neue Philosophische Rundschau, Jahrgang 1892, Nr. 16.

## Recensionen.

---

**Einleitung in die theoretische Physik.** Von V. v. LANG. Zweite umgestaltete und vermehrte Auflage. 983 S. mit 126 eingedruckten Holzstichen. Braunschweig 1891. Verlag von Friedrich Vieweg & Sohn. Preis 20 Mk.

Schon der äussere Anblick des vorliegenden Werkes zeigt, dass gegenüber der ersten Auflage eine wesentliche Vermehrung des Stoffes stattgefunden hat. Von grösserer Wichtigkeit ist indessen die innere Umgestaltung, zu der sich der Verfasser entschlossen hat, indem er nicht mehr allein die mathematischen Kenntnisse der Mittelschulen für ausreichend erachtet, sondern gleich die Differentialrechnung zu Grunde legt. Nach unserer Ansicht muss auf den Vordersatz des den Zweck behandelnden Vorwortes der ersten Auflage: „Wer mit den physikalischen Kenntnissen der Mittelschulen ausgerüstet nun auf dem Gebiete der theoretischen Physik sich belehren will, der muss...“ der Nachsatz folgen: der muss sich zunächst, oder mindestens gleichzeitig, mit Differential- und Integralrechnung befassen. Es ist eben durchaus nothwendig, dass bei jedem Studium, wenn es erfolgreich sein soll, auch die nöthigen Vorkenntnisse zu erwerben sind. Ganz einverstanden sind wir mit dem Verfasser, wenn er sagt, dass der Anfänger bei den meisten Büchern der theoretischen Physik einen grossen Sprung thun muss; denn diese Bücher setzen Differential- und Integralrechnung eben als bekannt voraus. Dass aber hieraus nicht die Weglassung der Differential- und Integralrechnung gefolgert werden darf, dies hat auch der Verfasser bei der Bearbeitung der zweiten Auflage sehr richtig empfunden. Jetzt erst nimmt das Buch, nach unserer Auffassung, die richtige Stelle beim Hochschulunterricht ein, indem es während der beiden ersten Semester neben den Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung für die künftigen Semester gründlich vorbereitet. Die jedem einzelnen Capitel angehängten Literaturverzeichnisse sind für das eingehendere Studium von grossem Werth für den Studirenden.

B. NEBEL.

**Vorlesungen über mathematische Physik.** Von GUSTAV KIRCHHOFF. Zweiter Band: Mathematische Optik, herausgegeben von K. HANSSEL, mit einem Bildnisse Kirchhoff's. 272 S. Dritter Band: Elektrizität























untersuchen, welche der Punkt  $B$  beschreibt, wenn man durch  $O$  die Gerade  $AC$  und längs des Schenkels  $OY$  den Kreis gleiten lässt. Immerhin verdient die Arbeit wegen der eleganten und interessanten Construction und ihrer klaren Darstellung alle Beachtung.

F. SCHÜTTE.

---

**Einladungsschrift der Fürsten- und Landesschule Grimma zu der Einweihung des neuen Schulgebäudes am 24. September 1891. Reihensummation auf geometrischem Wege. Von Professor ERNST UHLICH. S. 43 – 49 und Die Ableitung der ebenen Trigonometrie aus drei Grundgleichungen. Von Professor Dr. THEODOR HÄBLER. S. 61–69.**

Zwei Sonderabzüge aus einem kleinen Sammelbände liegen uns vor, über welche wir in Kürze und gemeinschaftlich berichten, wiewohl zwischen beiden kein anderer Zusammenhang besteht, als dass beide derselben Einladungsschrift angehören. Herr Uhlich zeigt an drei Beispielen die Anwendung des Grundgedankens, dass die Zerlegung eines geometrisch Gegebenen in eine endliche oder unendliche Anzahl von Theilstücken, welche irgend einem Gesetze gemäss gewählt werden, die Summirung einer endlichen oder unendlichen Reihe vollziehen lässt. Herr Uhlich schickt zugleich eine Angabe der nicht umfangreichen Literatur voraus, welche den gleichen Gedanken, aber an anderen Beispielen, zur Anwendung brachte. Herr Häbler hat sich die Aufgabe gestellt, diejenigen Systeme von Grundgleichungen in Parallele zu bringen, aus welchen die sämtlichen Formeln der ebenen Trigonometrie sich ableiten lassen. Besonders hervorzuheben dürften die Untersuchungen sein, welche darauf gerichtet sind, den Satz von der Winkelsumme des ebenen Dreiecks, sofern er nicht selbst eine der gegebenen drei Gleichungen bildet, aus denselben abzuleiten.

CANTOR.

---







ك (Kaf).

**Kitâb** (ein Buch) über die darstellende Geometrie, übersetzt aus dem Französischen in's Arabische von **Muhammed Efendî Bujûmî** [aus dem 13. Jahrh. d. H.]. Anfang: Lob sei Gott, der die Leere des Daseins mit den Formen seiner Geschöpfe erfüllt hat. Zwei Theile in einem Band, gedruckt in Bülâk, am Schlusse 18 Figurentafeln. A.-N. 74. H.-N. 4835.

Ein zweites Exemplar desselben Werkes: A.-N. 75. H.-N. 4836.

**Kitâb** (ein Buch) über die darstellende Geometrie. Lithographirt in der Druckerei der polytechnischen Schule; in zwei Bänden: der erste enthält den Text, der zweite 38 Figurentafeln. A.-N. 87. H.-N. 4848.

ل (Lâm).

Der erste Theil von **al-la'âlî al-bahijja** (die glänzenden Perlen): über die beschreibende Geometrie, übersetzt aus dem Französischen in's Arabische von **Ibrâhîm Efendî Ramadân** [aus dem 13. Jahrh. d. H.]. Ein Band, gedruckt in Bülâk 1261, 1845; am Schlusse 40 Figurentafeln. A.-N. 66. H.-N. 4827.

Ein zweites Exemplar dieses Werkes (I. Theil): A.-N. 67. H.-N. 4828.

Ein drittes Exemplar, ohne Einleitungsformel: A.-N. 150. H.-N. 22556.

م (Mîm).

Der erste Theil von **al-minha ad-danijja** (das geringe, unvollkommene Geschenk): über die beschreibende Geometrie, von **Ibrâhîm Efendî Ramadân** [dem vorigen]. Ein Band, gedruckt in der Druckerei der polytechnischen Schule 1269, 1852/53. Am Schlusse drei Tafeln, am Anfang ein Inhaltsverzeichnis. A.-N. 149. H.-N. 22555.

#### 4. Perspective und Schattenlehre.

د (Dâl).

**Ad-durr al-mantûr** (die ausgestreuten Perlen): über die Perspective und Schattenlehre, aus dem Französischen in's Arabische übersetzt von **Sajjid Sâlih Efendî [Bey] Madschdî**, vormals einem der Uebersetzer der mathematischen Wissenschaften und Lehrer des Französischen an der vicköniglichen polytechnischen Schule in Bülâk [aus dem 13. Jahrh. d. H.]. Zwei Theile in einem Band, lithographirt in der Druckerei der polytechnischen Schule 1269. A.-N. 45. H.-N. 4806.

Zwei weitere solche Exemplare: A.-Nn. 158 und 159. H.-Nn. 22564 und 22565.

Ein zweiter Theil des vorigen Werkes, enthaltend 23 Figurentafeln, von demselben Verfasser. Druckerei der polytechnischen Schule. A.-N. 88. H.-N. 4849.

## 5. Stein- und Holzschnitt.

ب (Bâ).

**Bigjat at-tullâb** (der Wunsch, das Erwünschte der Studirenden): über den Stein- und Holzschnitt, aus dem Französischen in's Arabische übersetzt von **Sajjid Sâlih Efendî** [Bey] **Madschdi** [dem vorigen]. Zwei Bände, lithographirt in der Druckerei der polytechnischen Schule al-âsafijja<sup>67</sup> in Bûlak 1270, 1853/54; der erste Band enthält den Text, der zweite 25 Figurentafeln. A.-N. 14. H.-N. 4775.

Ein zweites Exemplar dieses Werkes: A.-N. 15. H.-N. 4776.

## 6. Topographie.

ت (Ta).

**Tahdîb al-'ibârât** (die Zurechtlegung der Aufnahmen?): über das Katasterwesen (wörtlich über die Wissenschaft der Aufnahme der Vermessungen), übersetzt aus dem Französischen in's Arabische von **Sajjid 'Imâra** (oder 'Amâra) **Efendî**, vom Uebersetzungsbureau des Unterrichtsministeriums [aus dem 13. Jahrh. d. H.]. Ein Band, gedruckt in Bûlak 1260, 1844. Am Anfang ein Inhaltsverzeichniss und Vorbetrachtungen, am Schlusse 14 Figurentafeln. A.-N. 20. H.-N. 4786.

ج (Dschîm).

**Dschâmi' al-mabâdî wa'l-gâjât** (das Ganze, von den Elementen bis zur höchsten Stufe) des Katasterwesens, aus dem Französischen in's Arabische übersetzt von **Mahmûd Efendî** [Pâschâ] **Fahmî**, einem der Professoren der viceköniglichen polytechnischen Schule [lebt jetzt 1307 noch]. Ein Band, lithographirt in der Citadelle 1275, 1858/59. A.-N. 154. H.-N. 22560.

ك (Kâf).

**Al-kânûn ar-rijâdî** (der mathematische Kanon) über das Planzeichnen (wörtlich über das Zeichnen der Grundstücke\*), aus dem Französischen in's Arabische übersetzt von **Ibrâhîm Efendî Ramadân** [aus dem 13. Jahrh. d. H.]. Vier Theile in einem Band, gedruckt in Bûlak 1260, 1844. Am Schlusse neun Figurentafeln. A.-N. 21. H.-N. 4782.

Zwei weitere Exemplare dieses Werkes: A.-Nn. 147 und 148. H.-Nn. 22553 und 22554.

ك (Kâf).

Der erste Theil des **Kitâb fann at-tobûgrâfijâ** (Buches der Disciplin der Topographie), von **Muhammed Efendî Fauzî** und **Hasan Efendî Husnî**, beide Lehrer der Mathematik an der polytechnischen Schule [aus dem 14. Jahrh. d. H.]. Gedruckt in Bûlak 1303, 1885/86. A.-N. 164. H.-N. 22760.

Ein zweites Exemplar dieses ersten Theils: A.-N. 165. H.-N. 22761.

\* Im Text steht **أرابى** wohl irrthümlich statt **أرجى**.







der Hand des 'Abderrahmān ben 'Alī al-Malikī, beendigt im Dū'l-Ka'da 1111, 1700. A.-N. 23. H.-N. 7829.

**Farāid 'awāid dschebrija** (algebraische Perlen und Nützlichkeiten) zum Commentar des Sibṭ zur Jāsmīnija; es sind dies Anmerkungen (zum Commentar des Sibṭ) des sehr gelehrten **Muḥammed al-Hafanī** [geb. 1101, 1689/90 im Dorfe (Flecken) Ḥafana, in der Provinz Scharḳija, in der Nähe von Bilbis, gest. im Rabi' I. 1181, 1767]. Das Buch wurde beendigt am 24. Scha'bān 1167, 1754. Anfang: Wir preisen Dich, o Gott, durch dessen Gnade wir zum Ziele durchdringen werden in der Algebra(?)<sup>70</sup> am Tage des Gerichtes. Ein Band, in älterer Schrift, von der Hand des **Muḥammed ben Muṣṭafā at-Ṭūchī**, beendigt in der letzten Nacht des Rad-schab 1240, 1825. A.-N. 34. H.-N. 4795. [Vergl. Sammelwerk A.-N. 181, Rechenkunst, und das folgende Sammelwerk A.-N. 89.]

ج (Kāf).

**Kitāb al-dschebr wa'l-mukābala** (das Buch der Algebra), übersetzt (oder verfasst?) von **Muḥammed Efendī Bujūmī**, vormals Lehrer an der viceköniglichen polytechnischen Schule [gest. in Chartūm 1268, 1851/52]. Anfang: Lob sei Dir, der Du nach Deiner Verheissung die Dämonen bezwungen hast. Enthält eine Einleitung und 12 Capitel. Ein Band, gedruckt in Būlak 1256, 1840/41. A.-N. 29. H.-N. 4790.

**Kitāb al-dschebr wa'l-mukābala** (das Buch der Algebra) von **Abū Jūsuf Aḥmed ben al-Ḥasan**. Anfang: Lob sei Gott, dem Unvergleichlichen. Es enthält 12 Capitel und ist ein Band in älterer Schrift. A.-N. 100. H.-N. 17305.

**Kitāb fī'l-dschebr wa'l-mukābala** (ein Buch über Algebra) von **Aḥmed ben Abī 'Abdallāh Muḥammed ben 'Otmān al-Azdī al-Marrākuschi**<sup>71</sup>, bekannt unter dem Namen **Ibn al-Bannā** [einem der Gelehrten des 7. Jahrh. d. H.]. Anfang: Lob sei Gott, dem Einzigen und Angebeteten, dem ewig Seienden. Zwei Theile in einem Band, in älterer Schrift, beendigt (die Abschrift) am Freitag, den 17. Dschumādā II. 746, 1345. A.-N. 1. H.-N. 7807.

**Al-kamālāt at-taufīkija**<sup>72</sup> (die erfolgreichen Vollkommenheiten): über die Elemente der Algebra, von **Aḥmed Efendī Kamāl**, Lehrer der Algebra an der viceköniglichen polytechnischen Schule [lebt jetzt 1307 noch]. Zwei Bände, gedruckt in der Druckerei des Unterrichtsministeriums 1299, 1881/82. A.-N. 175. H.-N. 23969.

Ein zweites Exemplar dieses Werkes: A.-N. 176. H.-N. 23970.

**Al-kawākib ad-durrija** (die glänzenden Sterne): über die algebraischen Operationen. [Vergl. weiter unten al-minha az-zahrija.]

ل (Lām).

**Al-lam'a al-māridīnija** (der māridinische Lichtblitz, Schimmer) im Commentar zur Jāsmīnija; es ist dies der Commentar des **Muḥammed**



ein Schlusswort. In älterer Schrift, von der Hand des 'Omar ad-Damûschî, beendigt am 10. Ramadân 777, 1376, in der Moschee al-'atîk in Kairo, abgeschrieben von einem eigenhändigen Manuskript des Autors, welches das Datum 736<sup>74</sup>, 1335/36 trägt. Wurmstichig.

3. Die Jâsmînijja: über die Algebra, von Ibn al-Jâsmînî. Anfang: Lob sei Gott für das, womit er uns erfreut. In älterer Schrift, von der Hand des 'Omar ad-Damûschî al-Ansârî, beendigt am 10. Scha'bân 778, 1376.

Muchtaşar 'ilm al-dschebr (Auszug aus, oder Abriss der Algebra), von Schafîk Bey Mansûr Jegin [lebt jetzt 1307 noch]. Es enthält fundamentale (principielle) Erklärungen (Definitionen) und sechs Capitel. Ein Band, gedruckt in Bûlak 1301, 1883/84. A.-N. 130. H.-N. 21666.

Zwei weitere Exemplare dieses Werkes: A.-Nn. 137 und 138. H.-Nn. 21864 und 21865.

Al-minha az-zahrijja (das glänzende, auserlesene Geschenk): über die algebraischen Operationen, übersetzt (oder verfasst) von 'Âmir Efendî Sa'd (aus dem 13. Jahrh. d. H). Anfang: Deinen Wohlthaten, o Aufrichter der Herzen der Gebrochenen, entspricht nicht der Dank der (Dich) Preisenden.<sup>75</sup> Es enthält eine Einleitung und fünf Capitel. Ein Band, gedruckt in der Druckerei der polytechnischen Schule 1269, 1852/53. A.-N. 30. H.-N. 4791.

Ein zweites Exemplar dieses Werkes: A.-N. 31. H.-N. 4792.

Ein drittes Exemplar, gedruckt 1278, 1861/62. A.-N. 91. H.-N. 16170.

Ein viertes Exemplar, gedruckt in Bûlak 1269. A.-N. 155. H.-N. 22561.

Der zweite Theil von al-minha az-zahrijja (das glänzende Geschenk): über die algebraischen Operationen, übersetzt (oder verfasst) von Sajjid Sâlih Efendî [Bey] Madschdî. Lithographirt in der Druckerei der polytechnischen Schule 1269. A.-N. 156. H.-N. 22562.

## 10. Anwendung der Algebra auf die Geometrie.

و (Dâl).

Ad-durra as-sanijja (die herrliche Perle): über die arithmetische (algebraische) Geometrie<sup>76</sup>, von Ahmed Efendî Fâid [gest. am Donnerstag, den 17. Şafar 1300, 1882]. Anfang: Lob sei Gott, dem durch die Erhabenheit seiner Eigenschaften Ausgezeichneten. Zwei Bände, lithographirt in der Druckerei der polytechnischen Schule 1269. A.-N. 46. H.-N. 4807.

Ein zweites Exemplar dieses Werkes: A.-N. 47. H.-N. 4808.

Der dritte Band des vorigen Werkes: A.-N. 157. H.-N. 22563.





















## Recensionen.

---

H. POINCARÉ. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. T. I: Solutions périodiques. Non-existence des intégrales uniformes. Solutions asymptotiques. 385 S. gr. 8°. Paris, Gauthier-Villars, 1892.

Das vorliegende Werk ist ein Anzeichen der starken, in vollem Fluss befindlichen Bewegung, in welche die Störungstheorie seit knapp 15 Jahren versetzt ist und in die Herr Poincaré durch seine im Band 13 der *Acta Mathematica* veröffentlichte, 1889 in Schweden preisgekrönte Schrift über das Problem der drei Körper eingegriffen hat. Für Diejenigen, welche diese Schrift, oder auch meine Analyse derselben in der Vierteljahrsschrift der Astr. Ges. Jahrg. 25, kennen, genügt zur Charakterisirung des Inhalts des hier zu besprechenden ersten Bandes die Angabe, dass er eine Bearbeitung des ersten der zwei Theile jener Abhandlung vorstellt, mit Ausschluss der Theorie der Integralinvarianten und ihrer Anwendung auf Stabilität, aber unter Zuziehung der Behandlung der Existenzfrage von eindeutigen Integralfunktionen. Der übrige Inhalt der Preisschrift, verbunden mit einer Discussion der von Herrn Gylden in die Störungstheorie so erfolgreich eingeführten Methoden etc., soll folgenden Bänden vorbehalten bleiben. So findet sich auch die in der Schrift schon ausgeführte Discussion der Lindstedt'schen Methode, welche nach der Vorrede in den ersten Band aufgenommen sein soll, in Wirklichkeit hier noch nicht explicit vor.

Veranlasst durch die 1885 gestellte Preisaufgabe — „für ein beliebiges System materieller Punkte, die einander nach dem Newton'schen Gesetze anziehen, unter der Annahme, dass niemals ein Zusammentreffen zweier Punkte stattfindet, die Coordinaten jedes einzelnen Punktes in unendliche, aus bekannten Functionen der Zeit zusammengesetzte und für einen Zeitraum von unbegrenzter Dauer gleichmässig convergirende Reihen zu entwickeln“ — war der Verfasser zu gewissen negativen Resultaten gelangt, welche berechtigtes Aufsehen hervorgerufen haben, wenn auch solche nach manchen schon vorher gemachten Schlüssen, insbesondere von Bruns, nicht gerade unvermuthet gekommen sind. Die positiven Ideen aber, welche Herrn Poincaré geleitet haben, sind von nicht minderer Wichtigkeit, schon deshalb, weil man sie auch in den Arbeiten der übrigen neueren Forscher auf diesem Gebiete erkennen kann; und gerade in der









aber, welche die Singularitäten von bestimmten Integralen, als Functionen eines eingehenden Parameters betrachtet, zum Gegenstand haben, machen nicht den Eindruck des Abgeschlossenen.

M. NOETHER.

---

**Geschichte der Physik.** Von Dr. E. GERLAND, Docent für Physik und Elektrotechnik an der Königlichen Bergakademie zu Clausthal i. H. [Vierter Band von Weber's Naturwissenschaftlicher Bibliothek.] Mit 72 in den Text gedruckten Abbildungen. Leipzig 1892, J. J. Weber's Verlag. 356 S.

Der Verfasser wollte, der Anzeige der Verlagshandlung zufolge, in seiner Geschichte der Physik eine Darstellung geben, welche die Entwicklung dieses Zweiges der Culturgeschichte in grossen Zügen vorführe, ohne sich in sachliche oder biographische Einzelheiten zu verlieren. Er hat sich dabei nicht an den Fachmann, sondern an den grossen Leserkreis der allgemein Gebildeten gewandt, er hat dem entsprechend einer leichten, anziehenden Sprache sich bedient, unterstützt durch zweckmässig gewählte Holzschnitte, nicht behindert durch Anführung von Beweisstellen. Am Schlusse ist allerdings auf 17 Seiten ein Literaturverzeichniss abgedruckt, doch kann man dasselbe nicht als Allgemeinanzführung der betreffenden Schriften betrachten. Solches wäre nur dann möglich, wenn im Literaturverzeichnisse jedes Buch mit einer fortlaufenden Nummer versehen und diese an allen Stellen abgedruckt wäre, wo Herr Gerland auf das betreffende Werk verweisen will. Wir haben es also mit einer wesentlich beweislos auftretenden Darstellung zu thun, bei welcher die Flagge des Verfassers für den Inhalt haften muss, und Herr Gerland hat sich seit etwa 15 Jahren einen genügend gesicherten Namen als gewissenhafter Forscher erworben, um seine Flagge in diesem Sinne entfalten zu können. Es wäre ja nicht schwer, manche Unrichtigkeiten in dem Buche hervorzuheben, insbesondere da, wo es Streifzüge auf das Gebiet der Geschichte der Mathematik und der Astronomie unternimmt. Wir sind der Meinung, Herr Gerland hätte diese Stellen besser ungeschrieben gelassen. Sie gehören nicht in eine Geschichte der Physik, für welche, auch wenn man das Wort Physik so eng als möglich fasst, eine kaum zu bewältigende Stofffülle vorliegt, und wenn, woran wir kaum zweifeln, das uns vorliegende Bändchen zu einer zweiten Auflage gelangt, so wird ein Ueberbordwerfen dieses Ballastes sehr gerathen sein. Das Register bedarf dagegen vielfacher Ergänzung, wenn es wirklich die Brauchbarkeit des Buches in dem Maasse erhöhen soll, wie ein gut angelegtes Namen- und Sachverzeichniss es zu thun vermag. Wörter wie: Anziehung, Batterie, Capilarität, Luftpumpe, Obertöne, Schallfiguren u. s. w. sollte man im Register nicht vermissen.

CANTOR.

























Darstellung fehlt. Diese Lücke wird allerdings durch die vorliegende Arbeit ausgefüllt, welche auch eine Reihe eigner, zum Theil neuer Untersuchungen des Verfassers bringt. Dahin gehören u. A. die Deutung, welche die Wirkung des Symbols  $\sqrt{-1}$  an einen Vektor und an einen Quaternion erfährt, ferner eine bestimmte geometrische Darstellung für die analytischen Gleichungen, welche complexe Coefficienten enthalten, sowie die Beantwortung mancher bisher unerledigten Frage bei der Auflösung der Quaterniongleichungen.

Dem theoretischen Bande soll in nächster Zeit ein zweiter folgen, der eine systematisch geordnete Darstellung der Anwendungen giebt.

E. JAHNKE.

---

**Die sieben Rechnungsoperationen mit allgemeinen Zahlen.** Von Dr. F. Đurđić.  
Wien und Leipzig 1891, Pichler. 165 S.

Der kroatische Verfasser giebt „auf Grundlage der Anschauung und unter Anwendung verallgemeinerter Definitionen“ eine sehr breit gehaltene Darstellung der Rechnungsoperationen, die neben anderen den Vorzug haben soll, „dass, während die Operationen in ihrer gebräuchlichen Bedeutung nur bei ihrer Anwendung auf absolute ganze Zahlen einen Sinn haben, sie in unserer Bedeutung bei allen Zahlarten verständlich sind, und spätere, scheinbar willkürliche, in der That aber nothwendige Festsetzungen, die jedoch keineswegs durch das Permanenzprincip der formalen Gesetze hinlänglich begründet sind, vollkommen gegenstandslos machen“. Indessen, den Nachweis, dass derartige allgemeingiltige Definitionen möglich sind, bleibt der Verfasser schuldig, und in dem Rahmen der wirklich betrachteten Zahlarten bietet die Darstellung wohl nichts wesentlich Neues. Bei der Definition der irrationalen Zahlen fehlen nähere Angaben über das Rechnen mit solchen. Es wird nicht angegeben, was nach dem Verfasser etwa unter zwei gleichen irrationalen Zahlen zu verstehen sei. Sehr ausführlich ist dagegen das Capitel, welches vom „Rechnen mit imaginären und complexen Zahlen“ handelt.

E. JAHNKE.

---

**Die Grundzüge des geometrischen Calculs.** Von G. PEANO. Uebersetzt von A. SCHEPP. Leipzig, B. G. Teubner. 1891. 38 S.

Während hervorragende Mathematiker der verschiedensten Nationen angefangen haben, die Grassmann'schen Principien zum Allgemeingut zu machen und weiter auszubauen, stehen noch heute in Deutschland nur wenige Mathematiker derartigen Untersuchungen wohlwollend gegenüber. Zu diesen gehört in erster Linie Herr Caspary, der in neuester Zeit auf Grassmann'schen Ideen eine allgemeine, ausserordentlich fruchtbare Methode aufgebaut hat, welche die Geometrie im Steiner'schen Sinne mit der Geometrie im



gewöhnlichen Stoffe noch Capitel über das vollständige Viereck, über Pol und Polare, über Kreistüchel und die Kreisverwandtschaft. Die Anordnung des Stoffes ist trefflich; die Beweise sind klar und sorgfältig geführt; viele gute und vollständig ausgearbeitete Übungssätze und Aufgaben sind beigelegt; die reiche Ausstattung mit vielen anderen Figuren ist sehr zu loben. Kurz: Heger's Planimetrie ist ein gutes Buch, aus dem nicht nur der Schüler Vieles, sondern auch der Lehrer Manches lernen kann.

Auszusetzen hätten wir nur folgendes. Erstens: Formeln, wie

$$\text{Kathete} = \sqrt{\text{Hypotenuse} \times \text{Anl-Abschnitt}},$$

gefallen uns nicht. Wofür hat man denn die bequemen Buchstaben? — Zweitens: Wenn man als parallel solche Geraden definirt, welche sich nicht schneiden, dann muss man nachweisen, dass es auch solche Geraden giebt. Das muss man aber nicht durch einen Scheinbeweis thun, indem man zwei unendliche Stücke, die nicht einmal congruent sind, zur Deckung bringt. Dieser Tadel trifft jedoch nicht blos dieses Buch, sondern eine Unzahl Lehrbücher.

F. SCHÜTTE.

**Lehrbuch der elementaren Planimetrie.** Von Dr. JULIUS PETERSEN, Professor der Mathematik an der Universität Kopenhagen, Mitglied der Königl. Dän. Gesellschaft der Wissenschaften. Deutsche Ausgabe unter Mitwirkung des Verfassers besorgt von Professor Dr. R. v. FISCHER-BENZON, Oberlehrer am Gymnasium zu Kiel. Zweite verbesserte und mit einem Anhang versehene Ausgabe. Kopenhagen, Verlag von Andr. Fred Høst & Søn, Buchhändler der Königl. Dän. Gesellschaft der Wissenschaften, 1891. 108 S. kl. 8°.

Eine in jeder Hinsicht ausführliche Besprechung dieses trefflichen Lehrbuches ist im XXVII. Bande dieser Zeitschrift (Hist.-liter. Abth. S. 27) durch Herrn Professor Dr. K. Schwering erfolgt, auf die wir hiermit verweisen. — Die vorliegende zweite Auflage unterscheidet sich von der ersten hauptsächlich nur durch einen Anhang. Dieser behandelt in bemerkenswerther Kürze und Klarheit die bekannte Lücke, die sich in der Reihe der Beweise der Geometrie in der Parallelen-theorie findet, und ventilirt die Frage, ob man sich diese Lücke in Zukunft ausgefüllt denken kann. Der Verfasser schlägt eine einschränkende Bestimmung für die Definition der Ebene vor, mit deren Hilfe der Satz von der Winkelsumme des Dreieckes exact bewiesen werden kann: „Eine Ebene hat die Eigenschaft, dass sie bei aufeinander folgenden Verschiebungen in sich selbst ganz in ihre ursprüngliche Lage zurückkehrt, wenn einer ihrer Punkte in seine ursprüngliche Lage zurückkehrt.“ — Sonstige Veränderungen des Textes sind geringfügig. Gern schliessen wir uns dem vom Uebersetzer von Wunsche an, dass die Ideen, welche diesem kleinen Buche





gaben sind alle aus der Praxis genommen in Berücksichtigung der Bedürfnisse des Technikers. Würde der Verfasser auch Aufgaben von theoretischem Interesse nebst einigen Anmerkungen hinzufügen, so ist nicht einzusehen, weshalb das Buch nicht auch z. B. auf dem Gymnasium mit Nutzen gebraucht werden könnte. Mehr als den Sinus-, Cosinus- und Tangenten-Satz haben wir nicht nöthig; sogar die Mollweide'schen Formeln können wir entbehren. — Der Lehrstoff umfasst 44 Seiten, den Rest füllt eine Tabelle der trigonometrischen Zahlen von 10 zu 10 Minuten.

F. SCHÜTTE.

**Leitfaden für den ersten Unterricht in der Geometrie.** Von HEINRICH SEGER, Director des Realgymnasiums zu Güstrow. Fünfte Auflage mit einer Figurentafel. Wismar, Hinstorff'sche Hofbuchhandlung, Verlagsconto 1891. 24 S. kl. 8°.

Das Büchlein enthält einen knappen und klaren Abriss der Elemente der Planimetrie, etwa bis zur Lehre vom Kreise. Es kann als guter Leitfaden für den Unterricht in der Hand des Schülers dienen, jedoch nicht zum Selbstunterricht, da es wegen seiner Kürze hier und da der näheren Ausführung und Erklärung Seitens des Lehrers bedarf. Die Lehrsätze sind ohne Beweis; ob der Verfasser will, dass sie auf der untersten Stufe gar nicht bewiesen werden, oder ob der Beweis durch den Lehrer geliefert werden soll, darüber erfahren wir Nichts, da das Büchlein der Vorrede entbehrt. Die Aufgaben sind ausserordentlich hübsch und zweckmässig gewählt und ihre Fassung ist, wie die der Lehrsätze, musterhaft klar und präzise. Eine Eigenthümlichkeit und wohl ein Vorzug des Büchleins ist, dass es, obschon für die unterste Stufe berechnet, den so ungemein wichtigen Begriff der Symmetrie eingeführt hat. Nicht unerwähnt wollen wir auch die einfache und elegante Weise lassen, mit welcher die Congruenz der Figuren, sozusagen „en gros“, behandelt wird.

F. SCHÜTTE.















$$\frac{2}{p \times q} = \frac{1}{q \times \frac{p+q}{2}} + \frac{1}{p \times \frac{p+q}{2}},$$

welche wir (Gesch. Math. I, 27) den Zerlegungen

$$\frac{2}{35} = \frac{1}{30} \frac{1}{42}, \quad \frac{2}{91} = \frac{1}{70} \frac{1}{130}$$

entnehmen zu dürfen glaubten, fand bei dem Pisaner keine Bestätigung. Man wird es uns nicht verübeln, wenn wir heute unsere Freude ausdrücken, dass das Rechenbuch von Achmîm unsere Vermuthung als Gewissheit bestätigt hat.

Herr Baillet hat die Zerlegungsmethoden, wie sie im Rechenbuche von Achmîm gelehrt werden, sorgsam gesammelt. Sie kommen in letzter Linie auf folgende zurück:

I. Die Subtractionsmethode. Der Nenner wird in Factoren zerlegt, und, wo möglich, mehrere solche Zerlegungen vorgenommen. Einzelne Factoren werden alsdann vom Zähler abgezogen, bis derselbe erschöpft ist. In der 21. Aufgabe z. B. ist  $\frac{239}{6460}$  zu zerlegen.

$$6460 = 68 \cdot 95 = 76 \cdot 85; \quad 239 = 76 + 68 + 95;$$

also

$$\frac{239}{6460} = \frac{1}{85} \frac{1}{95} \frac{1}{68}.$$

Eben diese Zahl 6460 hätte in zahlreiche andere Factorenpaare zerlegt werden können. Dass man gerade die hier in Verwendung gekommenen Factoren bevorzugte, beruht darauf, dass, wie sehr fein erkannt worden ist, den Stammbrüchen am Liebsten solche Nenner beigelegt wurden, die nicht durch gar zu grosse Unterschiede von einander abwichen.

II. Die Methode der durch Summentheile multiplicirten Factoren. Herr Baillet kleidet sie in die Formel:

$$\frac{a}{b \cdot c} = \frac{1}{c \cdot \frac{b+c}{a}} + \frac{1}{b \cdot \frac{b+c}{a}}.$$

Das ist aber genau unsere oben in's Gedächtniss zurückgerufene Formel, sofern  $a = 2$ . Die allgemeinere Formel aufzustellen waren wir nicht in der Lage, weil Ahmes in seiner Tabelle keinen Bruch mit von der 2 verschiedenem Zähler zur Zerlegung bringt. Ein Beispiel des Rechenbuches von Achmîm aus dessen 23. Aufgabe bietet  $\frac{2}{35}$ . Hier ist

$$35 = 5 \cdot 7, \quad 5 + 7 = 12, \quad \frac{12}{2} = 6,$$

also

$$\frac{6 \cdot 2}{6 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{5 + 7}{6 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{1}{42} \frac{1}{30}.$$

Unsere Leser sehen, dass hier das Beispiel des Ahmes und seine Zerlegung genau wiederkehren. Dagegen ist bei Ahmes  $\frac{2}{77} = \frac{1}{44} \frac{1}{308}$ , indem augenscheinlich  $\frac{2}{7} = \frac{1}{4} \frac{1}{28}$  durch 11 dividirt wurde. In der 19. Aufgabe des Rechenbuches von Achmim ist folgendermassen zerlegt:

$$77 = 7 \cdot 11, \quad 7 + 11 = 18, \quad \frac{18}{2} = 9, \quad \frac{9 \cdot 2}{9 \cdot 7 \cdot 11} = \frac{7 + 11}{9 \cdot 7 \cdot 11} = \frac{1}{99} \frac{1}{63}.$$

Hier erkennt man, dass 63 und 99 weniger weit von einander abstehen als 44 und 308, und dass deshalb jene ältere Zerlegung verlassen wurde, wenn sie vielleicht auch noch bekannt war. Eine Zerlegung nach dieser Methode mit grösserem Zähler des zu zerlegenden Bruches bietet  $\frac{4}{143}$  in der 24. Aufgabe. Hier ist:

$$143 = 11 \cdot 13, \quad 11 + 13 = 24, \quad \frac{24}{4} = 6, \quad \frac{6 \cdot 4}{6 \cdot 11 \cdot 13} = \frac{11 + 13}{6 \cdot 11 \cdot 13} = \frac{1}{78} \frac{1}{66}.$$

Wie diese Methoden combinirt werden können, zeigt beispielsweise die 18. Aufgabe an  $\frac{43}{1320}$ . Zunächst ist  $1320 = 15 \cdot 88$ , also

$$\frac{43}{1320} = \frac{15 + 28}{15 \cdot 88} = \frac{1}{88} + \frac{28}{1320}.$$

Ferner ist

$$1320 = 11 \cdot 120, \quad 12 \cdot 11 = 132, \quad 132 + 120 = 252 = 9 \cdot 28.$$

Demzufolge ist

$$\frac{28}{11 \cdot 120} = \frac{9 \cdot 28}{9 \cdot 11 \cdot 120} = \frac{11 \cdot 12 + 120}{9 \cdot 11 \cdot 120} = \frac{1}{90} \frac{1}{99}$$

und

$$\frac{43}{1320} = \frac{1}{88} \frac{1}{90} \frac{1}{99}.$$

Wir bemerken wiederholt, dass in allen von uns, nach Herrn Baillet's Vorgang, beigezogenen Beispielen, sämtliche Zwischenrechnungen dem Rechenbuche von Achmim genau entnommen sind, dass es sich also hier nicht um Vermuthungen, sondern um die wirklichen, damals benutzten Methoden handelt. Wer neuere Vermuthungen, die früher, als Herrn Baillet's Veröffentlichung bekannt wurde, entstanden sind, zu lesen wünscht, den verweisen wir auf den Aufsatz von Herrn Gino Loria: *Congetture e ricerche sull' aritmetica degli antichi Egiziani* in der Bibliotheca mathematica 1892, p. 97 — 109.

Die Aufgaben selbst sind, wie uns scheinen will, von geringerer Wichtigkeit, als dasjenige, was wir ihnen bezüglich der Stammbrüche entnommen haben. Es genüge die Bemerkung, dass mitunter Subtractionen gefordert werden, deren Vollziehung unter Hindurchgehen durch einen gemeinsamen Nenner gelehrt wird. Es genüge ferner die Mittheilung, dass

Zweisatzrechnungen vorkommen, welche durch Zinsaufgaben nothwendig gemacht sind. Der Zinsfuss ist theils procentual, theils in Stammbruchform angegeben.

In der 26. Aufgabe heisst es, von 100 erhalte man  $1\frac{2}{3}$ , wie viel von 195? Die Auflösung vervielfacht  $1\frac{2}{3}$  mit 195 zu 325 und dieses mit  $\frac{1}{100}$  zu  $3\frac{1}{4}$ .

In der 35. Aufgabe heisst es, man habe 1 von  $15\frac{1}{2}\frac{1}{4}$  zu fordern, wie viel von 100? Es findet sich  $\frac{1}{2}\frac{1}{4}$  bei der Division von 3 durch 4 und  $15\frac{1}{2}\frac{1}{4}$  bei der Division von 63 durch 4. Folglich ist 4 mit 100 zu vervielfachen und dann 400 durch 63 zu dividiren. Damit begnügt der Verfasser sich, die Division

$$\frac{400}{63} = 6\frac{1}{3}\frac{1}{63}$$

vollzieht er nicht und giebt dieses Endergebniss nicht an.

Auch einige wenige Aufgaben geometrischen Ursprunges sind vorhanden, die indessen kaum ein längeres Verweilen lohnen. Das Wichtigste über das Rechenbuch von Achmim und dessen sehr dankenswerthe Herausgabe dürfte in unserer Notiz enthalten sein.

## Recensionen.

---

**Philosophie der Arithmetik.** Psychologische und logische Untersuchungen von Dr. E. G. HUSSERL, Privatdocent der Philosophie an der Universität zu Halle. I. Band. Halle a. d. S. C. E. M. Pfeffer (Robert Stricker) 1891. IX, 323.

Der vorliegende Band gliedert sich in zwei Haupttheile, deren erster „die eigentlichen Begriffe von Vielheit, Einheit und Anzahl“ behandelt „der Hauptsache nach psychologische Fragen“, während der zweite betitelt ist: „Die symbolischen Anzahlbegriffe und die logischen Quellen der Anzahlen-Arithmetik“, worin der Verfasser „zu zeigen versucht, wie die Thatsache, dass wir fast durchgehends auf symbolische Zahlbegriffe eingeschränkt sind, den Sinn und Zweck der Anzahlen-Arithmetik bestimmt“.

Der erste Theil enthält nach einer Einleitung folgende Capitel: 1. Die Entstehung des Begriffes Vielheit vermittelt desjenigen der collectiven Verbindung. — 2. Kritische Entwicklungen. — 3. Die psychologische Natur der collectiven Verbindung. — 4. Analyse des Anzahlbegriffs nach Ursprung und Inhalt. — 5. Die Relationen Mehr und Weniger. — 6. Die Definition der Gleichzahligkeit durch den Begriff der gegenseitig-eindeutigen Zuordnung. — 7. Zahlendefinitionen durch Aequivalenz. — 8. Discussionen über Einheit und Vielheit. — 9. Der Sinn der Zahlenaussage. — Anhang: Die nominalistischen Versuche von Helmholtz und Kronecker.

W. Unverzagt sagt (in: *Der Winkel als Grundlage mathematischer Untersuchungen*; Wiesbaden 1878): „Der Begriff der Zahl ist in seinen Wandlungen vielleicht mit der interessantesten — freilich auch einer der schwierigsten“ und giebt dort eine kurze historische Schilderung dieser Wandlungen. Seine Aeusserungen beziehen sich allerdings in erster Linie auf die mathematische Entwicklung, die der Begriff der Zahl erfahren. M. Simon, dessen Lehrbuch der Arithmetik den Beifall hervorragender Mathematiker gefunden, spricht sich in seinem Programm: „Zu den Grundlagen der nicht-euklidischen Geometrie“ (Strassburg 1891) dahin aus, dass in der Arithmetik in den letzten zehn Jahren eine gewisse Uebereinstimmung sich zeige. „Mit der Kant'schen Unterordnung der Zahl unter die Zeit ist gebrochen worden. Die Zahl ist dem rein logischen Begriff der Zuordnung unterstellt.“ Diese Ansicht theilt der Verfasser des vorliegenden



S. 283; S. 296), ohne dass sie in den Berichtigungen am Schlusse des Buches verbessert sind. Eigenthümlich ist auch die Orthographie des Verfassers.

Dr. H. SCHOTTEN.

**Function und Begriff.** Vortrag, gehalten in der Sitzung vom 9. Januar 1891 der Jenaischen Gesellschaft für Medicin und Naturwissenschaft von Dr. G. FREGE, Professor an der Universität Jena. — Jena, Verlag von Hermann Poble, Grossherzogl. Hofbuchdrucker, 1891. 31 S. Preis 1,20 Mk.

Der durch seine Begriffsschrift bekannte Verfasser bietet hier in etwas populärerer Form einige Aufklärungen über diese. Nach einer genauen Definition der Function, wobei die gewissenhafte Beachtung von Form und Inhalt besonders empfohlen wird, geht Verfasser näher auf das Argument ein, das nicht äusserlich zur Function gehöre, sondern mit ihr zusammen ein vollständiges Ganzes bilde. Ferner wird der Unterschied zwischen Function und Zahl behandelt und des Näheren auf den Werthverlauf einer Function eingegangen; dabei ergiebt sich, dass der Begriffsumfang gleich dem Werthverlauf der Function ist. Diese Resultate werden dann auf Urtheile angewendet (Behauptungsgrenze). Die scharfe Begrenzung der Begriffe ist identisch mit dem bestimmten Werthe, den eine Function für jedes Argument annimmt. Zum Schluss geht der Verfasser auf die Begriffsschrift ein und lehrt die Bedeutung der eingeführten Zeichen.

Dr. H. SCHOTTEN.

**Les nouvelles bases de la géométrie supérieure** (géométrie de position) par A. MOUCHOT ancien professeur de l'université, lauréat de l'academie des sciences. Paris, Gauthier-Villars et fils 1892. 8°. VII, 179 S.

Die geometrische Darstellung des Imaginären ist bereits das Ziel sehr vieler Bestrebungen gewesen. Ueber Stellung und Werth des Problems im Zusammenhange der Mathematik kann man verschiedener Ansicht sein. Wichtig ist die Lösung desselben besonders für die Vertreter zweier Standpunkte: Für jene, welche ein algebraisches Symbol erst in dem Augenblicke für berechtigt ansehen, in welchem dessen Anwendbarkeit auf etwas Substantielles nachgewiesen ist, und für jene, welche ihrem Begriffe von Geometrie eine solche Weite gegeben haben, dass sie ein Rivalisiren derselben mit der Analysis in allen denkbaren Richtungen verlangen. Dem gegenüber kann man sich aber auch auf Standpunkte stellen, von denen aus gesehen die Lösung des Problems keinen so principiellen Werth hat, wenn sie auch immerhin als sehr interessant und nützlich zu bezeichnen ist. Der Analytiker vom reinsten Wasser leugnet, bei der *Schaffung* und dem Gebrauch des Imaginären irgend einer ausserhalb seiner

















Der Begriff der letzteren wird so gefasst, dass auch jede eingliedrige Gruppe nur eine infinitesimale Transformation enthält und gezeigt, dass auch umgekehrt jede gegebene infinitesimale Transformation

$$x'_k = x_k + \xi_k \delta t + \dots,$$

die kurz durch das Symbol

$$Uf = \sum_{k=1}^n \xi_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

bezeichnet wird, einer und nur einer eingliedrigen Gruppe mit paarweise inversen Transformationen angehöre. Die endlichen Gleichungen dieser Gruppe ergeben sich 1) durch Integration des Systems

$$\frac{dx'_k}{\xi_k(x'_1, \dots, x'_n)} = dt$$

in der Form

$$\Omega_k(x'_1, \dots, x'_n) = \Omega_k(x_1, \dots, x_n); \quad W_k(x'_1, \dots, x'_n) - t = W_k(x_1, \dots, x_n),$$

und 2) in Form von Rechenentwickelungen

$$x'_k = x_k + t Ux_k + \frac{t^2}{2} U(Ux_k) + \dots$$

Eine Function  $\Omega$  ist eine Invariante der Gruppe, wenn  $U\Omega = 0$ , also die allgemeinste Invariante eine willkürliche Function der  $(n-1)$  unabhängigen Lösungen von  $Uf=0$ ; die Gleichung  $\Omega=0$  ist invariant, wenn  $U\Omega=0$  vermöge  $\Omega=0$ .

Eine lineare partielle Differentialgleichung

$$Af = \sum_{k=1}^n \alpha_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0$$

„gestattet die Transformationen einer Gruppe“, sobald sie ihre infinitesimale Transformation zulässt, das heisst, wenn  $\omega_k (k=1, 2, \dots, n-1)$  die unabhängigen Lösungen von  $Af=0$  sind, sobald jedes  $U\omega_k$  wieder eine Lösung ist. — Gestattet  $Af=0$  die  $r$  infinitesimalen Transformationen  $U_k f$  ( $k=1, 2, \dots, r$ ), so gestattet sie auch die infinitesimale Transformation

$$Uf = \sum_{k=1}^r u_k U_k f + v Af,$$

wo die  $u_1, \dots, u_r$  Lösungen von  $Af=0$  und  $v$  eine willkürliche Function bedeutet; umgekehrt sind die Coefficienten der  $U_k f$  in jeder linearen Beziehung zwischen diesen und  $Af$  Lösungen von  $Af=0$ . Ist  $r=n-1$  und besteht zwischen den  $U_k f$  und  $Af$  keine lineare Beziehung, so ist der reciproke Werth der aus den Coefficienten von  $U_1 f, \dots, U_{n-1} f, Af$  gebildeten Determinante ein Multiplikator von  $Af=0$ ; jede Gleichung  $Af=0$  besitzt solche  $(n-1)$  infinitesimale Transformationen.

Für  $n=2$  und  $x_1=x, x_2=y$  (Punkttransformationen in der Ebene), geben die angeführten Sätze eine Integrationstheorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\alpha_1 dy - \alpha_2 dx = 0,$$

die eine bekannte infinitesimale Transformation gestatten, indem ja die Kenntniss einer solchen einen Multiplicator der Differentialgleichung liefert. Um jedoch diese Theorie für die allgemeine Form  $\Omega(x, y, y') = 0$  einer solchen Gleichung auszugestalten, wird die Gruppe in den beiden Variablen  $x, y$  durch Hinzunahme der den einzelnen Transformationen entsprechenden Transformation des durch eine beliebige Curve  $\varphi(x, y) = 0$  bestimmten Differentialquotienten  $y' = \frac{dy}{dx}$  auf eine Gruppe in den drei Variablen  $(x, y, y')$  erweitert. Ist

$$Uf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y}$$

die infinitesimale Transformation der gegebenen Gruppe, so ist

$$U'f = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'}; \quad \left( \eta' = \frac{d\eta}{dx} - y' \frac{d\xi}{dx} \right)$$

die infinitesimale Transformation der erweiterten Gruppe und wenn die Differentialgleichung erster Ordnung  $\Omega(x, y, y') = 0$ , mit dem allgemeinen Integral  $\omega(x, y) = \text{const}$ , die durch  $Uf$  bestimmte Gruppe gestattet, das heisst, wenn  $U\omega = 0$ , vermöge  $\omega = 0$ , so ist auch  $U'\Omega = 0$ , vermöge  $\Omega = 0$ , und umgekehrt. — Die allgemeinste eine gegebene infinitesimale Transformation  $Uf$  zulassende Differentialgleichung erster Ordnung wird also gegeben durch die gleich Null gesetzte allgemeinste Invariante der erweiterten Transformation  $U'f$  (Differentialvariante erster Ordnung von  $Uf$ ); eine der beiden unabhängigen Invarianten von  $U'f$  ist die Invariante  $u(x, y)$  von  $Uf$ , ist diese bekannt, so findet man die andere,  $y'$  enthaltende, und damit also alle möglichen, durch blosse Anwendung von Quadraturen. Wenn also eine infinitesimale Transformation  $Uf$  gegeben und ihre Invariante bekannt ist, so lassen sich durch Quadraturen allein alle Differentialgleichungen erster Ordnung, die diese Transformation zulassen, herstellen, und jede solche Differentialgleichung kann dann wieder durch blosse Quadraturen integriert werden.

Während jede Differentialgleichung erster Ordnung eine infinitesimale Transformation gestattet, ist dies für Differentialgleichungen höherer Ordnung nicht mehr der Fall. Die allgemeinste Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche die infinitesimale Transformation  $Uf$  oder die durch dieselbe definirte eingliedrige Gruppe gestattet, ergibt sich als die gleich Null gesetzte allgemeinste Invariante der zweimal erweiterten Gruppe, deren infinitesimale Transformation durch

$$U''f = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} + \eta'' \frac{\partial f}{\partial y''} \quad \left( \eta'' = \frac{d\eta'}{dx} - y'' \frac{d\xi}{dx} \right)$$

dargestellt wird. Diese allgemeinste Invariante von  $U''f$  (Differentialinvariante zweiter Ordnung von  $Uf$ ) ist eine willkürliche Function der Invariante  $u$  von  $Uf$ , der bei gegebenem  $u$  durch Quadraturen zu ermittelnden ersten Differentialinvariante  $v$ , und der  $y''$  enthaltenden Invariante  $w = dv : du$ . Analog findet man auch alle Differentialgleichungen höherer Ordnung, die eine infinitesimale Transformation  $Uf$  gestatten, durch blossе Quadraturen und Differentiationsprocesse, wenn die Invariante von  $Uf$  bekannt ist.

Zur Entwicklung der Integrationstheorie für Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die bekannte infinitesimale Transformationen gestatten, hat man zu beachten, dass, wenn  $y'' = w(x, y, y')$  die infinitesimale Transformation  $Uf$  zulässt, die äquivalente partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} + w(x, y, y') \frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

die erweiterte Transformation  $U'f$  zulassen müsse. Wenn aber eine partielle Differentialgleichung

$$Af = X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + Z \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

die infinitesimale Transformation  $Uf$  in den drei Variablen  $(x, y, z)$  gestattet, so bilden  $Af = 0$  und  $Uf = 0$  ein sogenanntes vollständiges System, das heisst, sie haben eine Lösung gemein, die nach Paul du Bois-Reymond durch Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung in  $x, y$  gefunden werden kann, und eine zweite Lösung ergibt sich durch eine Quadratur. Die Frage nach den Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die mehrere von einander unabhängige infinitesimale Transformationen (das heisst solche, zwischen denen keine homogene lineare Relation mit constanten Coefficienten besteht) gestatten, führt zu dem Begriff der Gruppen von infinitesimalen Transformationen.

Der Inbegriff der  $r$  infinitesimalen Transformationen  $U_1f, \dots, U_rf$ , und der von diesen linear mit constanten Coefficienten abhängenden, bildet eine  $r$ -gliedrige Gruppe infinitesimaler Transformationen, wenn auch jeder „Klammerausdruck“

$$(U_i U_k) = U_i(U_k f) - U_k(U_i f)$$

und folglich auch jeder aus irgend zwei Transformationen der Gruppe gebildeter Klammerausdruck mit zu diesem Inbegriff gehört; die Coefficienten der Relationen

$$(U_i U_k) = \sum_{s=1}^r c_{iks} U_s f$$







$$\vartheta(w_1, w_2, \dots, w_p)_a \text{ oder auch } \vartheta((w))_a$$

die gewöhnliche Thetafunction von  $p$  Veränderlichen mit den Parametern  $a_{\mu\mu'}$  verstanden wird, wenn ferner  $g_1 \dots g_p, h_1 \dots h_p$  beliebige reelle Grössen bedeuten. Diese allgemeine Thetafunctionen werden bezeichnet durch:

$$\vartheta \left[ \begin{matrix} g_1 \dots g_p \\ h_1 \dots h_p \end{matrix} \right] (w_1, \dots, w_p)_a,$$

oder auch, wo keine Verwechslung zu befürchten ist, durch:

$$\vartheta \left[ \begin{matrix} g \\ h \end{matrix} \right] ((w))_a.$$

Das Symbol

$$\left[ \begin{matrix} g_1 \dots g_p \\ h_1 \dots h_p \end{matrix} \right] \text{ oder auch } \left[ \begin{matrix} g \\ h \end{matrix} \right]$$

heisst die Charakteristik der Thetafunction.

Die Untersuchungen der Herren Verfasser beziehen sich nun auf den Fall, dass die Grössen  $g$  und  $h$  rationale Zahlen bedeuten, oder, wie man sich ausdrückt, auf die Thetafunctionen mit rationalen Charakteristiken.

Die Hauptaufgabe des ersten Theiles des genannten Werkes ist es, ein allgemeines Additionstheorem aufzustellen, und zwar auf Grund derjenigen  $n$ -fachen unendlichen Reihen, welche das Product von  $n$  Thetafunctionen mit verschiedenen Parametern darstellen. Dieses Additionstheorem lautet folgendermassen:

$$c \cdot \prod_{s=1}^n \vartheta((u^{(s)}))_{a^{(s)}} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \prod_{s=1}^n \vartheta \left[ \begin{matrix} \frac{\alpha}{\Delta} \\ \frac{\beta}{r} \end{matrix} \right]^{(s)} ((v^{(s)}))_{b^{(s)}}.$$

Hierbei sind die Grössen  $u$  und  $v$  durch die Gleichungen verknüpft:

$$r_{\mu} v_{\mu}^{(\varepsilon)} = c_{\mu}^{(1\varepsilon)} u_{\mu}^{(1)} + c_{\mu}^{(2\varepsilon)} u_{\mu}^{(2)} + \dots + c_{\mu}^{(n\varepsilon)} u_{\mu}^{(n)},$$

wobei die Grössen  $c_{\mu}^{d\varepsilon}$  ganze Zahlen,  $r_{\mu}$  positive ganze Zahlen bedeuten, die den Bedingungen unterliegen:

$$\sum_{\varrho=1}^n a_{\mu\mu'}^{(\varrho)} c_{\mu}^{(\varrho\sigma)} c_{\mu'}^{(\varrho\sigma')} = r_{\mu} r_{\mu'} b_{\mu\mu'}^{(\sigma)},$$

wenn  $\sigma' = \sigma$  ist, dagegen:

$$\sum_{\varrho=1}^n a_{\mu\mu'}^{(\varrho)} c_{\mu}^{(\varrho\sigma)} c_{\mu'}^{(\varrho\sigma')} = 0,$$

wenn  $\sigma' \neq \sigma$  ist, wenn ferner die Grössen  $\sigma, \sigma'$  die Reihe der Zahlen  $1, 2, \dots, n$ , die Grössen  $\mu, \mu'$  die Reihe der Zahlen  $1, 2, \dots, p$  durchlaufen.

Durch Umkehrung ergeben sich die Beziehungen:

$$\Delta_{\mu} u_{\mu}^{(\varepsilon)} = r_{\mu} (d_{\mu}^{(\varepsilon 1)} v_{\mu}^{(1)} + d_{\mu}^{(\varepsilon 2)} v_{\mu}^{(2)} + \dots + d_{\mu}^{(\varepsilon n)} v_{\mu}^{(n)}).$$

Die  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$  sind lineare Formen der  $\alpha, \beta$  definiert durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_\mu^{(\varepsilon)} &= r_\mu (d_\mu^{(1\varepsilon)} \alpha_\mu^{(1)} + d_\mu^{(2\varepsilon)} \alpha_\mu^{(2)} + \dots + d_\mu^{(n\varepsilon)} \alpha_\mu^{(n)}), \\ \bar{\beta}_\mu^{(\varepsilon)} &= c_\mu^{(1\varepsilon)} \beta_\mu^{(1)} + c_\mu^{(2\varepsilon)} \beta_\mu^{(2)} + \dots + c_\mu^{(n\varepsilon)} \beta_\mu^{(n)}\end{aligned}$$

und es deutet das Zeichen  $\sum_a$  an, dass für  $\nu = 1, 2, \dots, n, \mu = 1, 2, \dots, p$  nach  $\alpha_\mu^{(\nu)}$  von 0 bis  $\bar{\Delta}_\mu - 1$  ( $\bar{\Delta}_\mu$  der absolute Betrag von  $\Delta_\mu$ ) das Zeichen  $\sum_\mu$  an, dass für  $r = 1, \dots, n, \mu = 1, 2, \dots, p$  nach  $\beta_\mu^{(r)}$  von 0 bis  $r_\mu - 1$  zu summieren ist. Die Grössen  $a_{\mu\mu'}$  und  $b_{\mu\mu'}$  sind gewisse positive rationale Multipla der Grössen  $a_{\mu\mu'}$ , endlich bedeutet  $c$  eine numerische Constante, deren Werth bestimmt wird.

Neben der Herleitung dieser allgemeinen Formel enthält der erste Theil eine Reihe von Specialisirungen derselben, welche für Anwendungen besonders wichtig sind. Es möge genügen, unter ihnen eine einzige Formel herauszugreifen, die sich für den zweiten Theil von fundamentaler Bedeutung zeigt, und lautet:

$$\vartheta^n((w))_1 = \sum_{k_1 \dots k_p}^{0, 1, \dots, n-1} K_{p_1 \dots k_p} \vartheta \left[ \frac{k}{n} \right] ((nw))_n,$$

wobei die Indices 1 und  $n$  eine leicht angebbare Bedeutung besitzen und die Grössen  $K_{k_1 \dots k_p}$  Constanten sind, deren Werth auf zweierlei Wegen gefunden wird. Der zweite Weg wird erst im zweiten Theil angegeben. Die Methode, welche die Herren Verfasser bei ihren Entwicklungen anwenden, besteht, wie schon bemerkt, in einer Umformung mehrfacher Summen und zwar durch Einführung neuer Summationsbuchstaben. Hierbei kommt das Problem im Wesentlichen darauf hinaus, zwei Ausdrücke

$$\begin{aligned}A &= \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} (a_{\mu\mu'}^{(1)} x_\mu^{(1)} x_{\mu'}^{(1)} + a_{\mu\mu'}^{(2)} x_\mu^{(2)} x_{\mu'}^{(2)} + \dots + a_{\mu\mu'}^{(n)} x_\mu^{(n)} x_{\mu'}^{(n)}), \\ B &= \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} (b_{\mu\mu'}^{(1)} y_\mu^{(1)} y_{\mu'}^{(1)} + b_{\mu\mu'}^{(2)} y_\mu^{(2)} y_{\mu'}^{(2)} + \dots + b_{\mu\mu'}^{(n)} y_\mu^{(n)} y_{\mu'}^{(n)})\end{aligned}$$

durch lineare Substitutionen mit nicht verschwindender Determinante und rationalen Coefficienten in einander überzuführen.

Literaturangaben finden sich nur in beschränkter Anzahl vor. Es ist aus den Entwicklungen der Herren Verfasser nicht zu ersehen, in welchem Verhältniss die gefundenen Resultate zu den thatsächlich schon vorhandenen Resultaten anderer Autoren stehen. Es ist das bei einer Monographie, wie die vorliegende, zu bedauern.\*

\* Es möge in Bezug hierauf u. A. auf eine Arbeit des Referenten verwiesen werden, welche sich in den Berichten der Leipziger Gesellschaft der Wissenschaften vom 6. Februar d. J. findet.

Der zweite Theil enthält die Transformationstheorie. Der wesentliche und schwerwiegende Unterschied gegen die bisher aufgestellte Transformationstheorie besteht darin, dass die  $4p^2$  Transformationszahlen nicht wie bisher ganze Zahlen, sondern beliebige rationale Zahlen bedeuten können. Nennen wir dieselben:

$$a_{\nu\mu}, b_{\nu\mu}, c_{\nu\mu}, d_{\nu\mu},$$

so leisten dieselben ähnlichen Bedingungsgleichungen Genüge, wie die entsprechenden Zahlen in der gewöhnlichen Transformationstheorie, nur kann der Grad der Transformation, welcher durch  $t$  bezeichnet wird, auch eine gebrochene Zahl sein. Zur Charakterisirung der Transformation denke man sich die Zahlen  $a, b, c, d$  in ein quadratisches Schema von der Form gebracht:

$$T = \left| \begin{array}{c|c} a_{11} \dots a_{1p} & b_{11} \dots b_{1p} \\ \dots & \dots \\ a_{p1} \dots a_{pp} & b_{p1} \dots b_{pp} \\ \hline c_{11} \dots c_{1p} & d_{11} \dots d_{1p} \\ \dots & \dots \\ c_{p1} \dots c_{pp} & d_{p1} \dots d_{pp} \end{array} \right|.$$

Dieses System von  $4p^2$  Zahlen wird die Charakteristik der Transformation genannt, die wohl auch kurz folgendermassen geschrieben wird:

$$T = \left| \begin{array}{c|c} a_{\mu\nu} & b_{\mu\nu} \\ \hline c_{\mu\nu} & d_{\mu\nu} \end{array} \right|.$$

Die Herren Verfasser definiren nun das Transformationsproblem folgendermassen. Setzt man:

$$A_{\mu\nu} = a_{\nu\mu} \pi i + \sum_{k=1}^{k=p} b_{\nu k} a_{\mu k},$$

$$B_{\mu\nu} = c_{\nu\mu} \pi i + \sum_{k=1}^{k=p} d_{\nu k} a_{\mu k}, \quad \mu, \nu = 1, 2, \dots, p,$$

so können  $p$  neue Veränderliche  $v$  und  $\frac{1}{2}p(p+1)$  neue Parameter  $b$  aus  $p$  gegebenen Veränderlichen  $u$  und  $\frac{1}{2}p(p+1)$  gegebenen Parametern  $a$  durch die Gleichungen definirt werden:

$$u_{\mu} = \frac{1}{\pi i} \Sigma A_{\mu\nu} v_{\nu},$$

$$B_{\mu\varrho} = \frac{1}{\pi i} \Sigma A_{\mu\nu} b_{\nu\varrho}, \quad \mu, \varrho = 1, 2 \dots p.$$

Als Transformationsproblem für die Function  $\vartheta \left[ \begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix} \right] ((u))_a$  wird dann die Aufgabe bezeichnet, die genannte Function durch Functionen:

$$\vartheta \left[ \frac{g'}{h'} \right] ((v))_b$$

auszudrücken und zuzusehen, ob das genannte Problem für alle möglichen rationalen Transformationen wirklich lösbar ist.

Der Gang der Untersuchung ist ein ähnlicher, wie in der gewöhnlichen Transformationstheorie, indessen compliciren sich die Verhältnisse ungemein, so dass die Lösung der gestellten Aufgabe den Herren Verfassern erst nach langwierigen Untersuchungen möglich wurde. Die Schwierigkeit desselben zeigt sich auch in der Lösung. Die Resultate sind ungleich complicirter und mannigfacher, als die Resultate der gewöhnlichen Transformationstheorie.

Der Schwerpunkt der ganzen Untersuchung liegt in der Zusammensetzung und Zerlegung von Transformationen aus und in andere. Es zeigt sich, dass eine Transformation vom Grade  $\frac{n}{n'}$ , in das Product einer speciellen zur Zahl  $\frac{1}{n}$ , einer linearen und einer speciellen zur Zahl  $n$  gehörenden Transformation zerfällt werden kann. Die beiden zu den Zahlen  $\frac{1}{n}$  und  $n$  gehörenden Transformationen können auf Grund des speciellen vorhin angegebenen Additionstheoremes leicht gelöst werden, so dass das Problem auf die Lösung des Problems der linearen Transformation herauskommt. Dieses Problem wird ausführlich durchgeführt. Zunächst werden drei specielle lineare Transformationen behandelt, und zwar lautet die erste:

$$T_I = \left| \begin{array}{c|c} \frac{r d'_{\mu\nu}}{D} & 0 \\ \hline 0 & \frac{d_{\mu\nu}}{r} \end{array} \right|,$$

wobei  $r$  eine positive ganze Zahl,  $d_{\mu\nu}$  ganze Zahlen mit der Determinante  $D$  bedeuten und endlich  $d'_{\mu\nu}$  die Adjuncte von  $d_{\mu\nu}$  ist.

Die zweite Transformation lautet:

$$T_{II} = \left| \begin{array}{c|c} 1 \dots 0 & 0 \\ \dots & \\ 0 \dots 1 & \\ \hline e_{\mu\nu} & \begin{array}{c} 1 \dots 0 \\ \dots \\ 0 \dots 1 \end{array} \end{array} \right|,$$

wobei  $e_{\mu\nu}$  ganze Zahlen sind, die der Gleichung Gentüge leisten:

$$e_{\mu\nu} = e_{\nu\mu}.$$

Bei der dritten Transformation endlich, die durch  $T_{III}$  bezeichnet wird, finden die folgenden Relationen statt:

$$a_{q+1\ q+1} = a_{q+2\ q+2} \dots a_{pp} = 1, \quad b_{11} = b_{22} \dots = b_{qq} = 1, \\ c_{11} = c_{22} = \dots c_{pp} = -1, \quad d_{q+1\ q+1} = d_{q+2\ q+2} \dots = d_{pp} = 1,$$

während alle übrigen Grössen  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  den Werth Null besitzen.

Für diese drei speciellen Transformationen resp. für deren inverse wird das gestellte Problem wirklich gelöst. Es zeigt sich das Resultat, welches auch im allgemeinen linearen Falle bestehen bleibt, dass die ursprüngliche Thetafunction mit den Argumenten  $u$  und den Parametern  $a$ , von einer einfachen Exponentialfunction abgesehen, sich stets linear durch Thetafunctionen mit den Argumenten  $v$  und den Parametern  $b$  ausdrücken lässt.

Nachdem diese drei Probleme gelöst sind, wird gezeigt, dass die allgemeine lineare Transformation sich aus den vorhin definirten speciellen auf mannigfache Arten zusammensetzen lässt. Diese Zusammensetzung bietet grosse Schwierigkeiten. Um sie zu überwinden, werden vier Fälle unterschieden. Bringt man die allgemeine lineare Transformation in die Form:

$$T = \left| \begin{array}{c|c} \frac{\alpha_{\mu\nu}}{r} & \frac{\beta_{\mu\nu}}{r} \\ \hline \frac{\gamma_{\mu\nu}}{s} & \frac{\delta_{\mu\nu}}{s} \end{array} \right|,$$

so lauten die vier Fälle folgendermassen:

Fall I: Die Zahlen  $\beta$  seien sämtlich der Null gleich;

Fall II: Die Zahlen  $\beta$  seien nicht sämtlich der Null gleich, und es besitze ihre Determinante  $\Delta_\beta$  einen von Null verschiedenen Werth;

Fall III: Die Zahlen  $\beta$  seien nicht sämtlich der Null gleich, und es besitze die Unterdeterminante  $q^{\text{ten}}$  Grades  $\nabla_\beta = \Sigma \pm \beta_{11} \beta_{22} \dots \beta_{qq}$  der Determinante  $\Delta_\beta$  einen von Null verschiedenen Werth, während alle Unterdeterminanten  $q+1^{\text{ten}}$  Grades von  $\Delta_\beta$  verschwinden;

Fall IV: Die Zahlen  $\beta$  seien nicht sämtlich der Null gleich und es besitze die Unterdeterminante  $q^{\text{ten}}$  Grades

$$\nabla_\beta^{(m,n)} = \Sigma \pm \beta_{m_1 n_1} \beta_{m_2 n_2} \dots \beta_{m_q n_q}$$

der Determinante  $\Delta_\beta$  einen von Null verschiedenen Werth, während alle Unterdeterminanten  $q+1^{\text{ten}}$  Grades von  $\Delta_\beta$  verschwinden.

In allen vier Fällen wird das Problem gelöst und je eine Zusammensetzung gewählt, welche die Herren Verfasser für die einfachste halten. Die Zusammenfassung der entsprechenden vier Formeln in eine einzige Hauptformel und die Specialisirung dieser letzteren für den Fall ganz-

zahliger Transformationszahlen bilden den Schluss der Betrachtungen, die sich auf die lineare Transformation beziehen.

Aus den vorangehenden Bemerkungen ist ersichtlich, dass das Werk der Herren H. Prym und Krazer im zweiten Theile eine Reihe neuer Gesichtspunkte für die Transformationstheorie bringt, welche geeignet sind, als Ausgangspunkt für neue Untersuchungen zu dienen. M. KRAUSE.

**Die Elemente der Zahlentheorie**, dargestellt von P. BACHMANN. Leipzig 1892. B. G. Teubner.

Der Verfasser beabsichtigt, wie er in der Vorrede erklärt, „eine Gesamtdarstellung des heutigen Standes der Zahlentheorie zu versuchen“, und zwar nicht in Gestalt eines erschöpfenden Lehrbuches, sondern in einer Reihe von Einzeldarstellungen, welche die Hauptgebiete der Zahlentheorie in ihren wesentlichen Zügen zu zeichnen bestimmt sind.

Die vorliegende Schrift ist als Grundlage des Ganzen anzusehen; sie beschränkt sich auf die „Elemente“ der Theorie, und behandelt demgemäss — abgesehen von einer Einleitung über die erforderlichen Rechnungsoperationen — in vier Abschnitten die Theilbarkeit der Zahlen, die Congruenzen, die quadratischen Reste und die quadratischen Formen. Der Verfasser hat sich bemüht, eine eigenartige Begründung der Elemente zu geben, und er bezeichnet sein Werk in diesem Sinne (wie auch in der Anlage des Ganzen) als eine Ergänzung zu dem vortrefflichen Dirichlet-Dedekind'schen Werke.

Der Referent ist in der That der Ansicht, dass diese „Ergänzung“ als eine willkommene zu begrüßen ist. Während Dedekind (etc. soweit es sich um die Elemente handelt) den Standpunkt der Dirichlet'schen Vorlesungen festhält, finden wir hier nicht nur spätere Dirichlet'sche Abhandlungen herangezogen, sondern auch neuere Beweise und Anschauungen von Kronecker, Dedekind, Schering u. A. verarbeitet. Ueberdies weicht der Verfasser in manchen wesentlichen Punkten von den üblichen Darstellungen ab, indem er principiell fremdartige Hilfsmittel, wie Transformation und Kettenbrüche, verschmäh't, und statt dessen einen rein arithmetischen Gang einschlägt.

Die Einführung der eben erwähnten neueren Anschauungen hat dem Verfasser Anlass gegeben, eine Reihe fundamentaler und weitreichender Begriffe, wie diejenigen einer Restklasse als Rechenelementes, einer (endlichen) Gruppe, eines Moduls, jeweils gleich im Beginne in voller Allgemeinheit zu Grunde zu legen.

Wenn nun auch keineswegs zu verkennen ist, dass dadurch die ganze Lehre etwas Durchgeistigtes annimmt, und der Leser von vornherein den Eindruck erhält, dass die moderne Zahlentheorie nicht mehr die isolirte Wissenschaft von früher ist, sondern von denselben Grundgedanken be-























Zweite, sehr veränderte Auflage. Freiburg i. B. 1892. Herder'sche Verlagshandlung. 120 S. Preis 80 Pf.

Durch die vollständige Umarbeitung dieses Leitfadens der Physik ist der Verfasser von der sich früher gestellten Aufgabe insofern nicht abgewichen, als er den Unterricht an der Hand der tagtäglichen Naturbeobachtung und des leichten Versuches aufbaut, ohne die Grenzen des Fassungsvermögens der Kinder in der Volksschule zu überschreiten. Was demnach über den Anschauungsunterricht hinausgeht, wird sorgfältig vermieden. — Die Erfahrung hat wohl den Verfasser veranlasst, die in der ersten Auflage vorhandene und für den Lehrer übersichtlichere Anordnung des Stoffes aufzugeben und nunmehr die genetische Behandlung zu Grunde zu legen; denn es ist für ein Kind leichter, von Beobachtungen und Versuchen auszugehen und daraus ein Gesetz abzuleiten, als ein an die Spitze gestelltes Gesetz aus Beobachtungen und Versuchen als richtig zu erweisen. Am Schluss der einzelnen Capitel sind als neu passende Fragen und Aufgaben hinzugefügt, die durch kleineren Druck äusserlich erkennbar sind. — Die Eintheilung des Stoffes in Paragraphen hätte besser für die Behandlungsweise in der ersten Auflage gepasst, wo sie indessen fehlt, wäre aber am Besten ganz unterblieben, da nach unserer Erfahrung solche Paragraphen schon die wunderlichsten Anschauungen in den Kinderköpfen zu Tage gefördert haben. — Bezüglich des gediegenen Inhalts können wir auf das bei der Recension der ersten Auflage Gesagte verweisen.

B. NEBEL.

---





# Historisch-literarische Abtheilung.

---

## Notizen zur Geschichte der Physik.

Von

G. BERTHOLD.

---

### I. Die beiden Nelli.

Gio. Batista Clemente de' Nelli, so nennt sich auf dem Titel der Verfasser der *Vita e commercio letterario di Galileo Galilei*, Losanna 1793, der nach Poggendorff (II, 267) von 1661 bis 1725 lebte. Auffallend erscheint, dass die im Jahre 1793 gedruckte *Vita* von dem bereits 1725 verstorbenen Nelli verfasst sein soll; vollends räthselhaft wird aber die Sache, wenn man die Biographien Galilei's durchblättert. Da wird denn, nach dem Vorgange Targioni-Tozzetti's, zunächst die bekannte Anekdote erzählt, wie „Nelli“ (so ohne Zusatz bei Tozzetti), oder der „Senator Nelli“, oder der „Ritter Johann Baptist Nelli“ im Jahre 1739 in den Besitz der von Viviani in einer Korngrube verborgenen Manuskripte Galilei's gelangte\*. Weiter heisst es dann, Nelli habe 1750 auch die Manuskripte Viviani's und anderer Gelehrten erworben. Schliesslich wird berichtet, Nelli habe, auf diese Documente gestützt, die Biographie Galilei's verfasst, welche 1793 gedruckt wurde; er habe noch einen weiteren Band hinzufügen wollen, sei aber durch den Tod daran verhindert worden. Wie reimt sich das? — Gehen wir zunächst den Quellen nach. Poggendorff beruft sich für seine Angabe auf die *Biographie universelle*; Letztere bezeichnet\*\* in der That als Verfasser einer *Vie de Galilée*, die aber zur Zeit des Druckes des Artikels (1822) noch nicht erschienen sei, den Architekten Jean-Baptiste Nelli (1661 — 1725), dem, als angeblichem Verfasser der *Vita*, Poggendorff nunmehr, entsprechend der Titelangabe des inzwischen längst erschienenen Werkes, den weiteren Vornamen Clemente beifügte. Aus einer neueren Ausgabe der *Biographie universelle* führt Herr Gerland einen Baptiste-Clement Nelli, um die Mitte des vorigen Jahr-

---

\* Clemente Nelli erwähnt dieser Acquisition v. J. 1739 mit keinem Worte, er sagt nur, er habe 1750 und 1754 viele Manuscripte Galilei's erworben; sein Stillschweigen spricht aber für die Richtigkeit der Erzählung Targioni-Tozzetti's, dem Clemente in anderen Punkten scharf entgegentritt.

\*\* *Biographie universelle*. Paris, Michaud 1822. T. XXXI, p. 43.

hundreds, in's Feld, bezweifelt aber, dass einer dieser Nelli der echte Clemente sei, und beruhigt sich mit der Vermuthung, dass der wahre Verfasser der Vita wohl ein jüngerer Spröss derselben Familie gewesen sei.

Des Räthsels einfache Lösung ist die, dass es sich hier um Vater und Sohn handelt. Den beiden Nelli sind ausführliche Artikel in Tipaldo's Biografia gewidmet\*; allein ein eigenthümliches Verhängniss hat auch hier gewaltet. Von Giambattista Clemente de' Nelli, als dessen Vater der 1725 verstorbene Architekt Giambattista de' Nelli bezeichnet wird, heisst es, er sei 1735 geboren und 1793 im Alter von 68 Jahren gestorben. Wenn sich auch das Geburtsjahr (1735) sofort als Druckfehler erweist, so führt die weitere Bemerkung, Clemente habe von seinem Vater die sorgfältigste Erziehung genossen, indem er ihn auf die Universität zu Pisa und zu Bologna geschickt habe, zu unlösbaren Widersprüchen.

Clemente Nelli selbst ist es, der uns zur Lösung des Räthsels verhilft. Zunächst berichtet er\*\*, dass Gio. Batista de' Nelli — „mio padre“ — 1693 von Viviani beauftragt worden sei, den Entwurf zu einer neuen Ausschmückung der Façade seines, dem Andenken Galilei's geweihten Hauses in Florenz anzufertigen und die Ausführung zu leiten; sodann macht er die Angabe\*\*\*, derselbe sei 1725 gestorben, wobei er ihn ausdrücklich als „il mio genitore“ bezeichnet. Wir erfahren dabei zugleich, dass er, Clemente selbst, im Jahre 1737 noch unter Vormundschaft gestanden habe. Ein Brief Clemente's†, dd. 10. Gennaio 1793, beweist uns, dass Clemente zu Anfang des Jahres 1793 noch am Leben war.

Wir stellen nunmehr fest:

1. Giambattista de' Nelli, di Agostino, Architekt und Senator zu Florenz, geb. 1661, gest. 7. Sept. 1725. Verfasser der Discorsi di Architettura. Firenze 1753, posthum, von seinem Sohne Clemente edirt;

dessen Sohn:

2. Giambattista Clemente de' Nelli, di Giambattista, Senator zu Florenz, geb. 17...?, gest. 23. Dec. 1793. Verfasser des Saggio di Storia letteraria fiorentina. Lucca 1759, und der Vita e commercio letterario di Galileo Galilei. Losanna 1793.

Mag immerhin Venturi das letztere Werk als ein „libro compilato come a Dio piacque“ bezeichnet haben, so hat sich Clemente Nelli

---

\* E. de Tipaldo, Biografia degli Italiani illustri etc. Venezia 1836. Vol. III. p. 143 — 146.

\*\* Vita e commercio letterario di Galileo Galilei etc. Losanna 1793. 4<sup>o</sup>. Vol. I. p. 671.

\*\*\* l. c. p. 875.

† l. c. p. 742.

durch die Herausgabe des Werkes, vorzüglich aber durch die sorgfältige Sammlung und Conservirung der Manuscripte Galilei's ein bleibendes Verdienst um die Wissenschaft erworben.

## II. Der Anspruch der Engländer auf die Erfindung der Pendeluhr.

Seit Herr F. Günther die Notiz von Littrow wieder an's Licht gezogen hat, der zufolge die Engländer die Ehre der Erfindung der Pendeluhr ihrem Landsmann Richard Harris vindiciren, „der schon im Jahre 1641 eine Uhr mit einem langen Pendel verfertigt haben soll“\*, ist fast ein Vierteljahrhundert vergangen, ohne dass die Sache zum Austrag gebracht werden konnte, da es bisher nicht gelang, die Quelle ausfindig zu machen, aus der Littrow geschöpft hat.

Als Urquelle ergiebt sich nun eine Mittheilung in der Edinburger Encyclopädie vom Jahre 1830, wo es heisst\*\*: Of late, another candidate for the application of the pendulum to a clock has been brought forward by such respectable authority, that leaves little or no room to doubt of its authenticity. Mr. Grignion informs us „that a clock was made in 1642, by Richard Harris of London, for the church of St. Paul's, Covent Garden, and that this clock had a pendulum to it“.

Trotz des „had“ und trotz der Autorität des Mr. Grignion unterliegt es nicht dem mindesten Zweifel, dass die alte Uhr von 1642, wie so manche andere, erst später mit einem Pendel versehen ist.

## III. Kepler, Huygens und das Perpetuum mobile.

Unter den schwindelhaften Erfindungen, mit denen Cornelis Drebbel Kaiser, Könige und Fürsten in seinem Zauberbann zu locken verstand, figurirte natürlich das Perpetuum mobile in erster Reihe. Noch während seines ersten Aufenthaltes in England bei Jacob I. liess Kaiser Rudolph II. im Jahre 1607 an ihn die schmeichelhafte Aufforderung ergehen, an seinen Hof nach Prag zu kommen. An demselben Tage, an welchem Kepler von dieser Einladung gehört hatte, machte er dem Fürsten August von Anhalt hiervon Mittheilung, da dieser kurz vorher Kepler's Urtheil über Drebbel's Erfindungen erbeten und angefragt hatte, ob von denselben sich etwa ein Vortheil bei der Construction gewisser hydraulischer Maschinen beim Bergwerksbetriebe erwarten liesse, über welche Fürst August bereits längere Zeit mit Kepler verhandelt hatte. Kepler schickt ein ausführliches Gutachten über die eingesandten Pläne und

\* Gehler, Physikalisches Wörterbuch. Leipzig 1839. Bd. IX, S. 1115.

\*\* The Edinburgh Encyclopaedia conducted by Brewster. Edinburgh 1830. 4<sup>o</sup>. Vol. XI, p. 117.

Modelle, giebt dabei ein kurzes Exposé über den Sinn einer Maschine, und knüpft daran ein höchst abfälliges Urtheil über Drebbel's angebliche Erfindung. „Jam si Drublerus [Drebbelius] spiritus, unum vel decem, poterit conducere, qui nullius cibi et potus indigi aquam montis exhauriant; vel si creare poterit animam novam, quae instrumenta ejus sine ponderibus aliosque motus elementares moveat, et in motu conservet: tunc mihi erit magnus Apollo. Nollem autem hac de re vel duorum tantum florenorum cum aliquo facere sponsionem“.\*

In gleichem Sinne äussert sich 50 Jahre später Chr. Huygens über J. J. Becher's angebliches Perpetuum mobile. „Avant hier“, schreibt er in einem Briefe an Boulliau vom 22. Januar 1660\*\*, „il me vint veoir un Allemand nomme Joannes Joachimus Becherus qui se vante d'avoir construit un perpetuum mobile a Mayence au depens de l'electeur, qui auroit desia alle 6 mois durant. solis principiis mechanicis. Je n'en croy rien.“

Ausführlicher streift Huygens die Sache im Horologium oscillatorium vom Jahre 1673. Nachdem er im vierten Theile desselben als erste Hypothese den Satz aufgestellt hat: Wenn beliebige Gewichte, kraft ihrer Schwere, sich zu bewegen beginnen, könne ihr gemeinschaftlicher Schwerpunkt nicht höher steigen, als bis dahin, wo sich Letzterer bei Beginn der Bewegung befand; und nachdem er alsdann bemerkt hat, dass diese Hypothese nichts Anderes besage, als was Niemand jemals bestritten habe, nämlich, dass schwere Körper sich nicht nach oben erheben, setzt er hinzu: „In der That, wenn die Erfinder neuer Maschinen, welche vergebens ein Perpetuum mobile zu construiren versuchen, von eben dieser Hypothese Gebrauch zu machen verständen, so würden sie ihre Irrthümer leicht selbst erkennen, und einsehen, dass die Sache auf mechanischem Wege (mechanica ratione) unmöglich sei“\*\*\*

An diesem Ausdruck nimmt Herr Mach Anstoss, indem er schreibt†: „Eine jesuitische reservatio mentalis ist vielleicht in den Worten „mechanica ratione“ angedeutet. Man könnte hiernach glauben, dass Huygens ein nicht mechanisches perpetuum mobile für möglich hält.“ Nun, Huygens ist die Antwort auf diese Frage nicht schuldig geblieben,

\* M. G. Hanschius, Joannis Keppleri aliorumque epistolae mutuae. Lipsiae 1718. Fol. p. 394.

\*\* C. Henry, Huygens et Roberval. Documents nouveaux. Leyde 1879. 4<sup>o</sup>. p. 28; dieser bisher unbekannte Brief Huygens', welcher obige Randbemerkung enthält, beweist, dass Huygens nicht, wie bisher angenommen wurde, gleichzeitig zwei verschiedene Zeichnungen von Galilei's Pendeluhr erhielt, sondern anfangs nur die erste; er äussert den lebhaften Wunsch, auch die andere Zeichnung zu sehen, welche ihm Boulliau versprochen habe.

\*\*\* Horologium oscillatorium. Paris 1673. Fol. p. 93.

† Die Geschichte und die Wurzel des Satzes von der Erhaltung der Arbeit. 1872. S. 10.



sondern hat sich in unzweideutiger Weise darüber ausgesprochen. In einem Briefe an Leibniz erwähnt er, man habe für Uhren ein Perpetuum mobile gesucht, und fährt dann fort: „Celui pour qui est cette information ne doit pas entendre les principes de l'art, s'il s' imagine de pouvoir effectuer un tel mouvement mechanic, car pour physico-mechanice il semble toujours qu'il y ait quelque espérance, comme en employant la pierre d'aimant.“ \*

Wenn Huygens streng zwischen einem Perpetuum mobile mechanica ratione, welches er für unmöglich erklärt, und einem solchen physico-mechanice unterscheidet, welches er nicht ohne Weiteres für unmöglich hält, so entspricht dies genau der Stellung, welche die Wissenschaft in jenen Tagen erreicht hatte; um ein Perpetuum mobile in jeder Form als etwas Widersinniges abzuweisen, dazu hätte es der vollen Kenntniss des Principes der Erhaltung der Energie bedurft, zu dem Huygens eben erst den Grundstein gelegt hatte.

---

\* P. J. Uylenbroek, Christiani Hugonii Exercitationes mathematicae et philosophicae. Hagae Comitum 1832. 4<sup>o</sup>. T. I, p. 146.

## Nachtrag

zu

meiner Uebersetzung des Mathematiker-Verzeichnisses im Fihrist des  
Ibn Abî Ja'kûb an-Nadîm.

---

(Zeitschr. Math. Phys. XXXVII Supplementheft od. Abhdlgn. z. Gesch. d. Math. VI.)

---

Ich übersetzte S. 18 im Artikel „Archimedes“: „Ein Buch über die Wasseruhren, welche Schleudersteine werfen.“ Erst nach der Herausgabe meiner Arbeit wurde ich durch den Aufsatz A. Wittstein's „Historisch-astronomische Fragmente aus der orientalischen Literatur (in demselben Heft VI der Abhandlungen) auf eine Abhandlung Carra de Vaux's im Journal asiatique, VIII. Série Bd. XVII. 1891 aufmerksam gemacht, in welcher ein Manuscript der Nationalbibliothek in Paris besprochen wird, das unter Anderem eine Abhandlung über die Wasseruhren enthält, die von Archimedes herrühren soll, der arabische Uebersetzer ist nicht genannt. Herr Carra de Vaux bemerkt auch, dass der Târîch al-Hukamâ des Ibn al-Kuţţî unter den Werken des Archimedes eine Abhandlung über die Wasseruhren anführe, die denselben Titel trägt, wie diejenige im Fihrist (aus dem eben zum grössten Theile Ibn al-Kuţţî geschöpft hat), die aber Herr Carra de Vaux nicht gekannt zu haben scheint. Aus dieser Abhandlung ergiebt sich nun, dass statt „Schleudersteine\* werfen“ zu übersetzen ist: „Kugeln werfen oder fallen lassen“; die betreffende Stelle lautet nach der Uebersetzung Carra de Vaux's: „Toutes les heures un trou du plateau supérieur vient en coïncidence avec le trou unique du plateau inférieur; une balle tombe; elle est amenée dans la tête de corbeau placée à l'extérieur de la caisse, dont le bec s'ouvre par un système de bascule et semble la cracher. On obtient une sonnerie en plaçant sous la tête de corbeau une cymbale de cuivre ou de chalybs retentissante que la balle vient frapper dans sa chute.“

Man vergleiche hiermit folgende Stellen:

Vitruvii de architectura, liber IX. cap. IX (VIII), welches über die Wasseruhren handelt: „Item aliae regulae aliaque tympana ad eundem

---

\* So übersetzte ich بناءتي nach den Wörterbüchern.

modum dentata una motione coacta versando faciunt effectus varietatesque motionum, in quibus moventur sigilla, vertuntur metae, calculi aut ova proiciuntur, bucinæ canunt, reliquaque parerga.

Einhardi annales Francorum, annus 807, wo er über die Geschenke berichtet, die Karl der Grosse von dem Perserkönig (d. h. v. Hārūn ar-Raschid) erhalten habe, und speciell die berühmte Uhr mit folgenden Worten beschreibt: „necnon et horologium ex auricalco, arte mechanica mirifice compositum, in quo duodecim horarum cursus ad clepsydrum vertebatur, cum totidem aereis pilulis, quæ ad completionem horarum decidebant, et casu suo subjectum sibi cymbalum tinnire faciebant, additis in eodem ejusdem numeri equitibus, qui per duodecim fenestras completis horis exiebant, et impulsu egressionis suæ totidem fenestras, quæ prius erant apertæ, claudebant etc.“

Andere Stellen über diesen Gegenstand liessen sich wohl auch noch in griechischen Autoren\*, deren mir gegenwärtig keine vorliegen, nachweisen; sie zeigen zur Genüge, dass den Alten schon solche Wasseruhren, „welche Kugeln werfen“, bekannt waren; hieraus und aus der Thatsache sodann, dass die Araber dieselben schon unter Hārūn, also in der ersten Zeit ihrer culturiellen Entwicklung, kannten, folgt wohl mit grösster Wahrscheinlichkeit, dass die Araber nicht Erfinder dieser Uhren waren, sondern ihre Kenntniss derselben von den Griechen her erhalten hatten. Es ist daher die Ansicht Carra de Vaux's, dass die Zuweisung dieser Schrift an Archimedes wohl weiter nichts als die „abgedroschene List“ (ruse banale) eines Autors gewesen sei, der gern gelesen sein wollte, kaum zu unterstützen, sondern es gewinnt im Gegentheil die Richtigkeit der Angabe des Ibn Abi Ja'kūb an-Nadīm von einer griechischen Schrift über solche Uhren grosse Wahrscheinlichkeit; ob dieselbe nun von Archimedes herstamme, ist eine andere Frage, die hier nicht weiter erörtert werden soll.

---

\* Vitruvius verweist in jenem und dem vorhergehenden Capitel auf Ktesibios, Aristarchos von Samos, Eudoxos, Apollonios, Skopinas von Syrakus (?) u. A.

Zürich, im März 1893.

HEINRICH SUTER.

## Recensionen.

---

### **Ueber elektrische Kraftübertragung, insbesondere über Drehstrom.**

Ein gemeinverständlicher Experimentalvortrag von F. BRAUN.  
Tübingen 1892. Verlag der H. Laupp'schen Buchhandlung. 38 S.  
Preis 1 Mk.

Die mit so grossem Erfolg durchgeführte elektrische Kraftübertragung von Lauffen am Neckar nach Frankfurt a. M., anlässlich der in letzterem Orte stattgefundenen internationalen elektrotechnischen Ausstellung, hat das Interesse des gebildeten Publikums so sehr in Anspruch genommen, dass von ihm aus auch eine weitere Belehrung über die einzelnen Vorgänge vielfach verlangt wurde. Verfasser hat deshalb seinen mit grossem Beifall aufgenommenen Experimentalvortrag dem Druck übergeben, damit auch ein grösseres Publikum sich daraus unterrichte. Das Lesen wird sehr erleichtert, indem der Verfasser bei der Behandlung weit ausholt und dabei einen Theil der neueren Elektrizitätslehre berücksichtigt. Auch die in den Text eingedruckten Abbildungen tragen wesentlich zum Verständniss des Vorgetragenen bei, so dass sicherlich Jedermann einen Begriff davon erhält, von welcher enormen Wichtigkeit diese Kraftübertragung nicht nur für die Elektrotechnik im Besonderen, sondern auch für die Technik im Allgemeinen ist.

B. NEBEL.

**Aufgaben aus der Physik**, nebst einem Anhang, physikalische Tabellen enthaltend. Zum Gebrauche für Lehrer und Schüler in höheren Unterrichtsanstalten und besonders beim Selbstunterricht. Von C. FLIEDNER. 7. verbesserte und vermehrte Auflage, bearbeitet von G. KREBS. Mit 74 in den Text eingedruckten Holzstichen. Braunschweig 1891. Druck und Verlag von Friedrich Vieweg & Sohn. 134 S. und Anhang 33 S. Preis 2 Mk. 40 Pf.

Auflösungen zu den Aufgaben aus der Physik (vergl. Vorstehendes).

Mit 122 in den Text eingedruckten Holzstichen. 197 S. Preis 3 Mk. 60 Pf.

Die Fliedner'sche Aufgabensammlung ist eine von den wenigen Aufgabensammlungen, welche in der Physik allgemein als gut anerkannt werden und sich deshalb einer grossen Verbreitung erfreuen. Nachdem Fliedner gestorben war, hat Krebs die Herausgabe der neuen Auflage übernommen und dabei die Fortschritte, namentlich auf dem Gebiet von



**A treatise on the mathematical theory of elasticity.** By A. E. H. LOVE.  
Volume I. Cambridge: At the University press. 1892.

Das Werk, welches sein Entstehen einer Anregung von Mr. Webb verdankt, zeigt dieselbe Eintheilung, wie sie zuerst von Clebsch aufgestellt wurde. Der vorliegende erste Band beschäftigt sich ausschliesslich mit der allgemeinen Theorie der Elasticität solcher Körper, die allseitig endliche Dimensionen haben, und somit exacte Lösungen zulassen. Die anderen Fälle sollen in einem zweiten Bande zusammengefasst werden. Gleichsam als Einleitung wird eine kurze historische Skizze über den Ursprung und die Entwicklung der Elasticitätstheorie gegeben, die aber keinen Anspruch auf Vollständigkeit machen soll, da ein solches Geschichtswerk schon von Todhunter her existirt, sondern nur den Zweck hat, das Verständniss zu erleichtern und das Interesse für die Theorie zu wecken. Das eigentliche Ziel ist, den heutigen Stand der Elasticitätstheorie im Zusammenhang darzustellen und den Weg zu zeigen, auf welchem man soweit gekommen ist, dabei werden sowohl die rein analytischen Entwicklungen, als auch die speciell technischen Einzelheiten ganz übergangen. Bei den einzelnen Capiteln bedient sich der Verfasser der Methoden und Theorien, wie sie von den bedeutendsten Forschern auf den Specialgebieten fruchtbringend verwendet wurden, und verarbeitet sie derart, dass sie ein Ganzes bilden. Die Beispiele, von denen nur die Endresultate mitgetheilt sind, wurden so ausgewählt, dass sie mit den im Text vgetragenen Methoden zu lösen sind. Auf den Inhalt der einzelnen Capitel näher einzugehen, würde hier zu weit führen. — Durch reinen und exacten Druck zeichnet sich das Buch schon in seinem Aeusseren vortheilhaft aus.

B. NEBEL.

**Elementary Thermodynamics.** By J. PARKER. Cambridge: At the University press. 1891.

Das Wort „Elementary“ im Titel soll nur andeuten, dass auf die Details der Elektrizität und des Magnetismus in diesem Buche nicht eingegangen wird. — Das erste Capitel, welches der Erhaltung der Energie gewidmet ist, beginnt mit der Zusammenstellung der Maasseinheiten, und zwar mit dem Metermaass, dessen Beziehung mit dem englischen Maass unmittelbar darauf folgt. Es muss als ein grosser Fortschritt bezeichnet werden, dass der Verfasser erklärt, dass er in diesem Buche nur das Centimeter-Gramm-Secunden-System (C.-G.-S.-System) benützen werde, also dasjenige Maass-System, das auf dem Pariser Congress zur allgemeinen Annahme vorgeschlagen, von den Engländern bis jetzt aber nicht angenommen wurde. Zu wünschen wäre nur, dass noch mehr englische Autoren diesem rühmlichen Beispiel folgen würden, dann würde die englische Jugend, wenigstens in den wissenschaftlichen Kreisen, sich sehr



bei einer neuen Auflage gemacht, damit der gediegene Inhalt des Buches auch ein entsprechendes Aeussere zeige.

B. NEBEL.

**Die Tabellen der Uhrmacherkunst**, nebst einer Sammlung mathematischer Hilfstafeln für Uhrmacher. Herausgegeben von GELCICH und DIETZSCHOLD. Wien, Pest, Leipzig 1892. Verlag von A. Hartleben. 231 S. Preis 8 Mk.

Je mehr sich die rechnerische Methode in der Uhrmacherkunst gegenüber der graphischen verbreitet, um so mehr stellte sich das Bedürfniss heraus, die Rechnungen durch geeignete Tabellen zu unterstützen. Im Laufe der Zeit sind diese Tabellen der Zahl nach bedeutend gewachsen, ohne in einem einzigen Werke vereinigt zu sein. Die Herausgeber haben sich deshalb der dankenswerthen Mühe unterzogen, diese Tabellen zu sammeln, durch entsprechende mathematische Tabellen zu erweitern, so dass der ganze mathematische Apparat, wie er für die Uhrmacherkunst erforderlich ist, in einem Bande zusammengestellt ist. Auch dem commerciellen Bedürfnisse der Uhrmacher wird durch die Aufnahme der ausführlichen Zinseszinstabellen Rechnung getragen. Nicht allein in Uhrmacherkreisen, sondern hauptsächlich in den Uhrmacherschulen und in den Gewerbeschulen wird dieses auch in seiner Ausstattung vorzügliche Werk grossen Anklang finden.

B. NEBEL.

**Beiträge zur theoretischen und rechnerischen Behandlung der Ausgleichung periodischer Schraubenfehler.** Von Dr. J. DOMKE. Berlin 1892. Verlag von Julius Springer. 46 S. Preis 2 Mk.

Die vorliegenden Studienergebnisse stützen sich auf die Bessel'sche Methode der Bestimmung der Schraubenfehler. Statt alle die einzelnen Fehler für sich zu bestimmen, so kann man die Schraubenfehler, da sie in allen Theilen einen durchaus stetigen Verlauf zeigen, als Functionen der Ablesung darstellen, und zwar die fortschreitenden Fehler durch eine Potenzreihe, die periodischen durch eine trigonometrische Reihe. Nun lassen sich die Gesetze der Fehler schon aus relativ wenigen Messungen bestimmen, man hat nur nach der Methode der kleinsten Quadrate die Werthe für die Constanten zu ermitteln. Verfasser giebt in seiner Arbeit zwei Darstellungsmethoden an, welche unter Berücksichtigung einer zweiten Näherung, wie sie namentlich bei älteren Instrumenten nöthig ist, zu Ergebnissen führen, die für alle Fälle der Praxis vollkommen genügen werden.

B. NEBEL.

**Die Strahlenbrechung auf der Sonne**, ein geometrischer Beitrag zur Sonnenphysik von AUGUST SCHMIDT. Mit Figuren im Text. Stuttgart 1891. Verlag von J. B. Metzler. 32 S.





**Ueber die wichtigsten internationalen Maass-Einheiten.** Von CARL AUGUST PORGES. Sonderabdruck aus den „Mittheilungen über Gegenstände des Artillerie- und Genie-Wesens“. Wien 1892. Verlag des Techn. und Administr.-Militär-Comité's. 72 S.

Verfasser glaubt, den vorhandenen, wirklich guten Schriften über die absoluten Maass-Einheiten noch eine weitere Schrift beifügen zu sollen. Nach unserem Dafürhalten wäre dies nicht nöthig gewesen. Besser hätten die Worte „Mega“ und „Mikro“ an solchen Einheiten erläutert werden sollen, die gewöhnlich auch in der Praxis vorkommen. Wann spricht man z. B. von Mikrodynen?

B. NEBEL.

**Die Gravitation.** Eine elementare Erklärung der hauptsächlichsten Störungen im Sonnensystem. Von Sir GEORGE BIDDELL AIRY, übersetzt von RUDOLF HOFFMANN. Mit 50 Textfiguren. Leipzig 1891. Verlag von Wilhelm Engelmann. 176 S. Preis 3 Mk.

Das Original dieser inhaltreichen und geistvollen Schrift des grossen englischen Astronomen erschien im Jahre 1834 und erfuhr im Jahre 1839 eine deutsche Uebersetzung. Nachdem beides im Buchhandel vergriffen war, wurde im Jahre 1884 eine neue englische Ausgabe veröffentlicht, deren Uebersetzung nunmehr dem deutschen Publikum dargeboten wird. Airy hat es in meisterhafter Weise verstanden, dem grösseren Publikum ohne jede Rechnung eine Einsicht in die zum Theil verwickelten Bewegungen der Planeten und ihrer Monde zu verschaffen, soweit dieselben dem Newton'schen Gravitationsgesetze unterworfen sind. Je mehr sich Airy mit der Zubereitung des Stoffes für dieses Buch beschäftigte, um so mehr fand er zu seinem eigenen Erstaunen, dass diese Schrift auch für einen Kreis von Studirenden nützlich ist, die ansehnliche mathematische Kenntnisse besitzen und gewöhnt sind, sie zur Erklärung schwerer physikalischer Aufgaben zu verwenden. Dieser Gesichtspunkt ist dann für ihn bei dem Druck massgebend geworden. Airy's Bestreben ist, durch Mittheilung von Resultaten in leichtverständlicher Fassung zu weiterer Forschung anzuregen, namentlich fasst er die Mathematiker in's Auge, damit sie durch Anwendung höherer Rechnungsarten die Resultate vervollständigen, die für das Begreifen des Weltsystems von Wichtigkeit sind. Airy versteht anzuregen und Interesse für die Astronomie zu erwecken, was für den Fortschritt der Wissenschaft von grosser Wichtigkeit ist. Auch das deutsche Publikum wird dem Uebersetzer Dank wissen, dass er ihm dieses Buch wieder zugänglich gemacht hat, da bei uns zur Zeit das Bestreben ist, nicht nur die Wissenschaft zu fördern, sondern das Errungene der Allgemeinheit zugänglich zu machen.

B. NEBEL.

**Die Einheit der Naturkräfte.** Ein Beitrag zur Naturphilosophie. Von P. ANGELO SECCHI. Autorisirte Uebersetzung von RUD. SCHULZE.



mark und des dabei verwendeten Instrumentes. Von VINCENZ POLLACK. Sonderabdruck aus: „Centralblatt für das gesammte Forstwesen“ 1891. Wien 1891. Verlag von R. Lechner's Hof- und Universitäts-Buchhandlung (Wilh. Müller). 15 S.

Im Grossen und Ganzen ist dieser Aufsatz eine Wiedergabe des Vortrages, welchen der Verfasser unter dem Titel: „Ueber photographische Messkunst“ auch dem Druck übergeben hat, und welcher unlängst in diesen Blättern besprochen wurde. Gegen den Schluss tritt insofern eine grössere Abweichung ein, als der Verfasser sich eingehender den Terrainaufnahmen am Arlberg und am Fusse der Reichensteingruppe beschäftigt, wo es sich hauptsächlich um Studien für den Lawinenverband handelt. Verfasser ist stets bestrebt, der Photogrammetrie mehr und mehr Eingang zu verschaffen, und wendet sich daher an Oesterreichs Forstleute, dass sie die Photogrammetrie praktisch verwerthen möchten.

Im Uebrigen wird auf die frühere, oben erwähnte Besprechung verwiesen.

B. NEBEL.

**Die Gravitation ist eine Folge der Bewegung des Aethers.** Von KARL SCHLICHTING. Lüben i. Schl. 1891. L. Goldschieners Buchhandlung (H. May). 15 S. und zwei Figuren.

Verfasser geht von der Hypothese aus, dass die kleinsten Theilchen des Aethers, die er Sphären nennt, sich in gradliniger Bewegung befinden und darin verharren, bis sie an andere Sphären oder an Körper anprallen und dann nach den Gesetzen der Mechanik in anderen Bahnen weiter eilen. Treffen die Sphären einen Körper, so geht ein Theil von ihnen ungehindert durch den Raum, welcher nicht von Molekülen angefüllt ist; der andere aber wirkt treibend; denn er stösst auf die Körpermoleküle; jede Sphäre überträgt dabei dem Molekül einen Theil seiner lebendigen Kraft und prallt mit etwas verminderter Geschwindigkeit zurück. Einer Kugel, in deren endlicher Entfernung kein anderer Körper sich befindet, kann daher vom Aether kein Antrieb ertheilt werden, weil sich die Kräfte gegenseitig aufheben. Anders verhält sich die Sache, wenn zwei Kugeln in endlicher Entfernung von einander den Stössen der Sphären ausgesetzt werden. Darüber lässt uns die Schrift aber vollkommen im Unklaren, woher die Geschwindigkeit der Sphären kommt, wie gross dieselbe ist, was aus den Sphären wird, wenn sie durch fortgesetztes Aufprallen ihre Geschwindigkeit eingebüsst haben, überhaupt, wie der Satz von der Erhaltung der Energie in diesem Weltensystem zum Ausdruck kommt.

B. NEBEL.

**Aesthetische Factoren der Raumanschauung.** Von THEODOR LIPPS. Hamburg und Leipzig 1891. Verlag von Leopold Vosseis. 91 S. Preis 3 Mk.

Diese Abhandlung bildet einen Theil der Festschrift, welche unter dem Titel: „Beiträge zur Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane“































17. Trois coefficients binomiaux consécutifs en proportion arithmétique. Soons. Mathesis Série 2, II, 119.

## C.

## Combinatorik.

18. Sur l'analyse combinatoire circulaire. E. Jablonski. Compt. Rend. CXIV, 904. Vergl. Binomialcoefficienten. Substitutionen 245. Wahrscheinlichkeitsrechnung. Zahlentheorie 266.

## Cubatur.

19. Formules pour le jaugeage des tonneaux. P. Mansion. Mathesis Ser. 2, II, 14.  
20. Mener parallèlement à la base d'un triangle une droite telle, qu'en faisant tourner le triangle autour de sa base, les volumes engendrés par les deux parties de la figure soient équivalents. Solution élémentaire. P. Mansion. Mathesis Serie 2, II, 137.  
Vergl. Schwerpunkt 241.

## D.

## Determinanten.

21. Ein Satz über orthosymmetrische und verwandte Determinanten aus den fundamentalen symmetrischen Functionen. H. Brunn. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 291.  
22. Remarques sur un continuant. E. Cesaro. Mathesis Série 2, II, 5. [Vergl. Bd. XXXVII, Nr. 33.]  
Vergl. Geschichte der Mathematik 105.

## Differentialgleichungen.

23. De l'existence des intégrales dans un système différentiel quelconque. Riquier. Compt. Rend. CXIV, 731.  
24. Sur les intégrales des équations différentielles du premier ordre, possédant un nombre limité de valeurs. P. Painlevé. Compt. Rend. CXIV, 107, 280.  
25. Sur les intégrales algébriques de l'équation différentielle du premier ordre. L. Autonne. Compt. Rend. CXIV, 407.  
26. Zur Theorie der Systeme linearer Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Veränderlichen. J. Horn. Mathem. Annal. XL, 527. [Vergl. Bd. XXXVII Nr. 322.]  
27. Sopra una classe di equazioni differenziali lineari riducibili. C. Bigiavi. Annali mat. Ser. 2, XIX, 97.  
28. Sugli integrali polidromi delle equazioni algebrico-differenziali del primo ordine. G. Vivanti. Annali mat. Ser. 2, XIX, 29.  
29. Ricerca del rapporto frai discriminanti di un'equazione algebrico-differenziale di 1° ordine e della sua primitiva completa per mezzo della teoria delle curve piane razionali. G. Torelli. Annali mat. Ser. 2, XIX, 254.  
30. Ueber den Hermite'schen Fall der Lamé'schen Differentialgleichung. F. Klein. Mathem. Annal. XL, 125.  
31. Intégrer l'équation  $y(1 + 2y'^2) + xy' = 0$ . H. Brocard. Mathesis Série 2, II, 196.  
32. Intégrer l'équation  $(1 - x^2)y' = xy - y^2$ . Catalan. Mathesis Série 2, II, 47. [Vergl. Bd. XXXVII Nr. 56.]  
33. Sur la courbe  $2a^2 = e \left( e' + \frac{e^2}{e'} \right)$ . H. Brocard. Mathesis Série 2, II, 196.  
34. Zum Fundamentalsatz über die Existenz von Integralen partieller Differentialgleichungen. G. Mie. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 151, 193.  
35. Sur certains systèmes d'équations aux dérivées partielles. E. Picard. Compt. Rend. CXIV, 805. [Vergl. Bd. XXXVII, Nr. 324.]  
36. Anwendung von Sätzen über partielle Differentialgleichungen auf die Theorie der Orthogonalsysteme, insbesondere die der Ribaucour'schen cyklischen Systeme. A. V. Bäcklund. Mathem. Annal. XL, 194.  
Vergl. Mechanik.

## Differentialquotient.

37. Sur la définition de la dérivée. G. Peano. Mathesis Ser. 2, II, 12.

## Dreiecksgeometrie.

38. Sur quelques propriétés du triangle. E. Bertrand. Mathesis Série 2, II, 130. — E. Lemoine ebenda 252.



62. Ueber eine neue Methode zur Entwicklung der Theorie der Sigmafunctionen mehrerer Argumente. E. Jahnke. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 178. Vergl. Geschichte der Mathematik 110.

**F.****Formen.**

63. Algebraische Reduction der Schaaren quadratischer Formen. L. Kronecker. Berl. Akad. Ber. 1891, 9, 33. [Vergl. Bd. XXXVI Nr. 326.] Vergl. Invariantentheorie 136, 137.

**Functionen.**

64. Zum Beweise eines Fundamentalsatzes der Theorie der algebraischen Functionen. M. Nöther. Mathem. Annal. XL, 140.  
 65. Symbolische Zahlen und Doppelzahlen. M. Philippoff. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 298.  
 66. Sur la théorie des fonctions Fuchsiennes. L. Schlesinger. Compt. Rend. CXIV, 1100, 1409.  
 67. Sur les fonctions entières de la forme  $e^{G(x)}$ . Hadamard. Compt. Rend. CXIV, 1053.  
 68. Un théorème sur les fonctions harmoniques. G. D. d'Arone. Compt. Rend. CXIV, 1055.  
 69. Ueber den Begriff des functionentheoretischen Fundamentalbereichs. F. Klein. Mathem. Annal. XL, 130.  
 70. Sur un théorème de Jacobi. Mdme. Prime. Mathesis Série 2, II, 227.  
 71. Sur l'approximation des fonctions de très grands nombres. M. Hamy. Compt. Rend. CXIV, 993.  
 72. Ueber den Fuchs'schen Grenzkreis. W. Anissimoff. Mathem. Annal. XL, 145.  
 73. Sur une classe de fonctions analytiques d'une variable dépendant de deux constantes réelles arbitraires. E. Picard. Compt. Rend. CXIV, 1310.  
 74. Sulle funzioni a due variabili reali, le quali crescono o decrescono sempre nel verso positivo di ciascuno degli assi in un pezzo di piano a distanza finita. G. Ascoli. Annali mat. Ser. 2, XIX, 289.  
 Vergl. Abel'sche Transcendenten. Bernoulli'sche Zahlen. Binomialcoefficienten. Differentialgleichungen. Differentialquotient. Elliptische Transcendenten. Formen. Grenzwerte. Imaginäres. Invariantentheorie. Irrationalzahlen. Kettenbrüche. Mittelwerte. Reihen. Substitutionen. Transformationsgruppen.

**G.****Geodäsie.**

75. Des coordonnées rectangulaires. Hatt. Compt. Rend. CXIV, 1248.

**Geometrie (höhere).**

76. Theorie der Elemententripel einstufiger Elementargebilde. B. Klein. Annal. mat. Ser. 2, XIX, 39, 233. [Vergl. Bd. XXXVI Nr. 359.]  
 77. Le corrispondenze univoche sulle curve ellittiche di ordine  $n$  normali di uno  $S_{n-1}$ . F. Amodeo. Annali mat. Ser. 2, XIX, 1, 145.  
 78. Sur les courbes algébriques. M. d'Ocagne. Mathesis Série 2, II, 100.  
 79. Zur Erzeugung der rationalen Raumcurven. W. Stahl. Mathem. Annal. XL, 1. [Vergl. Bd. XXXVII Nr. 97.]  
 80. Kleine Beiträge zu den Anwendungen der Methoden von Grassmann. R. Mehmke. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 305.  
 81. Zwei Sätze über collineare Ebenen. Beyel. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 59.  
 82. Jacob Steiner's Sätze über die Mitten der Abschnitte, welche eine Curve auf einer Geraden bestimmt. B. Sporer. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 340.  
 83. Sur les points d'inflexion d'une courbe. Absolonne, Bellens, Cristesco, Déprez. Mathesis Série 2, II, 52. — Morel ebenda 53.  
 84. Construction einer Tangente in einem Punkte einer Curve dritten Grades. B. Sporer. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 191.  
 85. Cas particuliers du paradoxe de Cramer. Socoloff. Mathesis Série 2, II, 198.  
 86. Homologie de quatre triangles. Déprez, Listray. Mathesis Série 2, II, 51.  
 Vergl. Abzählende Geometrie. Kegelschnitte. Krümmung. Tetraeder. Topologie.



## Gleichungen.

120. Neuer Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra. K. Weierstrass. Berl. Akad. Ber. 1891, 1085.
121. Die trinomischen und quadrinomischen Gleichungen in elementarer Behandlungsweise. W. Heymann. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 90.
122. Ordre de multiplicité d'une racine multiple de  $f[f(x)] - x = 0$  et simple en même temps de  $f(x) - x = 0$ . Soons. Mathesis Série 2, II, 47. — Cesaro ebenda 160. — Lemoine ebenda 276.
123. Sur une équation dont toutes les racines sont réelles. J. Neuberg. Mathesis. Série 2, II, 272.
124. Sur une extension du théorème de Sturm. E. Phragmén. Compt. Rend. CXIV, 205, 440.
125. Sur les racines de  $x^4 + [2d(d-a) - b]x^2 + d^2[(d-a)^2 - b] = 0$ , où  $d$  est un paramètre variable de  $-\infty$  à  $+\infty$ . Joachimescu. Mathesis. Série 2, II, 233.
126. Resoudre l'équation  $(x-a)^3(x+a-2b) - (a-b)^3(a+b-2x) = 0$ . H. Brocard etc. Mathesis Série 2, II, 211.
127. Démontrer que l'expression  $\frac{1}{2}Sa^2(b-c)^2(ab+ac-2bc)^2$  est un carré parfait. E. Gelin. Mathesis. Série 2, II, 122. — Quint ebenda 123. — Denys und Decamp ebenda 123.

## Grenzwerthe.

128. Limite de la racine *m*ème d'une variable. P. Mausion. Mathesis. Serie 2, II, 39.

## H.

## Hydrodynamik.

129. Sur le calcul théorique approché du débit d'un orifice en mince paroi. J. Boussinesq. Compt. Rend. CXIV, 704, 807, 868.
130. Calcul de la diminution qu'éprouve la pression moyenne, sur un plan horizontal fixe, à l'intérieur du liquide pesant remplissant un bassin et que viennent agiter des mouvements quelconques de houle ou da clapotis. J. Boussinesq. Compt. Rend. CXIV, 937.

## Hyperbel.

131. Sur l'hyperbole de Kiepert. J. Neuberg. Mathesis Série 2, II, 241.
132. Hyperbole passant par deux points donnés et par les points de contact des tangentes menées des premiers points à une conique donnée. Déprez und Bellens. Mathesis Serie 2, II, 253.
133. Hyperbole lieu des centres des cercles circonscrits à des triangles ayant même périmètre et un angle commun. Mathesis Série 2, II, 246.

## I.

## Imaginâres.

134. Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici. Cor. Segre. Mathem. Annal. XL, 413.
135. Sui gruppi di sostituzioni lineari con coefficienti appartenenti a corpi quadratici immaginari. L. Bianchi. Mathem. Annal. XL, 332.

## Invariantentheorie.

136. Ueber eine Methode zur Aufstellung eines vollständigen Systemes bloßer Invarianten beliebig vieler quadratischen Formen jeder Stufe. Joh. Kleiber. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 79.
137. Bestimmung einer binären Form aus Anfangsgliedern ihrer Covarianten. P. Gordan. Mathem. Annal. XL, 503.
138. Ueber Covarianten ebener Collineationen. P. Muth. Mathem. Annal. XL, 89.
139. Sulle condizioni invariantive perchè due quintiche binarie abbiano quattro radici comuni. L. Berzolari. Annali mat. Ser. 2, XIX, 269.
140. Sur les développements canoniques en séries dont les coefficients sont les invariants différentiels d'un groupe continu. A. Tresse. Compt. Rend. CXIV, 1256.











**B.****Rechnen.**

233. Rapports de la commission chargée de l'examen du calculateur Inaudi. Charcot. Compt. Rend. CXIV, 1329. — Darboux ebenda 1335. .

**Reihen.**

234. Sur la somme des termes d'une progression arithmétique. L. Collette. Mathesis Série 2, II, 160.  
 235. Sur quelques suites finies. Verniory. Mathesis Serie 2, II, 217.  
 236. Sur les séries à termes positifs. V. Jamet. Compt. Rend. CXIV, 57.  
 237. Sur la convergence de quelques séries. E. Cesaro. Mathesis Série 2, II, 125.  
 238. Sommation de quelques séries convergentes. Verniory. Mathesis Série 2, II, 265.  
 239. Sur la série hypergéométrique. A. Markoff. Mathem. Annal. XL, 313. — Compt. Rend. CXIV, 54.  
 Vergl. Invariantentheorie 140.

**S.****Schwerpunkt.**

240. Jacob Steiners Sätze über den Schwerpunkt der gemeinschaftlichen Punkte einer Geraden und einer algebraischen Curve. B. Sporer. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 65.  
 241. Erweiterung der Guldin'schen Regel. P. B. Richter. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 172.

**Sphärik.**

242. Sur la courbe de Viviani. Mandart. Mathesis Série 2, II, 210. — Déprez ebenda 256.  
 243. Aire d'une figure tracée sur une sphère et formée d'arcs de petits cercles. C. E. Wasteels. Mathesis Série 2, II, 105.

**Stereometrie.**

244. Ueber einen stereometrischen Satz von Schlömilch. C. Hossfeld. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 382.  
 Vergl. Tetraeder.

**Substitutionen.**

245. Ueber die Zahl der verschiedenen Werthe, die eine Function gegebener Buchstaben durch Vertauschung derselben erlangen kann. A. Bocher. Mathem. Annal. XL, 156. [Vergl. Bd. XXXV Nr. 696.]  
 246. Ueber die Classe der transitiven Substitutionsgruppen. A. Bocher. Mathem. Annal. XL, 176.  
 247. Sur les groupes discontinus de substitutions non linéaires à une variable. P. Painlevé. Compt. Rend. CXIV, 1345.  
 248. Die einfachen Gruppen im ersten und zweiten Hundert der Ordnungszahlen. O. Hölder. Mathem. Annal. XL, 55.  
 Vergl. Imaginäres 135.

**T.****Tetraeder.**

249. Sur les trois quadrilatères gauches dans un tétraèdre. Sollertinsky. Mathesis Série 2, II, 259. — Droz ebenda 260. — Emmerich ebenda 261.  
 250. Ueber Tetraederpaare. P. Muth. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 117.

**Topologie.**

251. Topologische Betrachtungen. H. Brunn. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 106.

**Transformationsgruppen.**

252. Sur les fondements de la géométrie. S. Lie. Compt. Rend. CXIV, 461.  
 253. Sur une application de la théorie des groupes continus à la théorie des fonctions. S. Lie. Compt. Rend. CXIV, 334.  
 Vergl. Geschichte der Mathematik 107. Invariantentheorie 140, 141.

## Trigonometrie.

254. Sur trois expressions égales entre elles, l'égalité deux d'entre elles étant connue. J. Neuberg. Mathesis Série 2, II, 207.  
 255. Vérification de l'identité de certaines expressions contenant des produits de tangentes. Emmerich. Mathesis Série 2, II, 212.  
 256. Transformation d'une relation entre deux cosinus en produit de trois tangentes. Joachimescu. Mathesis Série 2, II, 55.  
 Vergl. Geschichte der Mathematik 101.

## W.

## Wahrscheinlichkeitsrechnung.

257. Sur un théorème du calcul des probabilités. Jos. Bertrand. Compt. Rend. CXIV, 701.  
 258. De l'accélération de la mortalité en France. Delauney. Compt. Rend. CXIV, 1348.  
 259. Sur la détermination du point le plus probable donné par une série de droites non convergentes. M. d'Ocagne. Compt. Rend. CXIV, 1415.

## Z.

## Zahlentheorie.

260. Sur la distribution des nombres premiers. V. Stanievitch. Compt. Rend. CXIV, 109. [Vergl. Bd. XXXVII Nr. 570.]  
 261. Sur la distribution des nombres premiers. E. Phragmén. Compt. Rend. CXIV, 337.  
 262. Neue Grundlagen einer allgemeinen Zahlenlehre. J. Kraus. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 321.  
 263. Bemerkungen zu einem von Herr Bachmann veröffentlichten Satz. J. Kraus. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 190. [Vergl. Bd. XXXVII, Nr. 262.]  
 264. Kriterien der Theilbarkeit dekadischer Zahlen. G. Speckmann. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 58, 128. — R. H. van Dorsten ebenda 58, 192. — K. Haas ebenda 63. — J. Dörr ebenda 383.  
 265. Caractères de divisibilité. E. Gelin. Mathesis. Série 2, II, 65, 93.  
 266. Sur la somme des produits  $p$  à  $p$  des  $n$  premiers nombres entiers. Baudran. Mathesis Série 2, II, 141.  
 267. Ueber die Gleichung  $x^p + y^p = z^p$ . Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 57. — Schumacher ebenda 64. [Vergl. Bd. XXXVII Nr. 269.]  
 268. Résoudre le système d'équations  $(x + y)(x - y)^2 = (y + z)(y - z)^2 = (z + x)(z - x)^2$ . Emmerich. Mathesis Série. 2, II, 121.  
 Vergl. Formen. Geschichte der Mathematik 93, 94.

# Historisch-literarische Abtheilung.

---

## Der V. Band des Katalogs der arabischen Bücher der viceköniglichen Bibliothek in Kairo.

Aus dem Arabischen übersetzt und mit Anmerkungen versehen

von

Dr. HEINRICH SUTER,  
Professor am Gymnasium zu Zürich.

---

Schluss.\*

---

### Abtheilung: Astronomie.

#### 1. Sphärische (beobachtende) Astronomie.

ب (Bā).

**Al barâhîn al-kaṭ'ijja** (die kategorischen Beweise) für die Nichtexistenz der Rotation der Erdkugel<sup>1</sup>, von **Selîm al-Jâs al-Ḥamwî ad-Dimischkî al-Misrî** [lebt jetzt 1307 noch]. Ein Band, gedruckt in der Druckerei des Verfassers, genannt die Druckerei al-kaukab asch-scharkî (der östliche Stern), in Alexandria, 1876. A.-N. 2. H.-N. 4260.

ح (Ḥā).

**Hâschijat al-bardschendi** (der Bardschendi'sche Anhang) zum Commentar des Maulâ Schaich **Mûsâ ben Mahmûd**<sup>2</sup>, bekannt unter dem Namen **Kâdî-Zâdeh ar-Rûmî** [eines der Gelehrten des 9. Jahrh. d. H.], zu dem **Mulachchas**<sup>3</sup> (Auszug, Compendium) des Schaich **Mahmûd ben Muhammed al-Dschagmîni\*\* al-Chowârezmî**. Anfang: Lob sei Gott, dem Herrn über Ost und West. Ein Band in persischer Schrift. Schluss der Abschrift Freitag Nachts, den 12. Dschumâdâ I. 1092, 1681. Mit Noten. A.-N. 1. H.-N. 4259.

Noch drei weitere solche Exemplare, das dritte von der Hand des Dschelebi ibn al-Ḥâdsch 'Alî. Er beendigte es am Samstag, den 3. Rabî' I.

---

\* Dieser Schluss enthält nur eine Auslese aus den im Katalog angeführten Werken, wie ich es im Vorwort (Heft 1 dieses Jahrgangs) schon angedeutet habe.

\*\* Auch 'Tschagmîni geschrieben.

1019, 1610, in der Stadt Âmid (?) in der Chosru'schen Schule. Defect am Anfang; am Schlusse ein Anhang über die Mondstationen. A.-N. 2 (?). H.-N. 7792.

ش (Schin).

**Scharh** (Commentar) des **Sajjid Scherif 'Alî ben Muhammed al-Dschurdschânî** [geb. 740, 1339/40, gest. 816, 1413/14] zu der **Tadkira'** (Mémoire, Notizen) des **Nasîr ed-Dîn Muhammed ben Muhammed at-Tûsî** [gest. 672, 1273/74]. Anfang: Gesegnet sei (Gott), welcher an den Himmel die in Bezug auf Ordnung (Rang) und Zeiten verschiedenen Häuser gesetzt hat. Ein Band in älterer Schrift. A.-N. 11. H.-N. 16273.

**Scharh** (Commentar) des Wahrheit suchenden **Mûsâ ben Mahmûd** genannt **Kâdî-Zâdeh** [eines der Gelehrten des 9. Jahrh. d. H.]<sup>5</sup> zu dem **Mulachchas** (Compendium) der Astronomie des sehr gelehrten **Mahmûd ben Muhammed ben 'Omar al-Dschagmînî** [eines der Gelehrten des 9. Jahrh. d. H.]. Anfang des Commentars: Lob sei Gott, der der Sonne und dem Monde Licht und Glanz gegeben hat. Die Abfassung desselben wurde beendigt im Jahre 813, 1410/11. Anfang des Textes (des **Mulachchas**): Lob sei Gott, dessen Ueberlegenheit (Allem) gewachsen ist. Die Abfassung desselben wurde beendigt im Jahre 808, 1405/6. Ein Band in hängender (persischer) Schrift, von der Hand des **Hidr ben Muhammed an-Naschawî**. Beginn der Abschrift im Anfang des **Dû'l-Hidscha** 929, 1523 und Schluss derselben im Anfang des **Safar** 930, 1523. Mit Randnoten. A.-N. 8. H.-N. 4266.

ك (Kaf).

**Kitâb** (Buch) des sehr gelehrten Schaich **Muhammed ben 'Alî as-Sabân** [gest. 1206, 1791/92]. Anfang: Lob sei Gott, der Himmel und Erde erschaffen hat, der Gnädige, dessen Wohlthaten von den Umfängen der Breiten- und Längenkreise her strahlen. Es befinden sich darin: Eine Auswahl aus dem Text des **Mulachchas** von **Dschagmînî** und dem Commentar dazu von **Kâdî-Zâdeh**, die **Fathijja**<sup>6</sup> und der Commentar zu derselben von **Miram Dscheleblî**<sup>7</sup>, Anhänge zum Commentar des **Kâdî** (vergl. oben unter **Hâ**), der Commentar der **Mawâkif** (Stationen?) und Anderes. Ein Band in älterer Schrift. A.-N. 6. H.-N. 4265.

م (Mim).

(Aus den folgenden drei **madschmû'ât** = Sammelbänden ist nur zu erwähnen): Aus dem Sammelband A.-N. 10. H.-N. 4268:

1. **Al-mulachchas** (Auszug, Compendium) des sehr gelehrten **Mahmûd ben Muhammed ben 'Omar al-Dschagmînî** [eines der Gelehrten des 9. Jahrh. d. H.] In älterer Schrift, von der Hand des **Muhammed al-Manschâwî**, des Schâfiten, beendigt am Montag, den 11. Schawwâl 1144, 1732. Ohne Figuren.













غ (Ġain).

**Ġājat al-intifā'** (der höchste Vorthail): über die Kenntniss des Stundenwinkels<sup>21</sup> und des Azimuthes aus der Höhe, von **Abû'l-Hasan 'Alî ben Abî Sa'id 'Abderrahmân ben Ahmed ben Jûnis ben 'Abdala'lâ as-Safedî al-Misrî** [gest. in Kairo, Montag Morgen, den 3. Schawwal 399, 1009]. Ein Band in älterer Schrift. Schluss der Abschrift am 8. Dschumâda II. 1218, 1803. A.-N. 108. H.-N. 4662.

ف (Fa).

**Al-fathijja fî'l-a'mâl al-dschaibijja** (die Fathijja über die Sinusoperationen) von dem Schaich **Muḥammed ben Muḥammed ben Ahmed Sibṭ al-Mâridînî** [geb. 826, 1423]. Er theilte sie in ein Vorwort und 20 Capitel. In älterer Schrift, im Anfang schadhaft. A.-N. 67. H.-N. 4621.<sup>22</sup>

ك (Kaf).

**Kitâb** (das Buch) über die Lehren (Urtheile, Weissagungen) in der Astronomie, von **Sahl ben Bischr**<sup>23</sup>, dem Juden. Anfang: Wisse, dass von den zwölf Zeichen des Thierkreises sechs männlich und sechs weiblich sind. Ein Band in älterer Schrift; am Ende schadhaft. A.-N. 9. H.-N. 4563.

**Kitâb** (das Buch) über die Elemente der Kunst der Urtheile (des Weissagens) von **Abû'l-Hasan Kûschjâr ben Lebnân**<sup>24</sup> **ben Bâschharî (?) al-Dschîlî**. Er theilte es in vier Abschnitte. Ein Band in älterer Schrift. A.-N. 120. H.-N. 4674.

ل (Lâm).

**Al-lafz al-muṣarraḥ** (das klare Wort): über den Gebrauch des geflügelten Quadranten<sup>25</sup>, von dem Schaich **Muḥammed ben Ahmed ben Maḥmûd as-Sâlihî**, dem Schäfiten, bekannt unter dem Namen **al-Murschidî**. Er theilte es in ein Vorwort und 35 Capitel. In älterer Schrift, von der Hand des **Muḥammed ben Muḥammed ben Ibrâhîm al-Haraurî**, beendigt am Mittwoch, den 28. Radschab 794, 1392. A.-N. 142. H.-N. 4696.

م (Mîm).

**Madschmû'a** (Sammelband). A.-N. 64. H.-N. 4618. Inhalt:

1. Deutliche Auseinandersetzung des Verborgenen: über den Gebrauch des Sinusquadranten, von dem Schaich **'Alî ben Ibrâhîm ben Muḥammed al-Muṭ'im al-Anṣârî**, dem Gebetsrufer in der Moschee al-Amawî<sup>26</sup> [gest. 777, 1375/76]. Er theilte sie in ein Vorwort und 205 Capitel.

2. Enthüllung des Verborgenen: über die Rechnung mit dem Sinusquadranten; von dem Schaich **'Alî ben Ibrâhîm**, dem Vorigen. Er theilte in ein Vorwort und 54 Capitel; Schluss der Abschrift im Jahre 803, 01.



**Madschmū'a** A.-N. 172 H.-N. 4735. Inhalt:

1. Das Buch des **Abū 'Alī** über die bewegte Sphäre. Schluss der Abschrift am Samstag, den 2. Schabān 1235, 1824.

**Madschmū'a** A.-N. 181 H.-N. 4734. Inhalt:

1. Das Buch des **Abū 'Alī** über die astronomischen Grundlagen von **Hermes** [Herm = Ebnol]. Anfang: Wissen. Gott lehrt dich alles Gute.

2. Die letzte Ergänzung: über die Bestimmungen der Astronomie, von dem **Schaich** **Muhammad ben Abi Bekr al-Fārisi** [einem der Gelehrten des 7. Jahrh. d. H.]. Schluss der Abschrift am 15. Rabi' I 695, 1209. Schluss der Abschrift im Jahr II 1235, 1822.

3. Astronomische Nachrichten aus der Abhandlung des **Abi 'Ali al-Cāziri**.\*

**Madschmū'a** A.-N. 185 H.-N. 7935.

1. Abhandlung des **Kischjār ben Labrān Labrān al-Dschili al-Chorwandī** über die Astronomie. In vier Abschnitte getheilt.

2. Die Pläne zur gesamten Astronomie von **Kischjār**, von der Hand des **Muhammad ben Hasan al-Hasafi**, beendigt am 18. Schabān 1152, 1768.

**Madschmū'a** A.-N. 190 H.-N. 8030. Inhalt:

1. Abhandlung über die Jahreszeiten\*, von **Bischr ben Sahl**\*, dem Juden [aus dem 3. Jahrh. d. H.]. Anfang: Wissen, dass die Jahreszeiten nicht übereinstimmen wegen der Ungleichheit der Bewegungen.

**Madschmū'a** A.-N. 194 H.-N. 8034. Inhalt:

1. Das Buch über das gesamte astronomische Wissen und die himmlischen Bewegungen\*, von **Ahmed ben Muhammad ben Katir al-Fargāni** [einem der Astronomen al-Māmūni]. Schluss der Abschrift 876, 1471/72.

2. Abhandlung über die Kenntniss der Zeiten, während deren der Mond über oder unter der Erde sich befindet; von derselben ist nur noch ein Blatt vorhanden, daran schliesst sich ein Blatt aus der Abhandlung über die Berechnung der sieben Klimata von **al-Fargāni**, dem Vorigen. Schluss der Abschrift 876.

**Madschmū'a** A.-N. 200 H.-N. 8040. Inhalt:

1. Commentar zum Centiloquium des **Ptolemaios**, von dem weisen [Nasir ed-Din] **at-Tūsī** [gest. 672, 1273/74]. Anfang: Lob sei Gott, das Lob der Preisenden...

**Madschmū'a** A.-N. 204 H.-N. 8044. Inhalt:

1. Abhandlung über die Urtheile aus den Gestirnen, in Hinsicht ihres Befestigtseins (?) im Weltall, das da vergänglich ist, insofern als es entstanden ist und wieder vergeht; verfasst von dem **Schaich** **Abū'l-'Abbās Ahmed ben Muhammad ben 'Otmān al-Azdi**, bekannt unter dem Namen

\* Sollte heissen: Sahl ben Bischr.



wärtig (1308) erster Astronom\* der vicekgl. Sternwarte in der 'Abbasijja. Zwei Bünde, gedruckt in der Druckerei des Muḥammed Efendī Muṣṭafa, 1304 1886/87.

Abtheilung: Wissenschaft der Buchstaben und der Namen  
(das heisst Geheimwissenschaften: Astrologie, Magie, Geomantie, Cheiromantie etc.).

ا (Alif).

**Al-uṣūl wa' d-dawābīṭ** (die Principien und die Regeln), von dem Schaich [Ahmed ben 'Alī ben Jūsuf al-Kuraschī] al-Būnī [gest. 622, 1225].<sup>44</sup> Er sagt im Anfang: Und was nun die Sache betrifft, so ist diese Abhandlung von einem Bruder, der aufrichtig in der Rede gegen seine Milchbrüder an der Brust der Weisheit ist. Er theilte sie in eine Vorrede und zehn Geschenke\*\* und ein Schlusswort. Ein Band in älterer Schrift. A.-N. 3. H.-N. 4434.

**Al-anwār al-lāiḥa** (die hellen Lichter) und die glückbringenden Geheimnisse\*\*\*, von dem Schaich Maḥmūd Abū'l-Mawāhib al-Chalwatī<sup>45</sup> al-Ḥanefī. Anfang: Lob sei Gott, der nach seiner Auswahl unter seinen Dienern dem die Geistes- und traditionellen Wissenschaften Lernenden Erfolg giebt. Er theilte sie in ein Vorwort, sieben Capitel und ein Schlusswort; (sie handeln) über die Dreier-, Vierer-, Fünfer-,... bis Neuner-Talismane<sup>46</sup> (Amulete) und ihre Vorschriften (Bedingungen), und über die Natur (Wesen) der Buchstaben. Daran schliesst sich ein Gedicht von ihm über die Amulete. Ein Band in älterer Schrift. A.-N. 2. H.-N. 4433.

د (Dāl).

**Ad-dawārad hamzadsch?** (الدوراد همزج)<sup>47</sup> von Ja'kūb ben Ishāk al-Kindī. Anfang: Lob sei Gott, es giebt keinen Gott ausser ihm, und an Kraft kommt ihm keiner gleich. Er handelt darin über den Fal mit Rücksicht auf die Zahl und die Rechnung nach den Gestirnen und die Weissagung aus dem Vogelflug und die Physiognomik. Ein Band in älterer Schrift. A.-N. 15. H.-N. 4446.

ر (Rā).

**Risāla** (Abhandlung) über das dem Saturn zukommende (wörtlich das Saturnische) Dreier-Amulet<sup>48</sup>, die dem 'Alī ben al-Ḥusain ben 'Alī ben Abī Tālib† zugeschrieben wird. In älterer Schrift. A.-N. 19. H.-N. 4450.

\* Bāsch-Rasīd (türk.-arab. Wort) = Chef, Oberster der Beobachter.

\*\* So betitelt er die einzelnen Abtheilungen, statt bāb = Capitel, oder makāla = Buch, Theil.

\*\*\* Asrār kann auch heissen: „Linien der inneren Hand“.

† Das ist dem Urenkel Muḥammeds von der Fâtîme.





Vogelzeichen aus den himmlischen Stationen, und der Länder (Städte) aus den Namen der Vogelzeichen, und der Könige aus den Namen der Länder und Anderes. Ein Band in älterer Schrift, beendigt 1058, 1648. A.-N. 53. H.-N. 7612.

ك (Kaf).

**Kitâb al-chawâss** (das Buch der magischen Eigenschaften) von **Abû'l-'Abbâs Ahmed al-Bûnî** [gest. 622, 1225]. Ein Band in älterer Schrift; am Anfang und am Ende schadhaft. A.-N. 10. H.-N. 7569.

**Kitâb as-sab' kawâkib as-sajjâra** (das Buch der sieben Planeten) von dem griechischen Weisen **Hermes**. Er spricht darin über die Ascendenten der männlichen und weiblichen Geburten mit Rücksicht auf die Auffindung der Bedeutungen (oder Geheimnisse) und die zufälligen Ereignisse. Ein Band, lithographirt in Kairo in der Druckerei al-'anâniyya, 1297, 1880. A.-N. 84. H.-N. 19633.

**Kitâb Timtim** (das Buch des Timtim) [des Indiers]<sup>54</sup>; er zeigt darin die magischen Eigenschaften der Thierkreishäuser und ihrer Grade auf speculativem und mathematischem (?) Wege, die zur Vernachlässigung des materiellen Erwerbes führen (?). Ein Band in älterer Schrift, in der Mitte und am Ende schadhaft. A.-N. 71. H.-N. 9818.

**Kitâb** (Buch) der Auflösung (Erklärung) der Principien der Salomonischen Talismane und der hebräischen Zeichen (Zeichenschrift, Räthselschrift) und der spiritistischen Wissenschaften (Künste), der Fälbuchstaben und der Namen al-kalfatirijja<sup>55</sup> und der griechischen Zauberformeln. Anfang: Lob sei Gott, der die Himmel erhöht und geschaffen hat, der die Gestirne leuchtend gemacht und sie (am Himmel) hingestreut hat. Ein Band in älterer Schrift; am Schlusse vom Abschreiber nicht ganz vollendet. A.-N. 72. H.-N. 9819.

م (Mim).

**Madschmû'a**. (Sammelband). A.-N. 56. H.-N. 4487. Inhalt:

1. Der Schatz Alexanders: über die Talismane<sup>56</sup> von **Aristoteles** dem Philosophen. Er theilte es in 10 Capitel, (welche handeln) über die Anordnung der Steine, die Zusammensetzung der tödtlichen Gifte und der Gegengifte und Anderes; von der Hand des Sulaimân al-'Aschmâwî al-Hanefî al-Mâtridî al-Falakî ibn Hamza ben Bachschisch, beendigt 1286, 1869/70.

**Madschmû'a**, A.-N. 57. H.-N. 4488. Inhalt:

5. Abhandlung über die Zâirdscha von **Abû'l-'Abbâs as-Sabtî** [einem der Gelehrten des 6. Jahrh. d. H.] und von **Abû'l-Fadl ben ar-Rammâh al-Afrîkî** und Andern.

**Madschmû'a**. A.-N. 78. H.-N. 7637. Inhalt:

3. Das Höchste der Hoffnung: über die Frage des Unbekannten; es enthält die Methoden der Zâirdscha, des Punktirens<sup>57</sup>, der Buchstaben,



beendet Mitte Scha'bân 1091, 1680. Theilweise zerrissen. A.-N. 6. H.-N. 4232.

ر (Ra).

**Rutbat al-hakim** (die Ordnung (auch Würde, Rang) des Weisen), verfasst von dem [Philosophen Schaich **Abû Muhammed**] **Maslama ben Ahmed** [ben 'Omar ben Waddâ'] al-Madschrîfî [Imâm (Erster) der Mathematiker in Spanien].<sup>62</sup> Anfang: Lob sei Gott, dem Mächtigen und Grossmüthigen. Er begann mit der Abfassung derselben im Anfange des Jahres 439, 1047 und beendigte sie 442, 1050/51.<sup>63</sup> Er theilte sie in vier Abschnitte; (sie handelt) über Das was er aus den Büchern der Vorfahren gesammelt hatte, und über den Stein des Einflusses (der Weisen?) und über die Wirkung (oder auch Herstellung) des Steins der Weisen und des Bindens, über die Zeichen (Räthsel) des Volkes (?); das Werk ist ein Auszug aus seinen Abhandlungen über die zehn philosophischen Wissenschaften. Ein Band in älterer Schrift. A.-N. 12. H.-N. 4238.

ش (Schin).

**Schudûr ad-dahab** (Goldperlen) von **Abû'l-Hasan 'Alî ben Mûsâ ben Abî'l-Kâsim ben 'Alî al-Ansârî al-Andalusî** [bekannt unter dem Namen **Ibn Arfa' Râs**, gest. 500, 1106/07]; es ist dies der **Diwân**<sup>64</sup>, geordnet nach den Buchstaben des Alphabetes. Anfang: Wenn Mars mit Venus im Gedrittschein steht, so ist es ein Mann (männliche Geburt) und ist zugleich Vollmond, so wird er intelligent. Ein Band in persischer Schrift, vocalisirt, mit vielen Notizen aus dem „höchsten Vergnügen“ von Dschildeki. A.-N. 17. H.-N. 4243.

**Scharh** (Commentar) einiger römischer Gelehrten zu den Schriften **Platons**. Deren Commentirung wurde befohlen von dem Sultan **Abû'l-Fath Muhammed Chân** und nach dessen Tode der Commentar seinem Sohne, dem Sultan **Bâjazîd** überreicht. Anfang: Lob sei Gott, dem Hersteller der geistigen Juwelen etc. Anfang der Schriften: Wenn eine Substanz gemischt ist aus zwei bekannten Körpern (Stoffen) und wir wollen wissen, wie viel von jedem einzelnen darin ist, so wägen wir jeden einzelnen der beiden Körper (Stoffe) in der Luft und im Wasser... Ein Band in älterer Schrift, von der Hand des **Muṣliḥ ed-Dîn ben Sinân**, beendet am Freitag Nachmittag, den 28. Radschab 905, 1500. A.-N. 13. H.-N. 4239.

ف (Fâ).

**Al-falâḥa an-nabatîjja**<sup>65</sup> (der nabatäische Ackerbau) von **Abû Bekr Ahmed ben 'Alî ben Kais al-Kaldânî**, bekannt unter dem Namen **Ibn Wahschijja**; er übersetzte ihn aus dem Chaldäischen in's Arabische im 91, 904 und dictirte ihn dem **'Alî ben Muhammed ben az-Zajjât**













Kitab ad-dawarad hamzadsch kur'a fi nihajat al-husn, dem ich so wenig wie Flügel einen Sinn beizulegen vermag; die vier letzten Worte — kur'a fi etc. — heissen wörtlich: das Loosziehen in (mit) äusserster Schönheit (Geschicklichkeit). Aus der Inhaltsangabe zu schliessen, wäre es aber ein anderes Werk des al-Kindi, vergl. Suter, Fihrist S. 11. — 48. Hier ist das Dreier-Quadrat dem Saturn zugetheilt, was mit der in Anmerkung 46 nach Ahlwardt gegebenen Darstellung nicht stimmt. — 49. Es ist dies das Quadripartitum des Ptolemaios. — 50. Vergl. für diese magische Kunst Suter, Fihrist S. 32 und 65, Anmerkung 188; Ahlwardt a. a. O. S. 551, 560 und 561 liest zairedsche und nennt sie Buchstaben-Zukunftsenträthselung; er sagt S. 551: „Auch hier wird ein Kreis verwendet, aber mit vielen zum Theil nach dem Mittelpunkt gehenden Linien, oder auch ein in 28 Felder getheiltes Quadrat (Rechteck?), jedes mit einem Buchstaben und auch mit einer Zahl versehen. Sie werden mit den zwölf Sternbildern (wohl eher mit den 28 Mondstationen) in Verbindung gebracht und die Deutung enthält die jedesmalige Antwort auf eine mit ob? oder ob nicht? gestellte Frage.“ — 51. Es ist dies der sogenannte grosse oder grösste Schaich, Ibn al-'Arabi, gebürtig aus Andalusien (Spanien), von dem H. Ch. eine grosse Zahl von Werken mannigfachen Inhaltes anführt, doch das hier vorliegende finde ich nicht bei ihm. — 52. Vergl. Steinschneider: Zur pseudepigraphischen Literatur des Mittelalters, an verschiedenen Stellen; auch H. Ch. erwähnt mehrere geheimwissenschaftliche Werke desselben, doch dieses nicht; er nennt ihn Abū Bekr Ahmed ben al-Wahschijja, giebt aber seine Lebenszeit nirgends an. — 53. Welches seiner zahlreichen im Fihrist (vergl. Suter, Fihrist S. 32 und 33) genannten astrologischen Werke dies sei, ist nicht wohl zu entscheiden. — 54. Angeblich ein indischer Weiser, wird auch Tamtam und Tumtum gelesen; vergl. H. Ch. V. 112 und Steinschneider, l. c. p. 33. — 55. Sollte wahrscheinlich heissen „filaktirija“ und wäre dann nach Fleischers Vermuthung (vergl. Steinschneider, l. c. S. 96) das griechische φιλκτήριον = schützende; in der That hat H. Ch. IV. 463 als Titel eines kurzen Abschnittes 'ilm el-filaktirāt (doctrina phylacteriorum), was nach der Inhaltsangabe zu schliessen, wohl die Wissenschaft der (vor Unheil) bewahrenden Namen oder Buchstaben sein wird. — 56. Vergl. Ahlwardt, a. a. O. S. 541, wo das Werk nicht dem Aristoteles, sondern dem Hermes Trismegistos zugeschrieben wird; es sei dann aufgefunden worden von dem Weisen Bulak, von diesem an Aristoteles gekommen und von diesem Alexander dem Grossen übergeben worden. — 57. 'Ilm ar-ramal ist die sogenannte Perikirkunst, oder Sandfigurenkunst, oder Geomantia. — 58. Ist wahrscheinlich das S. 168 genannte Werk. — 59. Es ist dies der berühmte arabische Philosoph und Theologe ar-Rāzī, nicht zu verwechseln mit dem noch berühmteren Arzt ar-Rāzī (Rhases), 1) Jahre früher gelebt hat: das hier genannte Werk finde ich



starb, was den Zeitangaben besser entsprechen würde. — 67. Angeblich Lehrer des Hermes, vergl. Steinschneider l. c. S. 40; Ahlwardt (l. c. S. 518) hat Folgendes (aus einem Buche über Geheimekräfte): „es wird berichtet, dass die Kunde der geheimen Bedeutung der Buchstaben von Gott verliehen sei dem Adam, dann dem Agathodämon, das ist Seth, u. s. w. bis auf 'Īsā (= Jesus), Muhammed, 'Alī etc.“

Anmerkung: Ich habe mich nachträglich überzeugt, dass das arab. kalam 'ādī, das bei den meisten Manuscripten steht, nicht mit „älterer Schrift“, wie ich es gethan habe, sondern mit „gewöhnlicher Schrift“ (Neschl), im Gegensatz zur persischen und magrebinischen Schrift, zu übersetzen ist.

---







$$Uf \equiv \sum_1^n \xi_k (x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_k},$$

wenn die Schaar ihrer Charakteristiken, oder der Inbegriff ihrer Lösungen durch die Transformation  $Uf$  in sich selbst übergeführt wird. Der analytische Ausdruck hierfür ist das Bestehen einer Relation der Form

$$(UA) \equiv \sum_1^n [U\alpha_k - A\xi_k] \frac{\partial f}{\partial x_k} = \varrho(x_1 \dots x_n) \cdot Af.$$

Hat man nun mehrere infinitesimale Transformationen, die dieser Bedingung genügen, so kann man unter Umständen durch bloße Differentiation und Elimination Lösungen der Gleichung  $Af=0$  finden. Zunächst gestattet nämlich die Differentialgleichung zugleich mit  $U_i f$  und  $U_k f$  die aus beiden durch die soeben definirte Klammeroperation hervorgehende neue Transformation  $(U_i U_k)$ . Nehmen wir an, es seien auf diese Weise  $r$  Transformationen  $U_1 f \dots U_r f$  gefunden, zwischen denen keine lineare Relation

$$c_1 U_1 f + \dots + c_r U_r f \equiv 0$$

mit constanten Coefficienten besteht, so wird sich unter den Ausdrücken  $U_1 f \dots U_r f$  eine gewisse Anzahl  $U_1 f \dots U_\varrho f$  finden, die mit  $Af$  durch keine Relation von der Form

$$\mu_1(x) \cdot U_1 f + \dots + \mu_\varrho(x) \cdot U_\varrho f + \lambda(x) \cdot Af \equiv 0$$

verknüpft sind, in der die Coefficienten nunmehr Functionen der Veränderlichen  $x_1 \dots x_n$  bedeuten sollen. Die übrigen werden sich dann durch  $Af$ ,  $U_1 f \dots U_\varrho f$  ausdrücken lassen:

$$U_{\varrho+i} f \equiv u_{i1} U_1 f + \dots + u_{i\varrho} U_\varrho f + v_i \cdot Af.$$

Die Coefficienten  $u_{i1} \dots u_{i\varrho}$  in dieser Identität sind Lösungen der Gleichung  $Af=0$  oder Constante.

Dieser fundamentale Satz (Theorem 31, S.324) genügt unter Umständen schon völlig zur Integration der Gleichung  $Af=0$ ; in anderen Fällen führt er zu einer bedeutenden Vereinfachung des Integrationsproblems.

Die weitere Durchführung der Integration einer Gleichung  $Af=0$ , die ein tieferes Eindringen in die Theorie der Transformationsgruppen voraussetzt, wird nur in besonderen Fällen geleistet. Es werden behandelt eine Gleichung  $Af=0$  in drei Veränderlichen mit einer oder zwei infinitesimalen Transformationen, und eine Gleichung  $Af=0$  in vier Veränderlichen mit einer dreigliedrigen Gruppe, die letzte jedoch nur unter einer gewissen Voraussetzung. Besonderes Interesse zieht die Behandlung des wichtigen Falles auf sich, in dem die dreigliedrige Gruppe die Zusammensetzung der projectiven Gruppe eines Kegelschnittes in der Ebene hat. Die Integration der Gleichung  $Af=0$ , die zunächst die Integration zweier gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung und eine Quadratur zu fordern scheint, wird durch einen merkwürdigen Kunstgriff









$(UA) \equiv 0$  zu gedenken gewesen, in dem die Kenntniss der infinitesimalen Transformation dennoch zur Lösung der Gleichung führt, da dann eben  $q$  selbst das Integral ist.

S. 182 und 423. Die Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \lambda f + \mu, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = \nu f + \pi$$

führen nicht nothwendig zu der Relation  $\frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{\partial \nu}{\partial u}$ , bestimmen  $f$  also unter Umständen ohne Integration.

S. 336. Symmetrischer wäre es gewesen, die fragliche Determinante mit der Functionaldeterminante

$$\begin{pmatrix} f, \omega_1, \dots, \omega_{n-1} \\ x_1, x_2, \dots, x_n \end{pmatrix}$$

zu multipliciren.

S. 394 u. fig. Trotz der Versicherung, dass es sich um eine allgemeine Methode handelt, hat Referent bei diesem Beweis den Eindruck des Künstlichen nicht überwinden können.

S. 480 lies am Rande „dreigliedrig“ statt „eingliedrig“, und im Text streiche „eingliedrige“. S. 509 Z. 14 von oben muss es wohl heissen: „so müssen  $\xi$  und  $\eta$  noch zwei willkürliche Constante (Functionen der  $a, b, c$ ) enthalten“. S. 375 Z. 2 von oben lies „zweiter“ statt „erster“.

S. 388 Z. 9 von oben  $Uf = z(x) \frac{\partial f}{\partial y}$ . S. 433 Z. 14 von unten lies

$y = af(x) + b$  statt  $y = f(x) + ay + b$ , und weiter  $f(x) = r$ ,  $y = v$ .

S. 459 Z. 12 von oben lies  $U_1'f$  und  $U_2'f$  statt  $U_1f$  und  $U_2f$ . S. 498 Z. 3

von unten lies  $y + e^{-x} \int \varphi e^x dx$  statt  $e^{-x} \int \varphi e^x dx$ .

E. STUDY.

**Codex Leidensis 399,1.** Euclidis elementa ex interpretatione al-Hadschadschii cum commentariis al-Narizii. Arabice et latine ediderunt notisque instruxerunt R. O. BESTHORN et J. L. HEIBERG. Partis I Fasciculus I. Hauniae, in libraria Gyldendaliansa (F. Hegel et fil.) 1893. 88 S.

Mit Freuden begrüsst jeder Kenner der Geschichte der mathematischen Wissenschaften das Erscheinen des ersten Heftes der Herausgabe dieser ältesten arabischen Euklid-Uebersetzung, ausgeführt durch al-Hadschadsch ben Jûsuf ben Maţar\*, im Auftrage des Wezirs Harûn ar-Raschids, des Barmekiden Jahja ben Châlid (um 790), nachher unter der Regierung al-Mâmûns durch denselben Hadschadschadsch nochmals revidirt und besser redigirt (um 820). Diese arabische Uebersetzung ist begleitet

\* Das arabische Manuscript lässt das „ben“ zwischen Jusûf und Matar aus, doch scheint, nach den zuverlässigsten arabischen Quellen, obiger der richtige Name zu sein.







imaginären Punkte eines Kegelschnittes mit Vorthail die zu ihm conjugirten Kegelschnitte verwenden kann. In der dritten Abhandlung giebt Herr Breuer als „Breuer's Lösung des Appolonischen Tactionsproblems“ eine Construction an, die nur eine unbedeutende auf Grund der üblichen analytischen Behandlung des Problems übrigens evidente Variante der gewöhnlichen Construction ist. Letztere hat vor ihr den Vorzug, dass sie den Orthogonalkreis der drei gegebenen Kreise nicht als reell voraussetzt. Die Veranschaulichung der Logarithmen complexer Zahlen in der vierten Arbeit geschieht mit Hilfe der in räumlichen Polarcoordinaten durch die Gleichung

$$r = e^{\varphi}$$

gegebenen Fläche.

„Breuer's Universalconograph“ beruht auf folgendem Satz: Verlängert man einen Brennstrahl eines Kegelschnittes über den Brennpunkt hinaus um den Parameter  $p$  und das Loth auf die zugehörige Direktrix über den Fusspunkt hinaus um ihre Entfernung vom Brennpunkt, so geht die Verbindungslinie der so erhaltenen Punkte stets durch den Schnittpunkt der Direktrix mit der Hauptachse. Da dem darauf gegründeten Mechanismus „doch nur eine theoretische Bedeutung zugesprochen werden kann“, so giebt Herr Breuer noch speciell einen Hyperbolograph und einen Parabolograph an, von denen der erstere dem Jost'schen Ellipsographen nachgebildet ist.

ERNST KÖTTER.

**Einfache Constructionen der rationalen Curven dritter Ordnung.** Von HERMANN WILLIG. Programm. I. Theil. Mainz 1892. 23 S. und 10 Tafeln. II. Theil. Mainz 1893. 7. S. und 6 Tafeln.

Bei einer quadratischen Verwandtschaft entspricht bekanntlich einem Kegelschnitt, der durch einen Fundamentalpunkt  $O_1$  der zweiten Ebene geht, eine rationale Curve dritter Ordnung, deren Doppelpunkt in dem entsprechenden Doppelpunkt  $O_1$  der ersten Ebene liegt. Herr Willig benutzt das, um die verschiedenen Formen der rationalen Curve dritter Ordnung zu zeichnen. Die quadratische Verwandtschaft ist derart specialisirt, dass entsprechende Punkte  $P'$  und  $P$  mit einem festen Punkte  $O_2$  in einer Geraden liegen und die Verbindungslinien  $O_1P'$  und  $O_1P$  sich auf einer festen Geraden  $g$  treffen.

ERNST KÖTTER.

**Die Grundformeln der allgemeinen Flächentheorie.** Von H. STAHL und V. KOMMERELL. Leipzig, B. G. Teubner 1893. 114 S. 4 Mk.

Die Schrift erfüllt voll und ganz, was der Verfasser in der Vorrede sagt, dass sie geeignet ist „zur Grundlage beim Studium grösserer Werke“, und sie kommt in dieser Hinsicht einem wirklichen Bedürfnisse entgegen. Es sind die Hauptformeln zur Flächentheorie in eleganter Weise entwickelt,

















von dem Engländer King vorgeschlagenen Methode benutzt. Analytischen Ausdrücken, welchen sich statistische Verhältnisse der menschlichen Gesellschaft unter Umständen anschliessen können, kommt zunächst eine lediglich formale Bedeutung zu. Wie sie auch gebildet sein mögen, ob auf Grund mehr oder minder plausibler Hypothesen, immer wird es von dem empirischen Material abhängen, ob sie in dem einen oder anderen Falle zur Anwendung gelangen dürfen oder nicht. Es stellt sich also die Verwendung immer als ein Versuch dar, auf welchen wiederum ein Vergleich der durch die Formel gewonnenen Resultate mit den ursprünglichen Zahlen bejahend oder verneinend antwortet. Bisher hat sich die genannte Formel für Sterbetafeln von Männern für das Alter von 20 Jahren aufwärts bewährt, im vorliegenden Falle liess sie sich auch für höhere Alter (von 50 Jahren aufwärts) auf Frauen anwenden und die zum Vergleich angegebenen Zahlen sprechen so günstig für die Formel und sind interessant genug, um eine Wiedergabe des Verfahrens und einige seiner Ergebnisse wohl zu rechtfertigen.

Die Formel lautet in der verwendeten Gestalt

$$l_x = k s^x g^{q^x} \quad (a)$$

in welcher  $l_x$  die Zahl der Lebenden beim Alter  $x$  in einer Decremententafel,  $k$ ,  $s$ ,  $g$ ,  $q$  aber Constante bedeuten, die aus der Beobachtung nach vier grösseren, sich über gleich viel Jahre erstreckenden und aneinander schliessenden Altersklassen bestimmt werden.

Karup setzte z. B. für Männer  $x = 26$  und legte  $t = 16$  jährige Perioden zu Grunde, so dass er unter Benutzung der aus (a) folgenden Gleichungen

$$\sum_{x+t}^{x+t-1} \log l_x = t \log k + \frac{t}{2} (2x + t - 1) \log s + \frac{q^x (q^t - 1)}{q - 1} \log g,$$

$$\sum_{x+2t}^{x+2t-1} \log l_x - \sum_{x+t}^{x+t-1} \log l_x = \Delta \sum_{x+t}^{x+t-1} \log l_x = t^2 \log s + \frac{q^x (q^t - 1)^2}{q - 1} \log g,$$

$$\Delta \sum_{x+3t}^{x+3t-1} \log l_x - \Delta \sum_{x+t}^{x+t-1} \log l_x = \Delta^2 \sum_{x+t}^{x+t-1} \log l_x = \frac{q^x (q^t - 1)^3}{q - 1} \log g,$$

$$\frac{\Delta^2 \sum_{x+t}^{x+2t-1} \log l_x}{\Delta^2 \sum_{x+t}^{x+t-1} \log l_x} = q^t$$

Rechnungsschema:



$x$  (Anfangsalter) = 26,  $t$  = 16

Altersklasse	$\Sigma \log l_x$	$\Delta \Sigma$	$\Delta^2 \Sigma$	$\log$
26—41	62,9106			
42—57	61,7787	— 1,1318	— 2,2172	0,8458049
58—73	58,4297	— 3,3490	— 8,9579	0,9522062
74—89	46,1228	— 12,3069	Diff. —	0,6064013
				: 16
			$\log q$ —	0,0379001

u. s. w.

$\log (-\log y) = 6,8716464$

$\log g = - 0,00074412,$

$\log s = - 0,0015723,$

$\log k = 3,9995708$

und die angegebenen Constanten erhielt, welche zur Ermittlung der tabellirten Werthe führten.

Ein Vergleich der in den Erfahrungen der Casse gegebenen Zahlen mit den nach der Formel berechneten ergibt für Männer die folgenden Ergebnisse:

Altersklasse.	Zahl der Personen unter Risico.	Rechnungsmässige Zahl der Sterbefälle nach den Personen unter Risico der einzelnen Lebensjahre.	Wirkliche Sterbefälle.	Differenzen.
15—29	4420,0	22,86	29	+ 6,14
30—39	11486,5	79,22	73	— 6,22
40—49	12207,5	138,84	143	+ 4,16
50—59	11136,0	242,86	252	+ 9,14
60—69	8346,0	382,72	366	— 16,72
70—79	4235,5	411,45	424	+ 12,55
80—89	740,0	146,55	141	— 5,55
90—96	39,0	11,70	12	— 2,70
Sämmtliche Alter	52610,5	1439,20	1440	+ 0,80

Altersklasse.	Sterblichkeitsprocentsätze rechnungsmässig.	wirklich.	Differenzen.
15— 29	0,52	0,66	+ 0,14
30—39	0,69	0,64	— 0,05
40—49	1,14	1,17	+ 0,03
50—59	2,18	2,26	+ 0,08
60—69	4,59	4,39	— 0,20
70—79	9,71	10,01	+ 0,30
80—89	19,80	19,05	— 0,75
90—96	36,69	30,77	+ 5,92

Erwähnenswerth erscheint auch der Weg, den Karup einschlägt, um eine Tabelle für Ehefrauen — für Wittwen fanden sich hinreichende Grundlagen in den Daten der Casse vor — herzustellen. War es bei den bekannten Erfahrungen über Sterblichkeitsverhältnisse geboten, die Geschlechter getrennt zu behandeln, so musste es da, wo die Angaben des Instituts versagten, wünschenswerth sein, einen wenn auch künstlichen Anschluss an die Verhältnisse desselben herzustellen.

Wie der Verfasser zeigt, stimmen die Differenzen und ihr Verlauf nach den Tafeln von Brune und Oppermann für die Sterbeprocentsätze beider Geschlechter nahezu überein, so dass sich vermuthen lässt, dass die Unterschiede zwischen Männer- und Frauensterblichkeit auch für den vorliegenden Fall zutreffen möchten. Die Tafel für Ehefrauen ist demgemäss aus der für Männer unter Berücksichtigung des Mittels aus jenen Differenzen bei Brune und Oppermann hergeleitet, wovon die Thatsache, dass in diesen Differenzen, wie in den Grundbeobachtungen, eine Scheidung von Ehefrauen und Wittwen nicht gegeben ist, um so weniger zurückhalten konnte, als diese Tafel bei Berücksichtigung der Wiederverheirathung für die Verhältnisse der Casse überhaupt nur von untergeordneter Bedeutung ist.

Einen breiten Raum nimmt in den theoretischen Untersuchungen sowohl, als in den Anwendungen, eine Methode ein, nach welcher die Wahrscheinlichkeiten des Invalidewerdens, der Eheschliessung und ähnlicher Verhältnisse, deren Schätzung die Aufgabe erforderlich macht, berechnet werden. Dieselbe einer Besprechung an dieser Stelle zu unterziehen, kann um so weniger umgangen werden, als dieselbe bei ihrer ersten Verwendung in einem 1875 für das Reich erstatteten Gutachten Karup's auf den heftigen Widerstand eines namhaften Mathematikers gestossen ist, dessen Einwände auch in neuester Zeit noch hier und dort in statistischen Publikationen anderer Verfasser wiederkehren.

Wir müssen bekennen, dass wir durch keinen jener Einwände, die sich wesentlich auf den logisch-mathematischen Gang der Betrachtung, weniger aber auf die praktische Verwendbarkeit der Resultate beziehen, in unserer Ueberzeugung erschüttert worden sind, dass die Karup'sche Theorie nicht allein durchaus gerechtfertigt, sondern auch als eine scharfe Consequenz der einer jeden mathematischen Statistik zu Grunde liegenden Annahme von dem selbstständigen Charakter der ihrer Untersuchung zugänglichen Ereignisse anzusehen ist. Zur Rechtfertigung dieser Worte mag der Gedankengang, welchem der Verfasser bei der Behandlung von Invaliditäts-, Heiraths- etc. Wahrscheinlichkeiten folgt, hiermit nochmals einem mathematischen Leserkreise vorgelegt werden. Karup geht in seinen  
 a von dem Begriffe der Intensität aus, wie er seit langer  
 glückselig für die Verhältnisse des Sterbens angewandt

wird und welcher zur Voraussetzung hat, dass sich die Zahlen in einer Sterbetafel auffassen lassen als die Werthe einer stetigen, differentiirbaren Function der Zeit, eine Annahme, die im Wesentlichen jeder mathematischen Behandlung statistischer Verhältnisse — der Ausgleichung, Interpolation etc. — zu Grunde liegt. Bezeichnet man mit  $l_x$  die Zahl der Lebenden vom Alter  $x$  in einer Sterbetafel, so ist die Intensität (force of mortality)  $\mu_x$  der Quotient aus der Wahrscheinlichkeit in einer unendlich kleinen Zeit  $dx$  zu sterben und dieser selbst in der Formel

$$\mu_x = - \frac{dl_x}{l_x dx}$$

enthalten, wofür man auch schreiben kann

$$\mu_x = \frac{dS_x}{l_x dx}$$

wenn man unter  $dS_x$  die für die Zeit  $dx$  anzurechnende Zahl der Sterbefälle versteht. Entsprechend setzt Karup als Invaliditätsintensität

$$i_x = \frac{dJ_x}{B_x dx},$$

wo  $dJ_x$  die Zahl der in der Zeit  $dx$  unter  $B_x$   $x$ jährigen eintretenden Invaliditätsfälle bedeutet. Denkt man sich nun eine Gesellschaft von  $P(0)$  Personen, welche in der Zeit von 0 bis  $t$  durch Invalidwerden und Sterben gelichtet wird, und bezeichnet man mit  $\Delta t$  eine kleine Zeitstrecke, so ist

$$P(t + \Delta t) - P(t) = - [J(t + \Delta t) - J(t)] - [S(t + \Delta t) - S(t)],$$

wenn  $P(t)$ ,  $J(t)$ ,  $S(t)$  die zur Zeit  $t$  vorhandenen Personen, die ausgeschiedenen Invaliden und Gestorbenen zählen. Dividirt man die Gleichung durch  $P(t) \Delta t$  und geht man zur Grenze für das unendlich klein werdende  $\Delta t$  über, so ergibt sich mit Rücksicht auf die obigen Definitionen

$$\frac{dP(t)}{P(t)} = - [\mu_t + i_t] dt$$

und durch Integration zwischen 0 und  $t$ :

$$\frac{P(t)}{P(0)} = e^{-\int_0^t \mu_t dt - \int_0^t i_t dt} \quad (b)$$

Diese Gleichung gilt allgemein, gleichviel, ob es sich um Ereignisse handelt, die im Sinne der Wahrscheinlichkeits-Rechnung von einander unabhängig sind oder nicht. Sie lässt sich auf beliebig viele Ereignisse, welche den Bestand als Functionen der Zeit vermindern, erweitern. In der Wirklichkeit werden die Wahrscheinlichkeiten, invalide zu werden und zu sterben, alterirt durch die Zahl derjenigen Personen, welche auf die eine oder andere Weise aus einem Anfangsbestande von Personen im Lan-

der Zeit ausscheiden. Aber die Intensitäten sind offenbar dieselben, ob eine solche Abhängigkeit statthat oder nicht. Sie geben ein Maass des Wachstums für die betrachteten Functionen in einem bestimmten Moment, wenn man das eine Mal nur auf das Invalidewerden, das andere Mal nur auf das Sterben reflectirt. Im Karup'schen Buche werden — eine Concession gegen erhobene Zweifel — an einem ähnlichen Beispiel die Grenzbetrachtungen ausgeführt, welche zeigen, dass die Störungen, welche die Invaliditäts-Wahrscheinlichkeit durch das Sterben und umgekehrt für einen Moment erfahren würden, gegenüber den anderen Grössen unendlich klein werden und aus der Rechnung herausfallen, obwohl das nach unserem Dafürhalten an sich klar ist.

Zur Auswerthung der in der Beobachtung gegebenen Zahlen macht Karup nun von der Fiction Gebrauch, dass eine Gesellschaft ein Mal nur durch Absterben, andererseits nur durch Invalidewerden gelichtet werde. Er behandelt bei der Feststellung der Invaliditäts-Wahrscheinlichkeit aus den Schicksalen einer Gesellschaft alle anderen Erscheinungen, durch welche dieselbe in ihrem Personenbestande verringert wird, nicht anders, als bisher allgemein das Ausscheiden bei Lebzeiten in Rücksicht gezogen wurde, wenn es auf die Feststellung der Sterbe-Wahrscheinlichkeit ankam.

Für jenen idealen Fall würden, unter  $B(t)$  die Zahl der im Alter  $t$  existirenden activen Personen verstanden, folgende Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned} B(0) - B(t) &= J(t), \\ i_t dt &= \frac{dJ(t)}{B(t)} = - \frac{dB(t)}{B(t)}, \\ \int_0^t i_t dt &= \ln B(0) - \ln B(t), \\ \frac{B(t)}{B(0)} &= e^{-\int_0^t i_t dt} \end{aligned}$$

und also wenn  $j_t$  die Wahrscheinlichkeit in der Zeit von 0 bis  $t$  invalide zu werden bedeutet, würde sein:

$$j_t = \frac{J(t)}{B(0)} = \frac{B(0) - B(t)}{B(0)} = 1 - \frac{B(t)}{B(0)} = 1 - e^{-\int_0^t i_t dt}.$$

Das Analoge gilt für die Wahrscheinlichkeit  $w_t$  zu sterben:

$$w_t = 1 - e^{-\int_0^t \mu_t dt}.$$

Vergleicht man das mit der Gleichung (b) und wird berücksichtigt, dass der auftretende Quotient  $\frac{P(t)}{P(0)}$  die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, noch invalide zu werden versteht, die  $V$



der Wahrscheinlichkeitstheorie vermuthete. In der neueren Darstellung, in welcher sich diese Thatsache als eine einfache Consequenz aus den Intensitäten ergibt, wird man schwerlich einen Angriffspunkt zur Anfechtung des logisch-mathematischen Ganges der Untersuchung finden, wenn man nur im Auge behält, dass Invalidität und Sterblichkeit als selbstständige Functionen der Zeit vorausgesetzt sind, eine Annahme, deren logische Zulässigkeit keinem Zweifel unterliegt, deren thatsächliche Berechtigung aber jede in das Gebiet der Versicherungstechnik gehörende statistische Untersuchung würde nachweisen müssen. Es braucht kaum ausgeführt zu werden, dass die den Berechnungen in letzter Hinsicht zu Grunde liegenden unbekannten Ursachen sich einer exacten Analyse völlig entziehen, und es ist kaum ein Beispiel, das geeigneter wäre als das vorliegende, das Verfahren der Statistik zu rechtfertigen. Es sind offenbar dieselben, nur graduell verschiedenen Ursachen, die zur Invalidität und zum Tode führen und nur das praktische Bedürfniss in Verbindung mit der Art ihrer Wirkungen veranlasst die Fiction, dass sich für jede dieser beiden Folge-Erscheinungen ein in den Zahlen erkennbarer gesetzmässiger Verlauf documentire.

In einem Gebiete, dem das Hilfsmittel der Physik, das Experiment, völlig abgeht, muss der Rechnung allein die Aufgabe zufallen, störende Einwirkungen zu eliminiren, und das ist lediglich der Sinn des vorliegenden Verfahrens. Hat sich dasselbe wegen seiner Annahme im statistischen Sinne selbstständig wirkender Ursachen zu verantworten, so gilt dasselbe von der Statistik und ihrer Schlussfolgerungen schlechthin. Es kann nicht in Abrede gestellt werden, dass von der Wahrscheinlichkeits-Rechnung hin und wieder ein Gebrauch gemacht worden ist, der einer scharfen Kritik nicht Stand hält, aber immer möchte dabei mehr der Gegenstand für sich als unzugänglich einer rechnungsmässigen Behandlung sich erweisen, als die mathematischen Entwicklungen selbst Irrthümer zeigen.

Im vorliegenden Falle hat man sich nur gegenwärtig zu halten, dass man es mit Anwendungen der Rechnung auf praktische Verhältnisse zu thun hat, deren Erkenntnisswerth von Niemandem überschätzt wird. Jederman weiss, dass technische Bilanzen den Weg nur auf eine kurze Strecke beleuchten; sie zeigen mit grosser Sicherheit gegenwärtige Mängel, während ihnen natürlich der Charakter einer Richtschnur für alle Zeit nicht zukommt. Die Voraussetzungen der Rechnung entstammen vergangenen Erfahrungen, während die Verhältnisse, welche dabei in Betracht gekommen sind, in einem beständigen Flusse sich befinden. Nebenbei bemerkt trägt diesem Umstande auch Karup Rechnung, wenn er periodische Wiederholungen der Bilanz für die Gotha'sche Cassa verlangt.

Der logisch-mathematische Gang des Karup'schen  
ist zulässig und sind der Ansicht, dass lediglich



$$j_x = \frac{J}{\frac{B_0 + B_1 + J}{2}} = \frac{J}{B_0 + \frac{E - A - S'}{2}}$$

worin  $J$  die Zahl der Invaliditätsfälle des Jahres angiebt.

Auch die Ableitung der Invaliditätsintensität  $i_x$  aus den auf diese Weise berechneten Grössen  $j_x$  mag noch erwähnt werden. Ist  $a$  das niedrigste Alter in einer Invaliditätstafel,  $A$  die Zahl der ursprünglich vorhandenen  $a$ -jährigen Personen, so stellt

$$Y_x = A (1 - j_a) (1 - j_{a+1}) \cdots (1 - j_{x-1})$$

den Bestand der Gesellschaft im Alter von  $x$ -Jahren dar, wenn vorausgesetzt wird, dass ein Ausscheiden aus anderen Ursachen in der angedeuteten Weise eliminirt ist. Nun folgt andererseits aus

$$\begin{aligned} \text{für } i_x \quad Y_x &= A e^{-\int_a^x i_x dx}, \\ i_x &= -\frac{dY_x}{Y_x dx}, \end{aligned}$$

so dass man als erste Näherung

$$i_x = \frac{Y_{x-1} - Y_{x+1}}{2 Y_x}$$

erhält, welche den meisten praktischen Anforderungen Genüge leistet, während sich durch Hinzunehmen fernerer Glieder der Entwicklung jede gewünschte Genauigkeit würde erreichen lassen.

Wie man sieht, lassen die Resultate des Karup'schen Verfahrens an Einfachheit kaum zu wünschen übrig, womit nicht gesagt sein soll, dass man unter allen Umständen die bisher üblichen Methoden aufgeben solle. Aber bei verwickelteren Problemen und insbesondere, wenn die Daten für die Invalidität, die Sterblichkeit, die Heirathsfrequenz aus verschiedenen Beobachtungssphären sich ergeben, wird man dem neu eingeschlagenen Weg den Vorzug geben müssen.

Wir erwähnten bereits, dass in dem Gutachten für die Berechnung von Rentenwerthen die Euler'sche Summationsformel mehrfach herangezogen wird. Karup folgt hierin dem Beispiel des Engländers Woolhouse und da diese Verwendung in deutschen Arbeiten sich bisher nicht eingebürgert hat, so mag eine kurze Wiedergabe vielleicht nicht ohne Interesse sein.

Die Formel lautet in der verwendeten Gestalt:

$$\begin{aligned} \Sigma_{x=\omega}^{\infty} f(x) &= \frac{1}{m} [f(x) + f(x + \frac{1}{m}) + f(x + \frac{2}{m}) \cdots + f(\omega - \frac{1}{m}) + f(\omega)] = \\ &= \int_x^{\omega} f(x) dx + \frac{1}{2m} [f(x) + f(\omega)] - \frac{1}{12m^2} [f'(x) - f'(\omega)] + \frac{1}{720m^4} [f'''(x) - f'''(\omega)] - \cdots (a) \end{aligned}$$

wo  $f(x)$  eine Funct:

Beste mit:

$m = 1$

die eine Entwicklung nach der Taylor'schen durch  $m$  theilbar vorausgesetzt wird. Für



$$\Sigma f(x) = \int_x^{\omega} f(x) dx + \frac{1}{2} [f(x) + f(\omega)] - \frac{1}{12} [f'(x) - f'(\omega)] + \frac{1}{720} [f'''(x) - f'''(\omega)] - \dots (b)$$

über und aus der Verbindung dieser beiden Beziehungen folgt:

$$\Sigma^{(m)} f(x) = \Sigma f(x) - \frac{m-1}{2m} [f(x) + f(\omega)] + \frac{m^2-1}{12m^2} [f'(x) - f'(\omega)] - \frac{m^4-1}{720m^4} [f'''(x) - f'''(\omega)] + \dots (c),$$

womit eine Relation zwischen Summen gewonnen ist, die sich für den vorliegenden Fall einmal auf  $\frac{1}{m}$  Jahr, andererseits auf die gewöhnliche Einheit, das Jahr, beziehen.

Sieht man nun z. B. die Grösse  $l_x q^x$ , die sogenannte discountirte Zahl der Lebenden ( $q$  bedeutet den Abzinsungsfactor und ist für 3 % =  $\frac{1}{1.03}$ ), als eine Function von  $x$  an, in welcher die Functionswerte mit dem höchsten Alter  $\omega$  und auch die Derivirten = 0 zu setzen sind, so entsprechen den angegebenen Beziehungen (a), (b), (c) drei andere, in welchen nur die Grössen  $f(\omega)$ ,  $f'(\omega)$ ... fehlen und diese Relationen sind es, welche nicht allein häufig gebrachte Näherungswerte für solche Rentenwerte, die sich auf kürzere als Jahrestermine beziehen, leicht begründen, sondern auch nicht uninteressante Gleichungen zwischen den Rentenwerthen und den Intensitäten zum Ausdruck bringen. So ergibt sich, um ein sehr einfaches Beispiel anzuführen, der Werth einer pränumerando und halbjährlich zu zahlenden Leibrente von 1 pro anno für eine  $x$ -Jahre alte Person

$${}_2R_x = \frac{1}{2} \frac{l_x q^x + l_{x+\frac{1}{2}} q^{x+\frac{1}{2}} + \dots}{l_x q^x} = \frac{\Sigma^{(2)} f(x)}{f(x)}$$

unter Anwendung der dritten Gleichung für  $m = 2$

$${}_2R_x = \frac{\Sigma f(x)}{f(x)} - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \frac{f'(x)}{f(x)} - \dots$$

und wenn man beachtet, dass

$$\frac{f'(x)}{f'(x)dx} = \frac{dl_x}{l_x dx} + \log \text{nat } q = -\mu_x + \log \text{nat } q$$

$$\frac{\Sigma f(x)}{f(x)} = {}_1R_x,$$

wo  $\mu_x$  die Sterblichkeitsintensität für das Alter  $x$ ,  ${}_1R_x$  den Werth der jährlich pränumerando zahlbaren Leibrente von 1 bedeuten

$${}_2R_x = {}_1R_x - \frac{1}{4} - \frac{\mu_x + \log \text{nat } r}{16} + \dots \left( r = \frac{1}{q} \right)$$

in welcher für praktische Zwecke der dritte Term schon vernachlässigt werden kann.

Ebenso folgt für den Werth einer continuirlichen Rente aus:

$${}^m R_x = {}^1 R_x - \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2} (\mu_x + \log \text{nat } r) + \dots$$

für  $m = \infty$

$${}^\infty R_x = {}^1 R_x - \frac{1}{2} - \frac{\mu_x + \log \text{nat } r}{12} + \dots,$$

so dass sich diese annähernd als um den halben Betrag der Jahresrente kleiner erweist, als die pränumerando in jährlichen Raten zahlbare Leibrente.

Soll die continuirliche Rente nicht blos durch den Tod, sondern auch bei eintretender Invalidität erlöschen, so ergibt sich analog

$${}^\infty R_x = {}^1 R_x - \frac{1}{2} - \frac{\mu_x + i_x + \log \text{nat } r}{12} + \dots,$$

wo  $i_x$  die Invaliditäts-Intensität bedeutet.

Wir wollen damit unser Referat beschliessen und auf das Buch selbst verweisen, das ein gründliches Studium wohl werth ist und als ein mustergiltiges Beispiel sowohl dem Statistiker Dienste leisten wird, als es geeignet sein dürfte, dem Neuling einen Einblick in den heutigen Stand der mathematischen Statistik zu gewähren. Von dem reichhaltigen Tabellen-Material wird sich Vieles auch für ähnliche Zwecke dienstbar erweisen. In der Tages- und Fachpresse sind der Veröffentlichung des Gutachtens sehr freundliche Worte geschenkt worden. Man wird, wie wir zuversichtlich glauben, das Buch nicht aus der Hand legen können, ohne dem immensen Fleiss, der Geschicklichkeit und dem Scharfsinn des Verfassers seine Anerkennung zu zollen und wenn in einer Besprechung, was wir für den Hauptvorzug des Buches halten, das Streben nach wissenschaftlicher Begründung, bei allem Lobe den Vorwurf „mathematischer Scholastik“ gefunden hat, so möchte das Buch selbst sich dagegen mit den Worten von Joh. Nic. Tetens verwahren können: „Die kürzeste Praxis erfordert jedes Mal die meiste Theorie“.

Dr. L. GOLDSCHMIDT.

**Die Grundlagen der Geometrie ohne specielle Grundbegriffe und Grundsätze, mit Einschluss einer vollständigen Darstellung der reinen Sphärik, einheitlich dargestellt von JOHANN JACOB ISELIN, eidgen. diplom. Arzt von Glarus. Bern, Druck und Verlag von K. J. Wyss. 1891. 264 S. 4°. Preis geh. 6 Mk.**

Es ist bekannt, dass die bisher übliche Zusammenstellung der Sätze der Geometrie zu einem System gleich in den ersten Grundlagen für unser streng einheitliches Denken eine störende Lücke zeigt. Gewöhnlich wird diese Lücke in die Parallelen-Theorie verlegt. Man kann aber auch sagen, dass der Mangel darin bestehe, dass wir keinen exacten Beweis für den Satz haben: „Die Winkelsumme eines Dreiecks beträgt 180 Grad“. Es sind eine Reihe von Versuchen gemacht worden, diese Lücke auszufüllen,





















d. h.  $\sqrt{675} > \frac{1325}{51}$  und  $\sqrt{3} > \frac{265}{153}$ , und so sind von dem Ausgangspunkte des Näherungswerthes  $\sqrt{3} \sim \frac{26}{15}$  aus, der zum eisernen Bestande der rechnenden Geometrie geworden ist, die beiden archimedischen Grenzwerte gefunden. Ausser diesem Hauptergebnisse der Hultsch'schen Untersuchung wird der aufmerksame Leser noch manches Andere ihr entnehmen können, und wir persönlich bedauern sehr, dass wir den vom Verfasser uns überschickten Abzug erst erhielten, als der Druck unserer oben erwähnten zweiten Auflage über Archimed hinausgeschritten war. Wenn Herr Hultsch die vorzugsweise Benutzung binärer Stammbrüche, d. h. Brüche von der Form  $\frac{1}{2^k}$ , auf die nach fortgesetzter Halbierung übliche Theilung der Längenmaasse stützt, so möchten wir ergänzend an das ägyptische Rechnen erinnern, welches dem Scholiasten des platonischen Charmides gemäss auch in Griechenland neben dem eigentlich hellenischen Rechnen Bürgerrecht erlangt hatte.

CANTOR.

**Apollonii Pergaei** quae graece exstant cum commentariis antiquis edidit et latine interpretatus est J. L. HEIBERG, Dr. phil. Vol. I, 1891, pag. XII, 451. Vol. II, 1893, pag. LXXXV, 361. Leipzig, B. G. Teubner's Bibliotheca Scriptorum Graecorum et Romanorum.

Welche stattliche Menge von Neuausgaben griechischer Mathematiker hat nicht die Presse verlassen, seit Hultsch 1864 den Heron veröffentlichte! Die seit jener Zeit verflossenen nicht vollen 30 Jahre haben in neuem, kritisch tadellosem Gewande und, was nicht von geringer Bedeutung ist, in leicht zugänglichen, handlichen Ausgaben uns alle jene Werke gebracht, die bis dahin meistens nur in Gestalt von Folianten auf öffentlichen Bibliotheken zu finden waren und sich selten in die Büchersammlung eines Privaten verirrt. Für die Kegelschnitte des Apollonius war man auf die Halley'sche Ausgabe von 1710 angewiesen, wenn man sich nicht an der deutschen Bearbeitung von Balsam (1861) genügen lassen wollte. Es war fast eine Ehrenpflicht des Herausgebers des Archimed und der Euklidischen Elemente, in dieser Nothlage einzugreifen, und Herr Heiberg hat dieser Ehrenpflicht zu genügen gewusst. Auf Grundlage der beiden ältesten Vaticancodices V und v, deren Ersterer aus dem XII. bis XIII., Letzterer aus dem XIII. S. stammt, und unter Vergleichung zahlreicher anderer Handschriften hat Herr Heiberg die neue Ausgabe veranstaltet. Neben den Büchern I bis IV der Kegelschnitte sind die bei Pappus vorhandenen Bruchstücke anderer Schriften des Apollonius nebst den Lemmen des Pappus selbst und der Commentar des Eutokius zum Abdruck gekommen, letzterer, sowie die vier Bücher Kegelschnitte, mit beigegebener



# Bibliographie

vom 1. August bis 30. September 1893.

---

## Periodische Schriften.

- Abhandlungen der mathem.-physikal. Classe der königl. bayer. Akademie der Wissenschaften. 18. Bd. 1. Abth. München, Franz. 8 Mk.
- Sitzungsberichte der mathem.-physikal. Classe der königl. bayer. Akademie der Wissenschaften. 1893. 2. Heft. Ebendasselbst. 1 Mk. 20 Pf.
- Sitzungsberichte der Wiener Akademie der Wissenschaften, mathem.-naturw. Classe, Abth. IIa. 102 Bd., 3. u. 4. Heft. Wien, Tempsky. 4 Mk. 60 Pf.
- Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. 28. Jahrgang. 1. und 2. Heft. Leipzig, Engelmann. 4 Mk.
- Tageblatt der deutschen Naturforscher-Versammlung in Nürnberg vom 11. bis 15. September 1893. Nürnberg, Schrag. 2 Mk.
- Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung. 2. Bd., 1891—1892. Mit Bericht über die Entwicklung der Lehre vom Erddruck, von F. KÖTTER. Berlin, G. Reimer. 4 Mk. 50 Pf.
- Aus dem Archive der deutschen Seewarte. Herausgegeben von der Direction. 15. Jahrgang, 1892. Hamburg, Friedrichsen. 15 Mk.
- Jahresbericht des Centralbureaus für Meteorologie und Hydrographie im Grossherzogthum Baden für das Jahr 1892. Karlsruhe, Braun. 6 Mk.
- Jahrbuch des königl. sächs. meteorologischen Instituts. X. Jahrgang (1892). 1. Hälfte. Herausgegeben von P. SCHREIBER. Chemnitz, Bülz. 10 Mk.
- Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Redigirt von L. FRÖHLICH. 10. Bd. 2. Hälfte. Berlin, Friedländer & S. 4 Mk.

## Geschichte der Mathematik und Physik.

- FROBENIUS, G., Gedächtnissrede auf Leop. Kronecker. (Berliner Akad.) Berlin, G. Reimer. 1 Mk. 50 Pf.
- KUNDT, A., Gedächtnissrede auf Werner v. Siemens. (Berliner Akad.) Ebendasselbst. 1 Mk. 50 Pf.
- OBERHAUCH, J., Monge, der Begründer der darstellenden Geometrie. (Progr.) Brünn, Selbstverlag des Verfassers. 2 Mk.

## Reine Mathematik.

- FREGE, G., Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet. 1. Bd. Jena, Pohle. 12 Mk.
- GRAVELIUS, H., Lehrbuch der höheren Analysis. 1. Bd. Differentialrechnung. Berlin, Dümmler. 6 Mk.

- SCHWERING, K., Trigonometrie für höhere Lehranstalten. Freiburg i. Br., Herder. 80 Pf.
- BARTHELS, E., Ausführliches Lehrbuch der Stereometrie und Trigonometrie. Wiesbaden, Sadowsky. 2 Mk. 80 Pf.
- SELLENTIN, R., Grundriss der Geometrie für höhere Lehranstalten. I. Planimetrie. Köln, Du Mont-Schauberg. 2 Mk. 40 Pf.
- MÜLLER, H., Stereometrische Constructionen, Projectionslehre für die Prima der Gymnasien. Frankfurt a. M., Hermann. 1 Mk.
- SCHLOTKE, J., Lehrbuch der darstellenden Geometrie. II. Theil. Dresden, Kühnemann. 2 Mk.
- DORR, R., Das Problem der beliebigen Winkeltheilung ohne und mit Anwendung eines besonderen Instruments. Elbing, Meissner. 3 Mk.

### Angewandte Mathematik.

- WENZEL, L., Beitrag zur Schwingungstheorie elastischer Saiten. Programm. Klagenfurt, Kleinmayr. 1 Mk.
- POINCARÉ, H., Thermodynamik. Deutsch von W. JAEGER und E. GÜMLICH. Berlin, Springer. 10 Mk.

### Physik und Meteorologie.

- WILH. WEBER'S Werke. 5. Bd. Wellenlehre, besorgt durch E. RIECKE. Berlin, Springer. 18 Mk.
- CLAPEYRON, E., Die bewegende Kraft der Wärme. Deutsch herausgegeben von R. MEWES. Berlin, Friedländer's Buchdruckerei. 1 Mk. 60 Pf.
- VIOLLE, J., Lehrbuch der Physik. Deutsch von GÜMLICH, HOLBORN, JAEGER und LINDECK. II. Theil. 1. Bd. Akustik. Berlin, Springer. 8 Mk.
- BLASIUS, W., Stürme und moderne Meteorologie. 4. Vortrag. Die Ursachen der Barometerschwankungen. Braunschweig, Limbach. 1 Mk. 80 Pf.  
compl. 2 Mk. 60 Pf.
- GLASS, R., Abriss der Meteorologie und Elektrizitätslehre. Für Realschulen. Plauen i. V., Neupert. 1 Mk. 60 Pf.

# Mathematisches Abhandlungsregister.

1892.

Zweite Hälfte: 1. Juli bis 31. December.

## A.

### Abbildung.

269. Ueber die conforme Abbildung einer Halbebene auf ein unendlich benachbartes Kreisbogenpolygon. G. Pick. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) C, 1887.

### Abel'sche Transcendenten.

270. Bemerkung über einen Punkt in Riemann's Theorie der Abel'schen Functionen. F. Franklin. Mathem. Annal. XLI, 308.  
Vergl. Umkehrproblem.

### Absolute Geometrie.

271. Die Trigonometrie in der absoluten Geometrie. M. Simon. Crelle CIX, 187.  
Vergl. Mehrdimensionale Geometrie.

### Abzählende Geometrie.

272. Sur l'analysis situs. H. Poincaré. Compt. Rend. CXV, 683.  
273. Ueber die Zusammenhangszahl eines Flächensystems. C. Koehler. Crelle CIX, 118.  
274. Exemples de la détermination des coniques dans un système donné qui satisfait à une condition donnée. H. G. Zenthen. Mathem. Annal. XLI, 539  
[Vergl. Nr. 3.]

### Analytische Geometrie der Ebene.

275. Sur les angles et les distances en coordonnées trilinéaires. Vogt. N. ann. math. Ser. 3, XI, 148.  
276. La symétrie en coordonnées polaires. J. Lefèvre. N. ann. math. Ser. 3, XI, 302, 353.  
277. Ueber harmonische Strahlen. Rud. Skutsch. Grun. Archiv 2. R. XI, 206.  
278. Geometrische Bestimmung der Tangente der Cassini'schen Linie. W. Rulf. Grun. Archiv 2. R. XI, 438.  
279. Zur Cassinischen Linie. E. Oekinghaus. Grun. Archiv 2. R. XI, 441.  
Vergl. Geodäsie 360. Kegelschnitte. Krümmung.

### Analytische Geometrie des Raumes.

280. Sur la corrélation entre le systèmes de coordonnées ponctuelles et les systèmes de coordonnées tangentielles. M. d'Ocagne. N. ann. math. Ser. 3, XI, 70.  
281. Fundamentalachsen der mehrfach gekrümmten Linie. R. Hoppe. Grun. Archiv 2. R. XI, 442.  
282. Das Tetraeder, bezogen auf seine Hauptträgheitsachsen. R. Hoppe Grun. Archiv 2. R. XI, 85.  
Vergl. Krümmung. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung.

### Astronomie.

283. Ueber die Gleichungen, mit deren Hilfe man die säcularen Störungen der Planeten bestimmt. K. Hensel. Crelle CX, 180.  
284. Ueber die Berechnung einer Kometenbahn mit Berücksichtigung von Gliedern höherer Ordnung. E. Weiss. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) C, 1132.  
285. Sur le calcul des inégalités d'ordre élevé. O. Callandreau. Compt. Rend. CXV, 386.





308. Sur les équations différentielles linéaires. J. Cels. Compt. Rend. CXV, 1067.  
 309. Ueber die bei den linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung auftretenden Primformen. Ludw. Schlesinger. Crelle CX, 130. — Compt. Rend. CXV, 32.  
 310. Ueber lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung, für welche die Umkehrfunction von endlicher Vieldeutigkeit ist. Ludw. Schlesinger. Crelle CX, 265.  
 311. Ueber eine specielle lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten. L. Pochhammer. Mathem. Annal. XLI, 174. -  
 312. Sur le problème de Pfaff. A. J. Stodolkievitz. Compt. Rend. CXV, 592.  
 313. Erweiterung eines Pfaff'schen Satzes auf simultane totale Differentialgleichungen erster Ordnung und Integration einer Classe von simultanen partiellen Differentialgleichungen. M. Hamburger. Crelle CX, 158.  
 314. Ueber die Integrale simultaner partieller Differentialgleichungs-Systeme. L. Königsberger. Mathem. Annal. XLI, 260.  
 315. Ueber die Integrale partieller Differentialgleichungs-Systeme beliebiger Ordnung. L. Königsberger. Crelle CX, 261.  
 Vergl. Hypergeometrische Reihe 409, 410. Invariantentheorie 419. Mechanik 459, 460. Wärmelehre 529.

#### Differentialquotient.

316. Ueber Functionen einer reellen Variablen, welche Derivirte jeder Ordnung besitzen. L. Maurer. Mathem. Annal. XLI, 377.  
 317. Die Nullwerthe höherer Ableitungen gewisser zusammengesetzter Functionen. Fr. Rogel. Grun. Archiv 2. B. XI, 14.

#### Differenzengleichung.

318. Zur Theorie der Differenzengleichungen. W. Heymann. Crelle CX, 112.

#### Dreiecksgeometrie.

319. Sur quelques propriétés du triangle. Molenbroch. N. ann. math. Ser. 3, XI, 121, 179.  
 320. Constructions et formules relatives au triangle. C. A. Laisant. N. ann. math. Ser. 3, XI, 209.  
 321. Sur la géométrie du triangle. E. Valdès. N. ann. math. Ser. 3, XI, 249.

### E.

#### Elasticität.

322. Des perturbations locales que produit au-dessous d'elle une forte charge, répartie uniformément le long d'une droite normale aux deux bords, à la surface supérieure d'une poutre rectangulaire. J. Boussinesq. Compt. Rend. CXV, 5. [Vergl. Nr. 47.]  
 323. De la forme générale de la loi du mouvement vibratoire dans un milieu isotrope. E. Mercadier. Compt. Rend. CXV, 1264.  
 324. Rotating elastic solid cylinders of elliptic section. C. Chree. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIV, 70, 154.  
 325. Flexure of long pillars under their own weight. M. F. Fitz Gerald. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIII, 428.  
 326. Struts and tie-rods with lateral loads. J. Perry. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIII, 269.  
 327. On the resistances to transverse strain in beams. R. C. Nichols. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIII, 397.  
 328. The influence of flaws and air-cavities on the strength of materials. J. Larmor. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIII, 70.  
 329. On the difficulties of constructing a theory of the collapse of boiler-flues. A. B. Basset. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIV, 221.

#### Elektricität.

330. The „Elastic Medium“ method of treating electrostatic theorems. W. H. Bragg. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIV, 18.  
 331. An electrolytic theory of dielectrics. A. P. Chattock. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIV, 461.  
 332. Some points in electrolysis. J. Swinburne. Phil. Mag. Ser. 5, XXXII, 1.

















**Potential.**

504. Table of zonal spherical harmonics and illustration of its use. J. Perry. Phil. Mag. Ser. 5, XXXII, 512.  
 505. The vector potential. A. Schuster. Phil. Mag. Ser. 5, XXXII, 9.

**Q.****Quadratische Formen.**

506. Anwendung der Modul-Systeme auf einen geometrischen Satz und auf das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen. E. Netto. Crelle CX, 184.

**Quadratische Reste.**

507. Zur Theorie der quadratischen Reste. K. Reich. Grun. Archiv 2. R. XI, 176. Vergl. Zahlentheorie 551, 552.

**Quaternionen.**

508. Quaternions as a practical instrument of physical research. Al. Mac Aulay. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIII, 477.

**R.****Reihen.**

509. Sur les séries à termes positifs. V. Jamet. N. ann. math. Ser. 3, XI, 99. [Vergl. Nr. 236.]  
 510. Sur la convergence des séries. A. de Saint-Germain. N. ann. math. Ser. 3, XI, 267. Compt. Rend. CXV, 1258.  
 511. Ueber die Reihe der reciproken Binomialcoefficienten Fr. Rogel. Grun. Archiv 2. R. XI, 412.  
 512. Sur la serie de Fourier. J. de Séguier. N. ann. math. Ser. 3, XI, 299.  
 513. Sur une classe particulière de séries. M. d'Ocagne. N. ann. math. Ser. 3, XI, 526. — Compt. Rend. CXV, 790, 904.  
 514. Démonstration simple des formules qui servent au calcul des tables de logarithmes sinus. H. Laurent. N. ann. math. Ser. 3, XI, 119. — G. Peanr ibid. 289. Vergl. Functionen 350. Hypergeometrische Reihe. Zahlentheorie 548.

**S.****Schwerpunkt.**

515. Der Schwerpunkt des Dreiecks als Schwerpunkt eines Systems von Vierecken. R. Hoppe. Grun. Archiv. 2. R. XI, 351.

**Singularitäten.**

516. Einige allgemeine Sätze über die einfachsten Gestalten ebener Curven. Ad. Kneser. Mathem. Annal. XLI, 349.  
 517. Ueber Singularitäten verschiedener Ausnahme-Ordnung und ihre Zerlegung. J. Korteweg. Mathem. Annal. XLI, 286.

**Stereometrie.**

518. Sur le quadrilatère. F. Farjon. N. ann. math. Ser. 3, XI, 41.

**T.****Thetafunctionen.**

519. Ueber die Jacobi'sche Thetaformel. Aug. Gutzmer. Crelle CX, 177.

**Transformationsgruppen.**

520. Ueber die Irreducibilität complexer Zahlensysteme. G. Scheffers. Mathem. Annal. XLI, 601. [Vergl. Bd. XXXVII Nr. 555.]  
 521. Ueber den analytischen Charakter der eine endliche Transformationsgruppe darstellenden Functionen. Fr. Schur. Mathem. Annal. XLI, 509  
 522. Sur les groupes infinis de transformations. A. Tresse. Compt. Rend. CXV, 1003.

**Trisection.**

523. Zur näherungsweise Dreitheilung eines Winkels. A. v. Frank. Grun. Archiv 2. R. XI, 207.  
 524. Dreitheilung jedes Winkels mittelst fester Kegelschnitte. W. Panzerbieter. Grun. Archiv 2. R. XI, 349, 408. [Vergl. Bd. XXXVII Nr. 409.]



549. Ueber arithmetische Progressionen, in denen Anfangsglied und Differenz theilerfremd sind. L. Gegenbauer. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) C, 1018.
550. Arithmetische Relationen. L. Gegenbauer. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) C, 1054.
551. Ueber das Legendre-Jacobi'sche Symbol. L. Gegenbauer. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) C, 855.
552. Ueber den quadratischen Rest-Charakter. L. Gegenbauer. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) C, 1072.
553. Eine neue Darstellung des biquadratischen Charakters. J. A. Gmeiner. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) C, 1093.
554. Die Ergänzungssätze zum bicubischen Reciprocitätsgesetze. J. A. Gmeiner. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) C, 1330.
555. Ueber den arithmetischen Charakter der zu den Verzweigungen (2, 3, 7) und (2, 4, 7) gehörenden Dreiecksfunctionen. R. Fricke. Mathem. Annal. XLI, 443.
556. Zur Zahlentheorie. G. Speckmann. Grun. Archiv 2. R. XI, 439.
557. Critérium de divisibilité par un nombre quelconque. Fontés. Compt. Rend. CXV, 1259.
558. On the connexion between necurring formulae involving sums of divisors and the corresponding formulae involving differences between sums of even and uneven divisors. J. W. L. Glaisher. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIII, 54.
559. Sur une question de la théorie des nombres. D. Mirimanoff. Crelle CIX, 82.
560. Ueber die Verwendung des Rechenbretes zur Darstellung beliebiger Zahlensysteme. G. v. d. Gabelentz. Grun. Archiv 2. R. XI, 213.
- Vergl. Bernoulli'sche Zahlen. Hyperelliptische Functionen 406. Imaginäres 415, 416. Kettenbrüche. Quadratische Form. Quadratischer Rest.
-

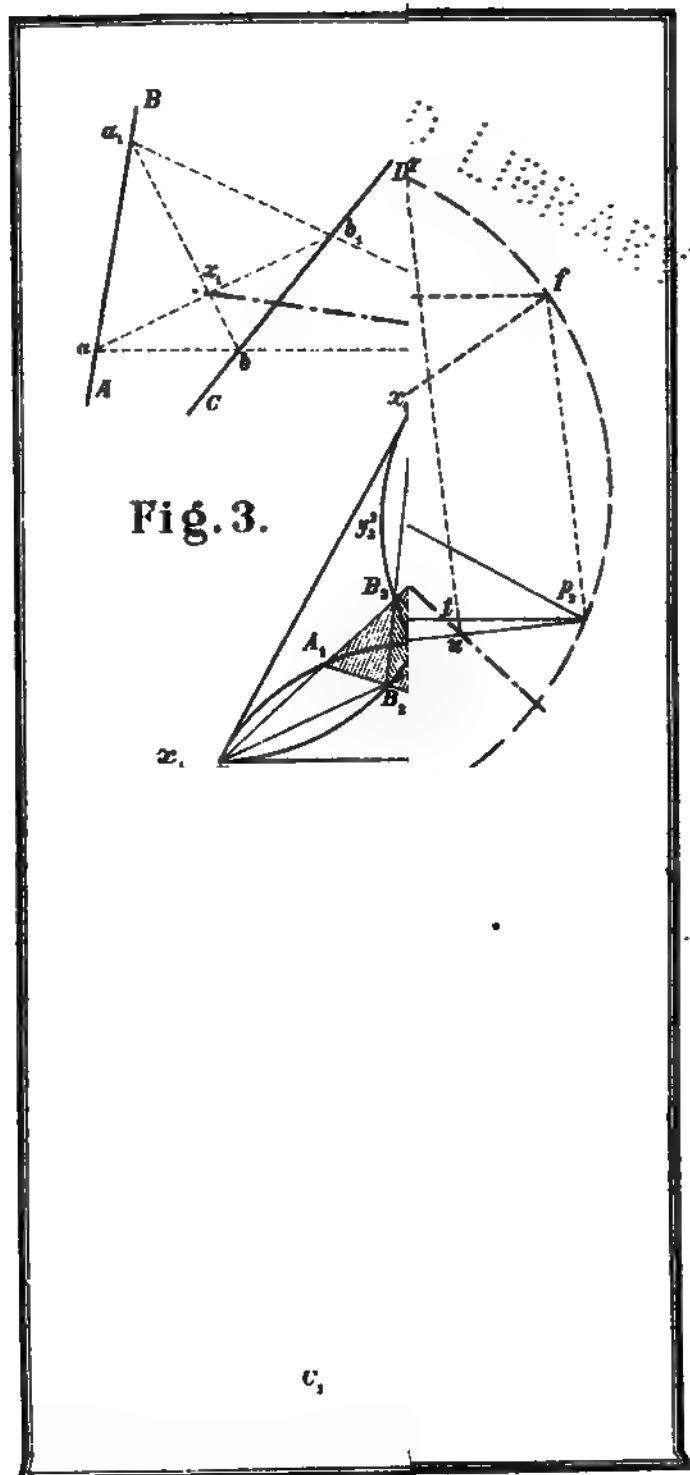




Fig. 4.

Fig. 5.

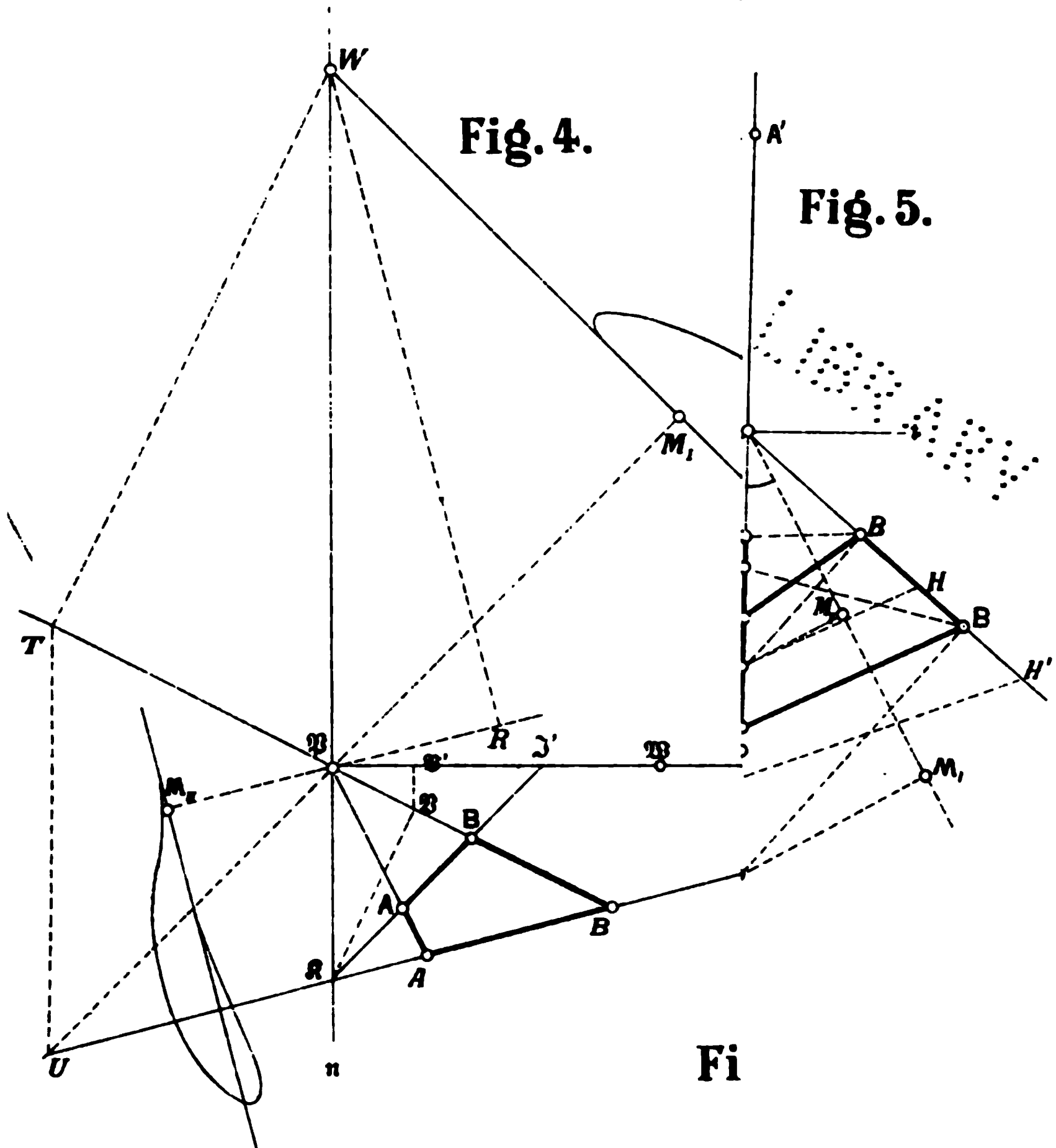
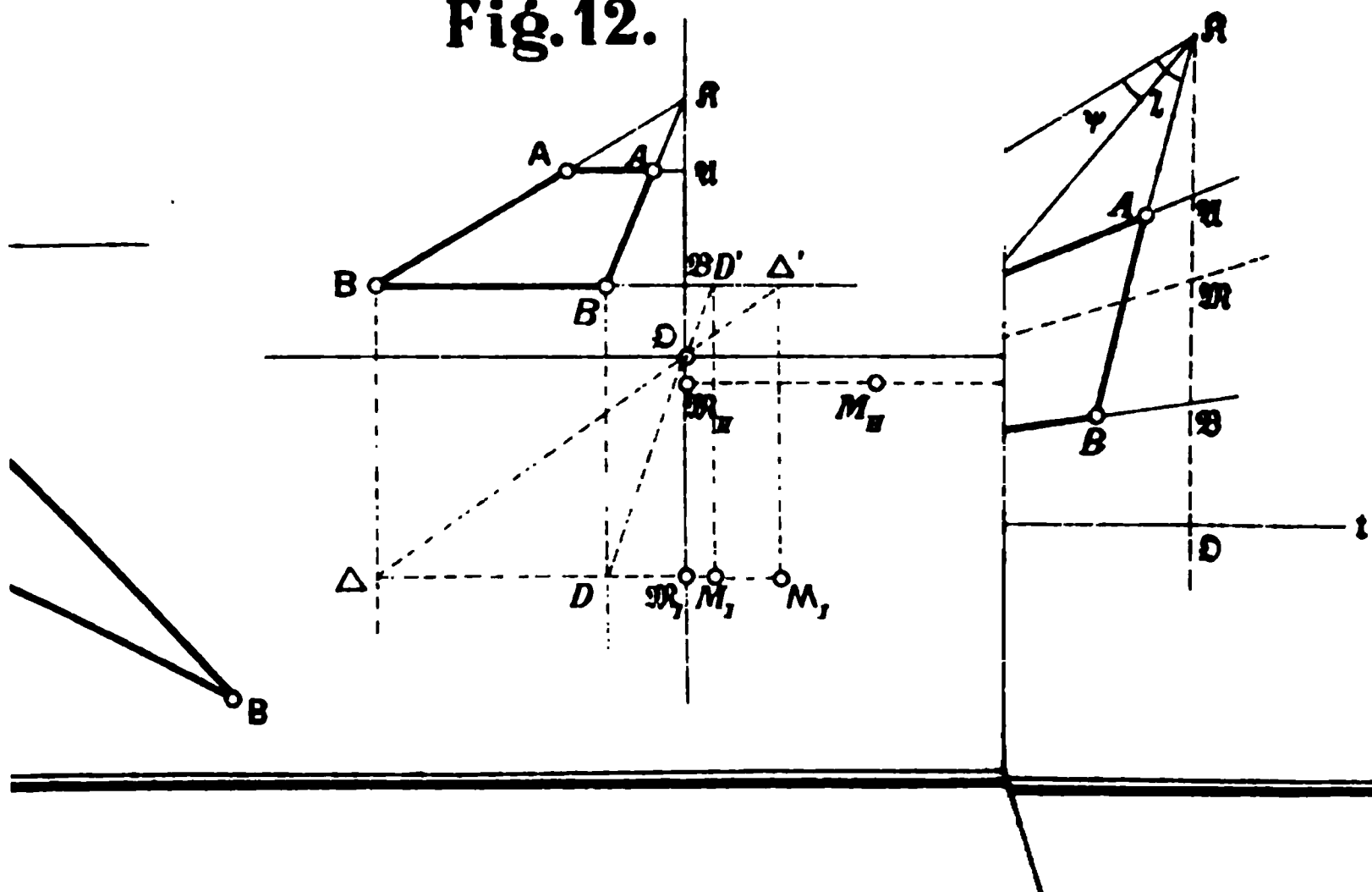


Fig. 12.









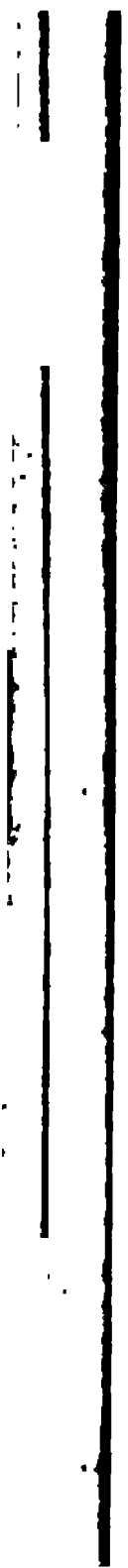
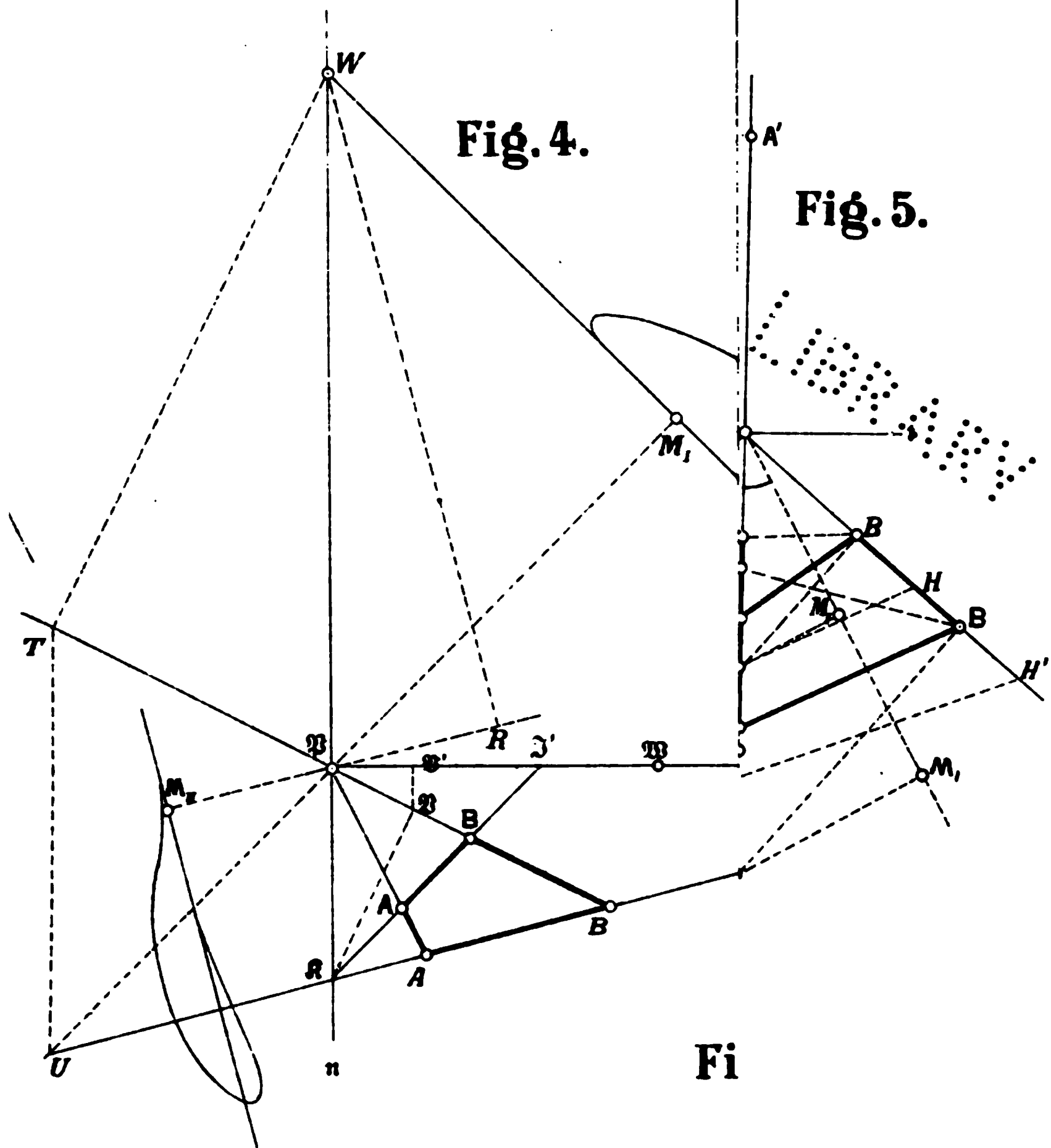






Fig. 4.

Fig. 5.



Fi

Fig. 12.

